INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE

IUT “A” Paul Sabatier, Toulouse 3.

DUT Génie Civil
Module de Mathématiques.

MATHÉMATIQUES

Éléments de calculs pour l’étude des fonctions de plusieurs variables et des équations différentielles.

G. Chèze

guillaume.cheze@iut-tlse3.fr
http ://www.math.univ-toulouse.fr/∼cheze/Enseignements.html

Règle du jeu

Ceci est un support de cours pour le module M3 de l'IUT Génie Civil de Toulouse. Dans ce module il est question de fonctions de plusieurs variables et d'équations différentielles.

Certains passages de ce cours comportent des trous, ils sont là volontairement. C'est à vous de les compléter durant l'heure de cours hebdomadaire. La partie du cours traitée en amphithéâtre sera complétée et disponible régulièrement sur internet à l'adresse : http ://www.math.univ-toulouse.fr/∼cheze/ .

Les exercices à faire en TD se trouvent à la suite du cours et les corrections à la fin de chaque chapitre.

Je serai reconnaissant à toute personne me signalant une ou des erreurs se trouvant dans ce document.

A présent, au travail et bon courage à tous !

Table des matières

Première partie

Fonctions de plusieurs variables

Jusqu'à présent vous avez surtout rencontré des fonctions d'une variable. Cependant les phénomènes naturels ne dépendent pas en général d'une seule variable. Par exemple : la vitesse moyenne v dépend de la distance parcourue d et du temps t mis pour effectuer ce parcours, on a $v = d/t$. Un autre exemple est donné par le calcul de l'aire d'un rectangle : $A = L \times l$. L'aire est une fonction de la longueur L et de la largeur l. Dans cette partie, nous allons étudier les fonctions de plusieurs variables. Nous aurons une attention toute particulière pour les fonctions de deux variables car dans ce cas nous pourrons encore faire des dessins. Ensuite nous verrons que nous pouvons aussi faire des calculs de dérivées. Cela sera utilisé pour effectuer des calculs d'incertitude et pour trouver les extrema (maximum, minimum) d'une fonction de plusieurs variables.

Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables

Nous allons dans ce chapitre définir les fonctions de plusieurs variables. Nous nous intéresserons plus particulièrement aux fonctions de deux variables et aux diverses représentations graphiques que l'on peut obtenir.

1.1 Définition

L'exemple le plus simple de fonctions de deux variables est donné par l'aire d'un rectangle : $A = L \times l$. L et l étant des nombres positifs nous représentons cette fonction de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (L, l) & \longmapsto & L \times l \end{array}$$

$\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ s'appelle le domaine de définition de la fonction f.

D'une manière générale nous pouvons avoir n variables où n désigne un nombre entier.

Définition 1. *Soit n un nombre entier et $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. Une fonction f de n variables est un procédé qui a tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{D}$ associe un unique nombre réel.*
Cela se note de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

$\mathcal{D}$ est le domaine de définition de f.

Remarque : La notation $(x_1, \ldots, x_n)$ est là pour montrer que nous avons n variables. En pratique, lorsque nous n'avons que deux variables nous les notons x et y plutôt que x_1 et x_2.

Par exemple, la fonction suivante donne la distance d'un point de coordonnées (x, y) à l'origine du plan.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

f est une fonction de deux variables, $\mathbb{R}^2$ est son domaine de définition.

Voici, ici un exemple d'une fonction de trois variables : $(x; y; z)$.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto \frac{x\cos(y) + 2y^3 - \pi}{z^5} \end{aligned}$$

g est une fonction de trois variables, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$ est son domaine de définition.

Exercice 1. *La formule suivante permet de définir une fonction de 2 variables :*

$$f(x, y) = \ln(x) + \sin(y)$$

1. *Donner l'image de* $(e, 0)$.
2. *Donner le plus grand domaine de définition possible pour* f.

Solution :

1. $f(e, 0) = \ln(e) + \sin(0) = 1 + 0 = 1.$
   L'image de $(e, 0)$ par f est 1.
2. Pour que $\ln(x)$ existe il faut (et il suffit) que $x > 0$. Donc $x \in \mathbb{R}^{+,\star}$.
   $\sin(y)$ existe pour tout $y \in \mathbb{R}$. Donc $y \in \mathbb{R}$.
   Ainsi le plus grand domaine de définition possible pour f est : $\mathbb{R}^{+,\star} \times \mathbb{R}$.

1.2 Représentation graphique d'une fonction de deux variables

1.2.1 Définition

Avant de donner la définition du graphe d'une fonction de deux variables nous allons rappeler ce qu'est le graphe d'une fonction d'une variable.

Définition 2. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Le graphe $\mathcal{C}_f$ de f (fonction d'une seule variable) est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x; f(x))$ avec $x \in \mathcal{D}$.
Cela se note :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x),\ x \in \mathcal{D}\}$$

Ainsi pour tracer le graphe d'une fonction d'une variable nous avons rajouté une nouvelle variable y. Le graphe est alors une courbe dans le plan $\mathbb{R}^2$.
Pour les fonctions de deux variables x et y nous allons aussi rajouter une variable z et le graphe sera alors une surface de l'espace $\mathbb{R}^3$.

Définition 3. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & f(x, y) \end{array}$$

Le graphe $\mathcal{S}_f$ *de* f *(fonction de deux variables) est l'ensemble des points de l'espace de coordonnées* $(x; y; f(x, y))$ *avec* $(x, y) \in \mathcal{D}$.
Cela se note :

$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y),\ (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

Remarque :
$\mathcal{S}_f$ est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

A chaque point $(x, y) \in \mathcal{D}$ correspond un point sur la surface $\mathcal{S}_f$. Voici comment on place les points dans un repère.

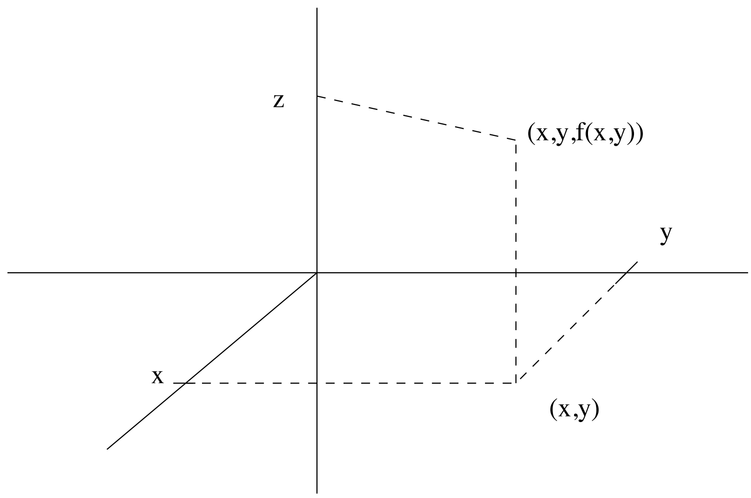


Figure 1.1 – Utilisation d'un repère à 3 dimensions.

Afin de vous familiariser avec les graphes des fonctions de deux variables voici quelques exemples.

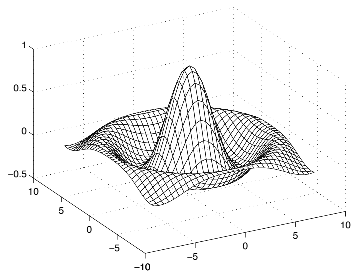


FIGURE 1.2 – Représentation graphique de $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$.

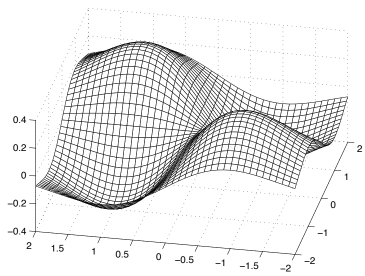


FIGURE 1.3 – Représentation graphique de $z = xye^{-0.5(x^2+y^2)}$.

1.2.2 Comment représenter le graphe d'une fonction de deux variables

Nous savons faire des dessins dans un plan, donc pour faire des dessins dans l'espace nous allons nous ramener à ce que nous savons faire...C'est à dire nous allons dessiner la "trace" de la surface sur les plans xOz, yOz et xOy. Auparavant nous allons rappeller quelques propriétés des plans de l'espace.

Proposition 1.

- *Un plan parallèle au plan xOy a pour équation :*

$$z = z_0$$

Ce plan contient le point $(0, 0, z_0)$.
- *Un plan parallèle au plan xOz a pour équation :*

$$y = y_0$$

Ce plan contient le point $(0, y_0, 0)$.
- *Un plan parallèle au plan yOz a pour équation :*

$$x = x_0$$

Ce plan contient le point $(x_0, 0, 0)$.

Remarque : Ces deux derniers plans ne sont pas des représentations graphiques d'une fonction de deux variables (x, y). En effet nous ne pouvons pas faire correspondre un point de (xOy) avec un seul point de ces plans.

Exercice 2. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

1. *Déterminer, nommer et tracer la projection dans le plan xOz de $\mathcal{S}_f \cap \{y = k\}$ pour $k = 1; 2;$ puis pour $k \in \mathbb{R}$.*
2. *Est ce que $\mathcal{S}_f \cap \{y = k\}$ est le graphe d'une fonction d'une variable ? Si oui, laquelle ?*
3. *Déterminer, nommer et tracer la projection dans le plan yOz de $\mathcal{S}_f \cap \{x = 0\}$.*
4. *Est ce que $\mathcal{S}_f \cap \{x = 0\}$ est le graphe d'une fonction d'une variable ? Si oui, laquelle ?*
5. *Déterminer et nommer la projection dans le plan xOy de $\mathcal{S}_f \cap \{z = k\}$ pour $k = 1; 2; 0; -1$ puis pour $k \in \mathbb{R}^+$.*
6. *Est ce que $\mathcal{S}_f \cap \{z = k\}$ est le graphe d'une fonction d'une variable ? Si oui, laquelle ?*
7. *En déduire la représentation graphique de f.*

Solution :

1. – $\mathcal{S}_f \cap \{y = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ y = 1\}$.

   $\mathcal{S}_f \cap \{y = 1\} = \{(x, 1, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + 1^2\}$.

   La projection dans le plan xOz de $\mathcal{S}_f \cap \{y = 1\}$ est :

   $$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x^2 + 1\}$$

   Nous obtenons une parabole de sommet $(0, 1)$.

   – La projection dans le plan xOz de $\mathcal{S}_f \cap \{y = 2\}$ est :

   $$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x^2 + 4\}$$

   Nous obtenons une parabole de sommet $(0, 4)$.

   – La projection dans le plan xOz de $\mathcal{S}_f \cap \{y = k\}$ est :

   $$\{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = x^2 + k^2\}$$

   Nous obtenons une parabole de sommet $(0, k^2)$.

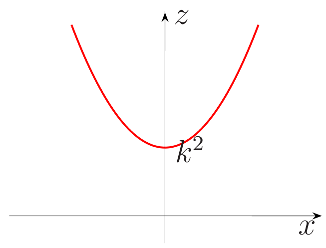


FIGURE 1.4 – Coupe de $\mathcal{S}_f$ par le plan $y = k$.

2. $\mathcal{S}_f \cap \{y = k\}$ est le graphe de la fonction d'une seule variable :

$$\begin{array}{rcl} f_{y=k} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + k^2 \end{array}$$

3. $\mathcal{S}_f \cap \{x = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ x = 0\}.$

   $\mathcal{S}_f \cap \{x = 0\} = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 + y^2\}.$

   La projection dans le plan yOz de $\mathcal{S}_f \cap \{x = 0\}$ est :

   $$\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = y^2\}$$

   Nous obtenons une parabole de sommet $(0, 0)$.

4. $\mathcal{S}_f \cap \{x = 0\}$ est le graphe de la fonction d'une seule variable :

$$\begin{array}{rcl} f_{x=0} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^2 \end{array}$$

5. – $\mathcal{S}_f \cap \{z = 1\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\ z = 1\}.$

   $\mathcal{S}_f \cap \{z = 1\} = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 = x^2 + y^2\}.$

   La projection dans le plan xOy de $\mathcal{S}_f \cap \{z = 1\}$ est :

   $$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 = x^2 + y^2\}$$

   Nous obtenons le cercle de centre O et de rayon 1.

– La projection dans le plan xOy de $\mathcal{S}_f \cap \{z = 2\}$ est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 = x^2 + y^2\}$$

Nous obtenons le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

– La projection dans le plan xOy de $\mathcal{S}_f \cap \{z = 0\}$ est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 = x^2 + y^2\}$$

Nous obtenons le point O (l'origine du repère).

– La projection dans le plan xOy de $\mathcal{S}_f \cap \{z = -1\}$ est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 = x^2 + y^2\}$$

Cet ensemble est vide car la somme de deux carrés est nécesairement positive.

– La projection dans le plan xOy de $\mathcal{S}_f \cap \{z = k\}$ est :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid k = x^2 + y^2\}$$

Comme $k > 0$, nous obtenons le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{k}$.

6. Un cercle ne pas être la représentation graphique d'une fonction d'une seule variable.

7.

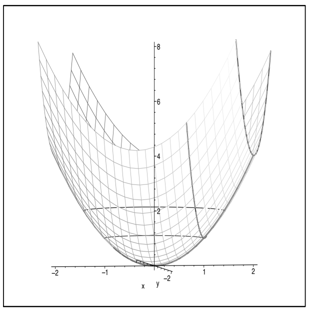


FIGURE 1.5 – Représentation graphique de $z = x^2 + y^2$.

Avant de donner la démarche générale pour obtenir le graphe d'une fonction de deux variables nous allons donner quelques définitions.

Définition 4.

- *L'intersection* $\mathcal{S}_f \cap \{x = x_0\}$ *est la trace de* $\mathcal{S}_f$ *dans le plan* $\{x = x_0\}$.
  Cela représente la tranche verticale de $\mathcal{S}_f$ *avec le plan* $\{x = x_0\}$.

- *L'intersection* $\mathcal{S}_f \cap \{y = y_0\}$ *est la trace de* $\mathcal{S}_f$ *dans le plan* $\{y = y_0\}$.
  Cela représente la tranche verticale de $\mathcal{S}_f$ *avec le plan* $\{y = y_0\}$.

- *L'intersection* $\mathcal{S}_f \cap \{z = z_0\}$ *est la trace de* $\mathcal{S}_f$ *dans le plan* $\{z = z_0\}$.
  Cet ensemble est aussi appelé ligne de niveau $f(x, y) = z_0$*, ou ligne de niveau* $z = z_0$.
  Cela représente la tranche horizontale de $\mathcal{S}_f$ *avec le plan* $\{z = z_0\}$.

Proposition 2.

- $\mathcal{S}_f \cap \{x = x_0\}$ *est le graphe de la fonction d'une seule variable* y *:*

$$f_{x=x_0} : y \longmapsto f(x_0, y).$$

- $\mathcal{S}_f \cap \{y = y_0\}$ *est le graphe de la fonction d'une seule variable* x *:*

$$f_{y=y_0} : x \longmapsto f(x, y_0).$$

Méthode générale

La méthode générale pour obtenir le graphe d'une fonction de deux variables est la suivante :

1. Pour quelques valeurs x_0, tracer la tranche verticale de $\mathcal{S}_f$ avec le plan $\{x = x_0\}$.
2. Pour quelques valeurs y_0, tracer la tranche verticale de $\mathcal{S}_f$ avec le plan $\{y = y_0\}$.
3. "Relier le tout" à l'aide de quelques lignes de niveau.

Remarque :
Lorsque nous avons suffisamment de tranche verticale, l'étape 3 n'est pas nécessaire pour faire apparaître la surface recherchée.

Sujet de méditation :
On considère la fonction de trois variables $f(x, y, z) = x^3 + y^3 - z^3$.
Déterminer la ligne de niveau $f(x, y, z) = 0$.
Dans cette ligne de niveau existe-t-il des triplets $(x, y, z) \in \left(\mathbb{Z}^\star\right)^3$.
Cas général :
On considère la fonction de trois variables $f(x, y, z) = x^n + y^n - z^n$, où $n \geq 3$.
Déterminer la ligne de niveau $f(x, y, z) = 0$.
Dans cette ligne de niveau existe-t-il des triplets $(x, y, z) \in \left(\mathbb{Z}^\star\right)^3$.
Ce problème correspond au dernier "théorème" de Fermat. Pierre de Fermat était un magistrat et mathématicien français du XVII-ème siècle. Il est né à Beaumont de Lomagne. Ce théorème a été démontré trois siècles plus tard en 1994 par Andrew Wiles.

1.3 Exercices du TD

Exercice 1. *Déterminer et représenter le plus grand domaine de définition possible pour les fonctions suivantes :*

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}\,y}{x^2+y^2}$,
2. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$,
3. $f(x,y) = \ln(xy)$,
4. $f(x,y) = x\ln(y^2-x)$,
5. $f(x,y) = \sqrt{4x-x^2+4y-y^2}$

Exercice 2. *Nous allons étudier la fonction $f(x,y) = y - x^2$.*

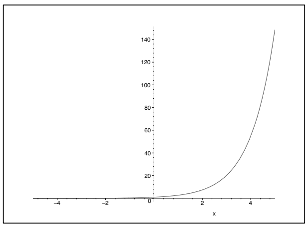
1. *Donner le plus grand domaine de définition possible pour f.*
2. *Calculer $f(1,2)$.*
3. *Tracer les courbes de niveau $z=0$, $z=1$ et $z=2$.*
4. *Tracer l'intersection de $\mathcal{S}_f$ avec le plan d'équation $x=0$.*
5. *Donner une représentation de $\mathcal{S}_f$ dans l'espace.*

Exercice 3. *Soit*

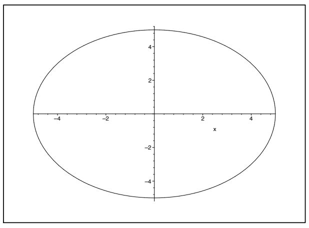
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y + 1 \end{array}$$

1. *Déterminer le graphe de f, puis reconnaître une “figure” de géométrie classique.*
2. *Représenter $\mathcal{S}_f$.*
   Pour cela vous ferez apparaitre dans un même repère :
   - $\mathcal{S}_f \cap xOz$.
   - $\mathcal{S}_f \cap yOz$.
   - $\mathcal{S}_f \cap xOy$.

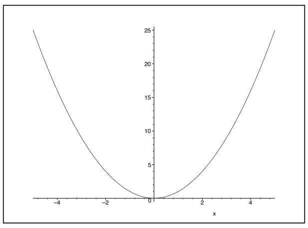
Exercice 4. *La surface $\mathcal{S}_f$ est le graphe de la fonction $f(x,y) = e^{x^2-y}$.
Une des figures ci-dessous représente une courbe de niveau de $\mathcal{S}_f$. Laquelle ?
(Justifier votre choix.)*



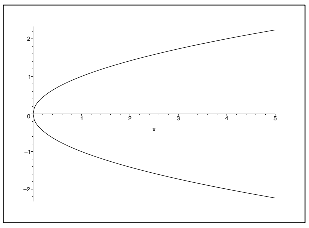
a)



b)



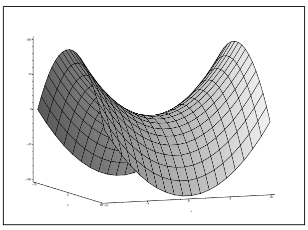
c)



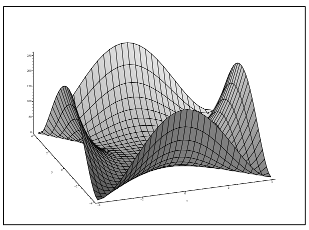
d)

Exercice 5. *Appariez chaque fonction avec un graphique. (Justifier votre choix.)*

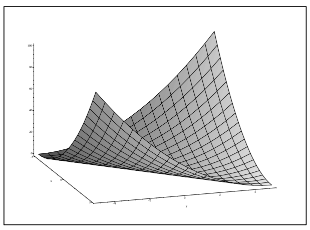
1. $f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$,
2. $g(x,y) = (x-y)^2$,
3. $h(x,y) = (x^2-y^2)^2$.



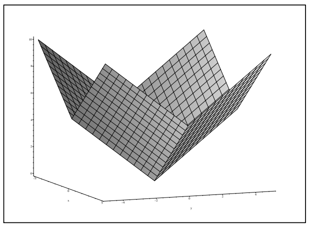
a)



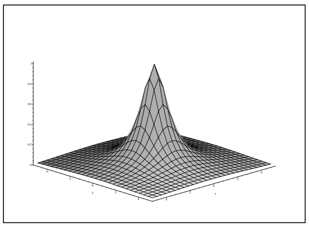
b)



c)



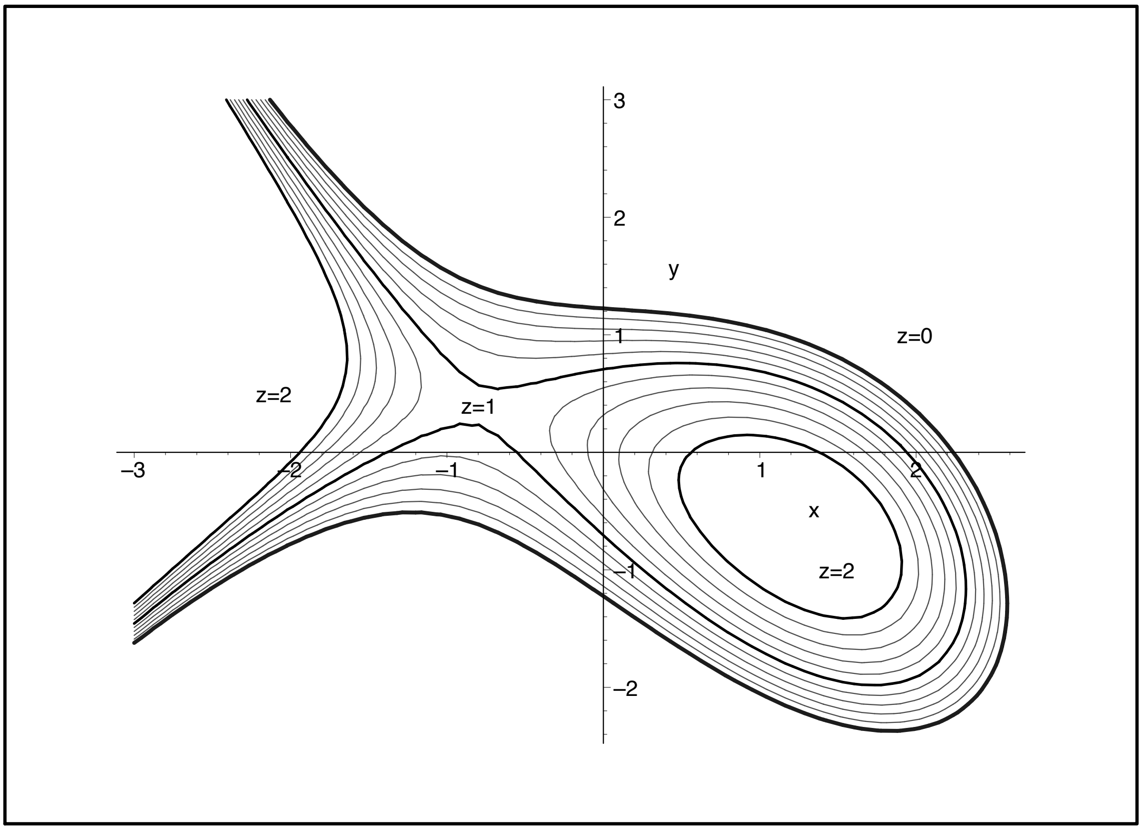
d)



e)

Exercice 6. *La figure suivante représente les lignes de niveaux $z = 0$; $z = 0,2$; $z = 0,4$; ... ; $z = 2$ de la fonction $f(x, y) = -\frac{1}{3}x^3 - xy - y^2 + x + 1,5$.*

1. *A l'aide des lignes de niveau représenter l'allure de la courbe repésentative de la fonction $f_{x=0} : y \longmapsto f(0, y)$.*
2. *Même chose pour la fonction $f_{y=0} : x \longmapsto f(x, 0)$.*
3. *Vérifier vos résultats à l'aide de tableaux de variations.*



1.4 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x}y}{x^2+y^2}$
   Le dénominateur doit être non nul donc on doit avoir $(x;y) \neq (0;0)$.
   x doit être positif pour que $\sqrt{x}$ existe.
   $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, (x;y) \neq (0;0)\}$

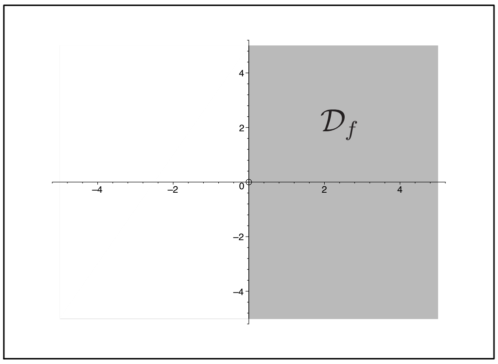


FIGURE 1.6 – Le domaine de définition de f est la partie grisée privée de l'origine.

2. $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$
   Le dénominateur doit être non nul on doit avoir $x \neq 1$.
   Pour que le numérateur existe, nous devons avoir $x+y+1 \geq 0$.
   $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x-1, x \neq 1\}$.

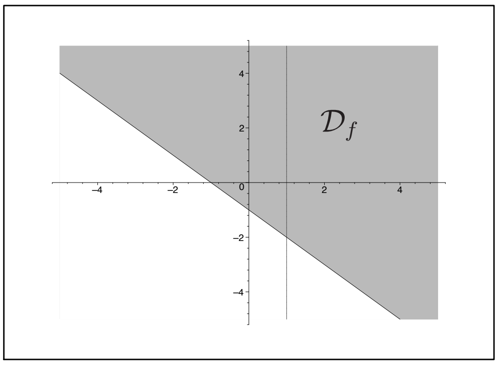


FIGURE 1.7 – Le domaine de définition de f est la partie grisée privée de la droite verticale.

3. On doit avoir $xy > 0$, donc x et y ont le même signe.
   $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 0\}$

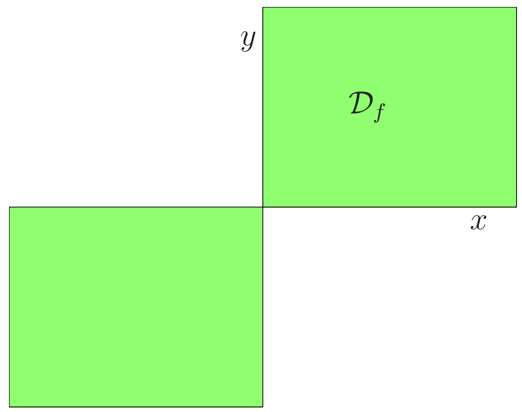


FIGURE 1.8 – Le domaine de définition de f est la partie grisée.

4. $f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$
   On doit avoir $y^2 - x > 0$ pour que $\ln(y^2 - x)$ existe. D'où
   $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 > x\}$

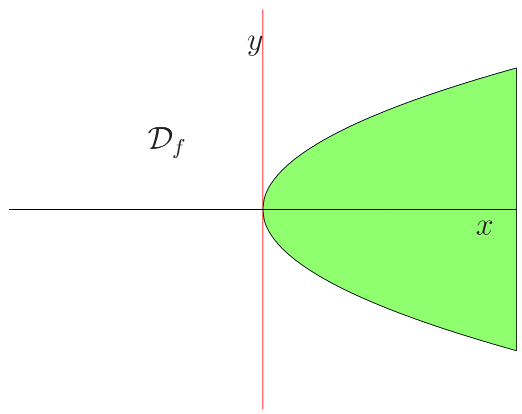


FIGURE 1.9 – Le domaine de définition de f **n'est pas** la partie grisée.

5.

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x - x^2 + 4y - y^2} &= \sqrt{-(x^2 - 4x + y^2 - 4y)} \\
&= \sqrt{-\big((x-2)^2 - 4 + (y-2)^2 - 4\big)} \\
&= \sqrt{8 - (x-2)^2 - (y-2)^2}
\end{aligned}$$

Nous devons avoir $8 \geq (x-2)^2 + (y-2)^2$.
$\mathcal{D}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 8\}$.
Rappel : L'équation du cercle de centre $(a;b)$ et de rayon R est :
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

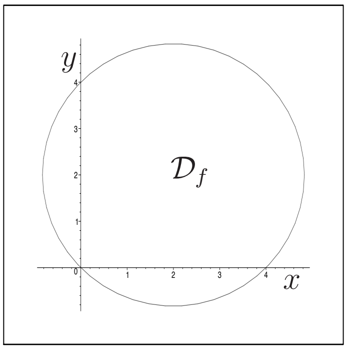


FIGURE 1.10 – Le domaine de définition de f est l'intérieur du disque (bord compris).

Correction de l'exercice 2.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.
2. $f(1;2) = 2 - 1^2 = 1$.
3. $\mathcal{S}_f \cap \{z=0\} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 = y - x^2\} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$

   De même : $\mathcal{S}_f \cap \{z=1\} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2+1\}$
   $\mathcal{S}_f \cap \{z=2\} = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2+2\}$

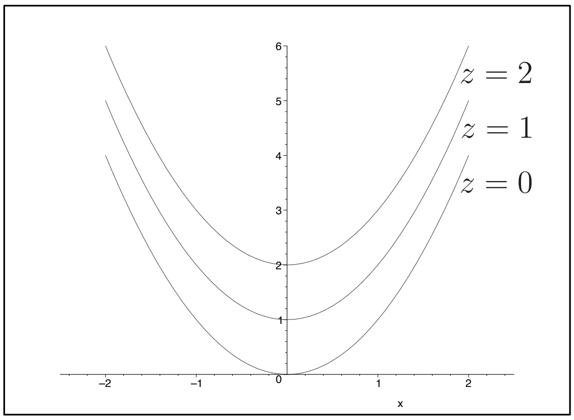


FIGURE 1.11 – Courbes de niveau de f (Vue de dessus).

4.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_f \cap \{x=0\} & = & \{(y;z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = y - 0^2\} \\ & = & \{(y;z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = y\} \end{array}$$

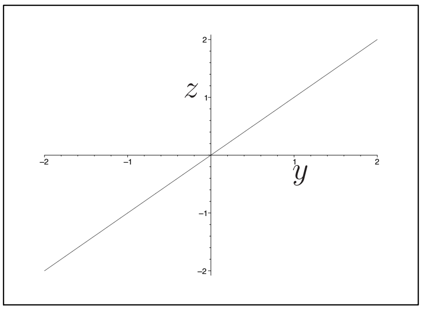


Figure 1.12 – Tranche verticale.

5.

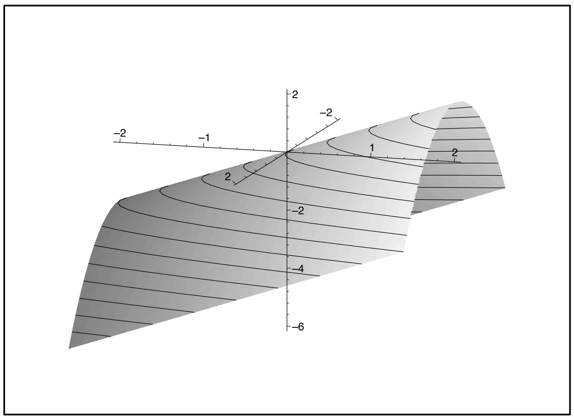


Figure 1.13 – $z = y - x^2$.

Correction de l'exercice 3.

1. $\mathcal{S}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1\}$.

   $\mathcal{S}_f$ représente le plan d'équation $z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1$.

2. – Le plan xOz est le plan d'équation $y = 0$.
   Donc $\mathcal{S}_f \cap xOz$ est la droite d'équation $z = -\frac{1}{2}x + 1$ dans le repère xOz.
   Cette droite passe en particulier par les points A et B de coordonnées respectives $(0, 1)$ et $(2, 0)$ dans le repère xOz.
   Ainsi $\mathcal{S}_f$ passe par les points de l'espace de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(2, 0, 0)$.
   – Le plan yOz est le plan d'équation $x = 0$.
   Donc $\mathcal{S}_f \cap yOz$ est la droite d'équation $z = -\frac{1}{3}y + 1$ dans le repère yOz.
   Cette droite passe en particulier par les points C et D de coordonnées respectives $(0, 1)$ et $(3, 0)$ dans le repère yOz.
   Ainsi $\mathcal{S}_f$ passe par les points de l'espace de coordonnées $(0, 0, 1)$ et $(0, 3, 0)$.
   (On remarque que $A = C$).
   – Le plan xOy est le plan d'équation $z = 0$.
   Donc $\mathcal{S}_f \cap xOy$ est la droite d'équation $0 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1$ dans le repère xOy. Cette équation se réécrit : $y = -\frac{3}{2}x + 3$.
   Cette droite passe en particulier par les points E et F de coordonnées respectives $(0, 3)$ et $(2, 0)$ dans le repère xOy.
   Ainsi $\mathcal{S}_f$ passe par les points de l'espace de coordonnées $(0, 3, 0)$ et $(2, 0, 0)$.
   (On remarque que $B = F$ et $D = E$).

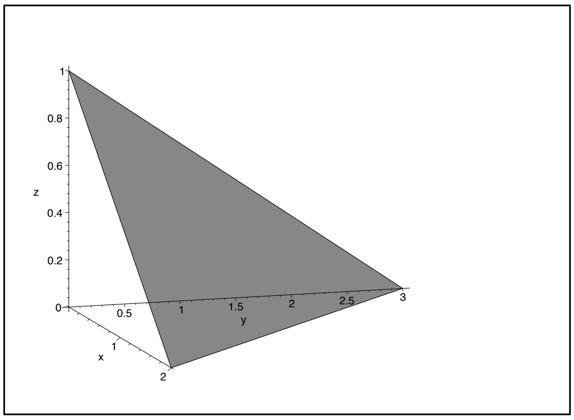


FIGURE 1.14 – Représentation graphique de $z = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1$.

Correction de l'exercice 4. Les courbes de niveaux de f sont du type :

$$\begin{aligned}\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid z_0 = e^{x^2-y}\} &= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ln(z_0) = x^2 - y\} \\ &= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2 - \ln(z_0)\}\end{aligned}$$

Donc les lignes de niveaux de f sont des paraboles.
Conclusion : Réponse c.

Correction de l'exercice 5.

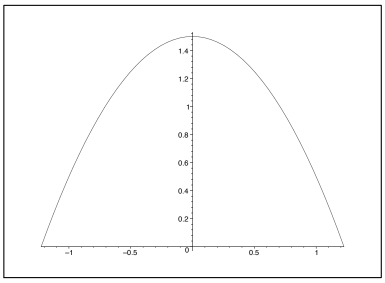
– $\mathcal{S}_f \longleftrightarrow e$.
  En effet le maximum de f est atteint en $(x;y) = (0;0)$. (L'idée est : "Plus le dénominateur d'une fraction est grand plus la fraction est petite". Maintenant nous allons montrer notre assertion pour la fonction f.)
  Si $(x;y) \neq (0;0)$ alors $1 + x^2 + y^2 \geq 1$.
  Donc $\dfrac{1}{1+x^2+y^2} \leq 1 = f(0;0)$
  Ainsi : $f(x;y) \leq f(0;0)$.
– $\mathcal{S}_g \longleftrightarrow c$. En efet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_g \cap \{z=0\} &= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)^2 = 0\} \\
&= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x-y = 0\} \\
&= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}
\end{aligned}$$

– $\mathcal{S}_h \longleftrightarrow b$. En efet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_h \cap \{z=0\} &= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2-y^2)^2 = 0\} \\
&= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2-y^2 = 0\} \\
&= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y)(x+y) = 0\} \\
&= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-y) = 0 \text{ ou } (x+y) = 0\} \\
&= \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\} \cup \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}
\end{aligned}$$

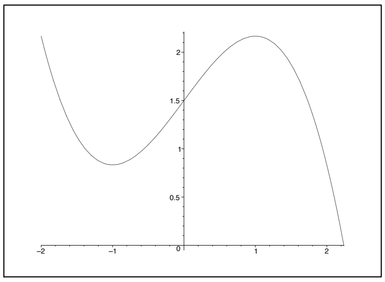
Correction de l'exercice 6.



1.

FIGURE 1.15 – Représentation graphique de $f_{x=0}$.

3. $f_{x=0} : y \longmapsto f(0;y) = -y^2 + 1,5$
   C'est à dire : $f_{x=0}(y) = -y^2 + 1,5$.
   Donc $f'_{x=0}(y) = -2y$.



2.

FIGURE 1.16 – Représentation graphique de $f_{x=0}$.

y	- ∞	0	+ ∞
$f'_{x=0}(y)$	+		-
$f_{x=0}(y)$	$\nearrow$	1,5	$\searrow$

Cela confirme l'allure obtenue à la question 1.

D'autre part, $f_{y=0} : x \longmapsto f(x;0) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x + 1,5$
C'est à dire : $fy = 0(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + x + 1,5$.
Donc $f'_{y=0}(x) = -x^2 + 1 = -(x-1)(x+1)$.

x	- ∞		-1		1		+ ∞
x-1		-		-	0	+	
x+1		-	0	+		+	
$f'_{y=0}(x)$		-	0	+	0	-	
$f_{y=0}(x)$		$\searrow$	5/6	$\nearrow$	13/6	$\searrow$	

Là encore cela confirme le résultat de la question 2.

Chapitre 2

Dérivées partielles, Différentielles

Nous connaissons la dérivation des fonctions d'une seule variable. Ici nous allons voir comment étendre cette notion au cas des fonctions de plusieurs variables. La plupart des énoncés de ce chapitre ne concerneront que les fonctions de deux variables, le cas des fonctions de trois variables ou plus s'en déduit aisément.

2.1 Rappel

Puisque nous allons généraliser la notion de dérivée aux fonctions de deux variables, rappelons tout d'abord quelques définitions et notations pour les fonctions d'une seule variable.

Définition 1. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On dit que f est dérivable en x et de dérivée $f'(x)$ lorsque la limite suivante est finie (c'est à dire la limite existe et ce n'est pas $+\infty$ ou $-\infty$).

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Notation :
Une autre façon d'écrire $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est la suivante :

$$f'(x) = \frac{df}{dx}.$$

Cette notation rappelle que $f'(x)$ est le quotient d'une "petite différence" sur f et d'une "petite différence" sur x, car $h = (x+h) - x$.
On obtient alors :

$$df = f'(x)dx.$$

2.2 Dérivées partielles

Les fonctions $f_{x=x_0}(y)$ et $f_{y=y_0}(x)$ ont été utilisées dans le chapitre précédent afin d'obtenir le graphe d'une fonction de deux variables. L'idée était de se ramener à une situation connue : le graphe d'une fonction à une seule variable.
Ici nous allons procéder de même, nous allons définir la notion de dérivée partielle en nous ramenant aux cas des fonctions à une seule variable.

Exercice 1. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^5 + xy + \pi \end{array}$$

1. *Déterminer* $f_{x=1}(y)$.
2. *Calculer* $f'_{x=1}(y)$ *et* $f'_{x=1}(2)$.
3. *Cas général :*
   - *Déterminer* $f_{x=x_0}(y)$.
   - *Calculer* $f'_{x=x_0}(y)$ *et* $f'_{x=x_0}(2)$.
4. *Déterminer* $f_{y=1}(x)$.
5. *Calculer* $f'_{y=1}(x)$ *et* $f'_{y=1}(2)$.
6. *Cas général :*
   - *Déterminer* $f_{y=y_0}(x)$.
   - *Calculer* $f'_{y=y_0}(x)$ *et* $f'_{y=y_0}(2)$.

Solution :

1. $f_{x=1}(y) = 1^2 + y^5 + 1 \times y + \pi.$
   D'où :

$$\begin{array}{rcl} f_{x=1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^5 + y + \pi + 1 \end{array}$$

2. $f'_{x=1}(y) = 5y^4 + 1,$
   $f'_{x=1}(2) = 5 \times 2^4 + 1 = 81.$

   Remarque :
   Dans un instant nous verrons que nous venons de calculer $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 81.$

3. Cas général :
   - $f_{x=x_0}(y) = x_0^2 + y^5 + x_0 \times y + \pi.$
     D'où :

$$\begin{array}{rcl} f_{x=x_0} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & y^5 + x_0 y + x_0^2 + \pi \end{array}$$

- $f'_{x=x_0}(y) = 5y^4 + x_0$,
  $f'_{x=x_0}(2) = 5 \times 2^4 + x_0 = 80 + x_0$.

4. $f_{y=1}(x) = x^2 + 1^5 + x \times 1 + \pi$.
   D'où :

$$\begin{array}{rcl} f_{y=1} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + x + \pi + 1 \end{array}$$

5. $f'_{y=1}(x) = 2x + 1$,
   $f'_{y=1}(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$.

   Remarque :
   Dans un instant nous verrons que nous venons de calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5$.

6. Cas général :
   - $f_{y=y_0}(x) = x^2 + y_0^5 + x \times y_0 + \pi$.
     D'où :

$$\begin{array}{rcl} f_{y=y_0} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + y_0 x + y_0^5 + \pi \end{array}$$

   - $f'_{y=y_0}(x) = 2x + y_0$,
     $f'_{y=y_0}(2) = 2 \times 2 + y_0 = 4 + y_0$

Définition 2. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

On appelle dérivée partielle de f par rapport à x au point (a,b) la dérivée $f'_{y=b}(a)$.
Cette dérivée partielle se note : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ *ou bien* $\partial_x f(a,b)$.

On appelle dérivée partielle de f par rapport à y au point (a,b) la dérivée $f'_{x=a}(b)$.
Cette dérivée partielle se note : $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ *ou bien* $\partial_y f(a,b)$.

Attention !
$f'_{y=b}(a)$ signifie que y est constant et vaut b, nous dérivons donc par rapport à la variable restante qui est x. Cette notation met en évidence le fait que y reste constant.
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ met en évidence le fait que nous avons dérivé par rapport à x.

Interprétation géomètrique :
Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$.
La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ se comprend géomètriquement de la façon suivante :
Tout d'abord nous considérons la coupe de la surface représentative de f par le plan $y = -2$. Nous obtenons alors une parabole (d'équation $z = x^2 + 4$). C'est la courbe représentative de $f_{y=-2}(x)$.
Ensuite, nous regardons le coefficient directeur de la tangente à cette parabole en $x = 1$. C'est $f'_{y=-2}(1) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1;-2)$. Dans notre cas ce coefficient est égal à 2.

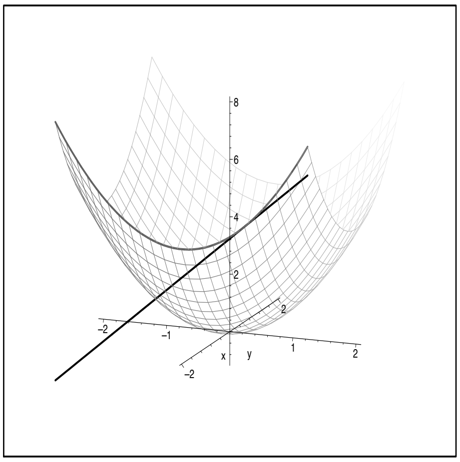


FIGURE 2.1 – Interprétation géomètrique de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ pour $f(x,y) = x^2 + y^2$.

Définition 3. *On note* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *la fonction qui a un couple* (x,y) *associe le nombre* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
De même, on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *la fonction qui a un couple* (x,y) *associe le nombre* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

A l'aide de la notion de dérivée partielle nous pouvons parler de dérivée pour les fonctions de deux variables. (Pour les fonctions de trois variables ou plus le mécanisme est exactement le même.)
Pour les fonctions d'une variable nous pouvons facilement calculer une dérivée seconde : Il suffit de dériver la fonction f'. Que se passe-t-il avec les fonctions de deux variables ?

Définition 4. *Si* $f(x,y)$ *admet des dérivées partielles en tout point* (x,y) *d'un domaine, alors* $\partial f/\partial x$ *et* $\partial f/\partial y$ *sont elles mêmes des fonctions de* x *et de* y.
$\partial f/\partial x$ *et* $\partial f/\partial y$ *peuvent donc aussi avoir des dérivées partielles.*
Ces dérivées secondes se notent :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Exercice 2. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 + y^5 + xy + \pi \end{array}$$

1. *Calculer* $\partial f/\partial x$.
2. *Calculer* $\partial f/\partial y$.
3. *Calculer* $\partial^2 f/\partial x^2$.
4. *Calculer* $\partial^2 f/\partial y^2$.
5. *Calculer* $\partial^2 f/\partial x \partial y$.
6. *Calculer* $\partial^2 f/\partial y \partial x$.

Solution :

1. $\partial f/\partial x = 2x + y.$
2. $\partial f/\partial y = 5y^4 + x.$
3. $\partial^2 f/\partial x^2 = \dfrac{\partial}{\partial x}(2x + y) = 2.$
4. $\partial^2 f/\partial y^2 = \dfrac{\partial}{\partial y}(5y^4 + x) = 20y^3.$
5. $\partial^2 f/\partial x \partial y = \dfrac{\partial}{\partial x}(5y^4 + x) = 1.$
6. $\partial^2 f/\partial y \partial x = \dfrac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 1.$

On remarque que $\partial^2 f/\partial y \partial x = \partial^2 f/\partial x \partial y.$ Ce n'est pas un hasard.

Théorème 1. *Si* $\partial^2 f/\partial y \partial x$ *et* $\partial^2 f/\partial x \partial y$ *sont continues alors* $\partial^2 f/\partial y \partial x = \partial^2 f/\partial x \partial y$. *Autrement dit dans ce cas l'ordre de dérivation est sans importance.*

Pour comprendre ce théorème il nous faut définir la continuité d'une fonction :

Définition 5. *Soit* f *une fonction de deux variables, on dit que* f *est continue en* (x_0, y_0) *lorsque la condition suivante est vérifiée :*

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Cette définition signifie que quelque soit la façon dont nous nous rapprochons de (x_0, y_0) nous devons obtenir la même valeur limite qui est $f(x_0, y_0)$.

2.3 Différentielles

Dans la première section de ce chapitre nous avons vu la notation différentielle. Pour une fonction d'une variable $f(x)$ on a : $df = f'(x)dx$.
Ici une fois de plus nous allons généraliser ce qui a été fait à une variable :

Définition 6. *Soit f une fonction de deux variables (x, y). On note alors la différentielle de f de la manière suivante :*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Evidemment si f est une fonction de trois variables (x, y, z) alors on a :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

Exercice 3. *Calculer la différentielle de $f(x, y, z) = x^2y^3z^7 + x + \sin(z) + \sqrt{2}$.*

Solution :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z^7 + 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z^7.$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 7x^2y^3z^6 + \cos(z).$$

D'où :
$df = \big(2xy^3z^7 + 1\big)dx + \big(3x^2y^2z^7\big)dy + \big(7x^2y^3z^6 + \cos(z)\big)dz.$

2.4 Utilisation des différentielles, différentielle d'une fonction composée

Afin de ne pas donner d'énoncé trop difficile ou pas assez général nous allons voir sur un exemple comment calculer la différentielle d'une fonction composée. La démarche est très simple, il suffit de substituer...

Exercice 4.

1. *Soit $f(u, v) = \sin(u.v)$. Calculer df.*
2. *u, et v désignent à présent des fonctions. On pose :*
   $u(x, y) = x - 7y$, $v(x, y) = x + y$.
   Calculer du, et dv.
3. *On considère, à présent la fonction :*

$$F(x, y) = \sin\big((x - 7y).(x + y)\big).$$

   Calculer dF, puis en déduire $\frac{\partial F}{\partial x}$.

Solution :

1. $\dfrac{\partial f}{\partial u} = v.\cos(u.v),$

   $\dfrac{\partial f}{\partial v} = u.\cos(u.v),$

   On en déduit :

$$df = v.\cos(u.v)du + u.\cos(u.v)dv.$$

2. On a $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 1,$

   $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -7.$

   Il vient alors : $du = dx - 7dy.$
   De même on obtient : $dv = dx + dy.$

3. On remarque que :
   $F(x, y) = f\big(x - 7y, x + y\big) = f\big(u(x, y), v(x, y)\big).$
   C'est à dire, u et v ont été remplacés (substitués) par $x - 7y$, et $x + y$ dans l'expression de f. Autrement dit F est la composée de f avec les fonctions $u(x, y) = x - 7y$, $v(x, y) = x + y.$
   Pour obtenir F nous avons remplacé u et v par leur expression en x et y dans f.
   Donc pour obtenir dF nous allons remplacer u, v, du, et dv par leur expression en x, y, dx, et dy dans df.
   D'où :

$$\begin{aligned} dF &= (x + y)\cos\big((x - 7y).(x + y)\big) \times \big(dx - 7dy\big) \\ &\quad +(x - 7y)\cos\big((x - 7y).(x + y)\big) \times \big(dx + dy\big). \end{aligned}$$

   On développe cette expression, et on obtient :

$$\begin{aligned} dF &= (2x - 6y)\cos\big((x - 7y).(x + y)\big)dx \\ &\quad +(-6x - 14y)\cos\big((x - 7y).(x + y)\big)dy. \end{aligned}$$

   Par définition nous avons $dF = \big(\partial F/\partial x\big)dx + \big(\partial F/\partial y\big)dy.$ En identifiant le coefficient de dx du résultat obtenu et de la définition on obtient :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = (2x - 6y)\cos\big((x - 7y).(x + y)\big)$$

Conclusion :

F était la composée de la fonction f avec les fonctions u et v. Nous avons donc calculer la différentielle dF à l'aide des différentielles df, du, et dv en utilisant le principe de substitution.
Ici, cette méthode nous a permis :

- de réutiliser des calculs simples déjà effectués,

– d'obtenir sans effectuer de nouveaux calculs de dérivées la valeur de $\partial F/\partial x$.

Sujet de méditation : Nous considérons la fonction de deux variables complexes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}^2 & \longmapsto & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & \Big(f_1(x,y);f_2(x,y)\Big) \end{array}$$

où f_1 et f_2 sont des polynômes en x et y.
Un exemple de polynôme en x et en y est : $x^5+3x^4y^7+12xy^2-10y^2+-4y+5$.
C'est à dire : pour obtenir un polynôme en x et y on écrit une formule avec les signes $+$, $-$, $\times$, $\div$, x, y.
Ici contrairement à ce qui a été fait jusqu'à présent nous avons une fonction qui prend deux nombres et qui rend deux nombres (et non pas un seul...).
On suppose de plus que pour tout $(x;y)\in\mathbb{C}^2$ les vecteurs :

$$\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y);\ \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\Big) \text{ et } \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y);\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)\Big)$$

sont non colinéaires. Plus précisément,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y).\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)-\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y).\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)\in\mathbb{C}^\star.$$

Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $g:\mathbb{C}^2\longrightarrow\mathbb{C}^2$ telle que

$$f\circ g(x,y)=g\circ f(x,y)=(x,y).$$

Ce problème s'appelle la conjecture du jacobien.
Ce problème a été posé en 1939, à l'heure actuelle il n'existe pas de preuve de ce résultat.

2.5 Exercices du TD

Exercice 1. *Pour chacune des fonctions suivantes : calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.

1. $f(x,y) = x^2 - 6xy - 6y^2 + 2x + 24y$,
2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \dfrac{x^3}{y}$,
3. $f(x,y) = e^{2x^2+xy+7x+y^2}$,
4. $f(x,y) = \sin(xy)$,
5. $f(x,y) = \ln(x+y)$.

Exercice 2. *On considère la fonction* $f(x,y) = \sqrt{x+5y}$.

1. *Calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. *Donner le plus grand domaine de définition possible pour* f, $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$.

Exercice 3. *Calculer la différentielle de la fonction suivante :* $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy}{y^2}$.

1. *En utilisant la définition d'une différentielle.*
2. *En calculant la différentielle d'une fonction composée. (C'est à dire calculer la différentielle de* $\dfrac{u}{v}$ *(les variables sont* u *et* v*) et appliquer votre résultat à la fonction* f*.)*

Exercice 4. *Soit* $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$. *Calculer* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, *puis* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)$. *Interprétez ces nombres en tant que pente.*

Exercice 5. *On considère la fonction* $f(x,y) = y - x^2$ *(voir exercice 2, page 14).*

1. *Calculer* $f(2,5)$.
2. *Caculer le gradient de* f *au point de coordonnées* $(2,5)$ *:*
   $\nabla f(2,5) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,5), \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,5)\right)$.
3. *Sur votre dessin réprésentant les lignes de niveaux de* f, *placer le vecteur* $\nabla f(2,5)$ *au point de coordonnées* $(2,5)$. *Que remarque-t-on ?*

2.6 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

1. $f(x,y) = x^2 - 6xy - 6y^2 + 2x + 24y$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 6y + 2$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6x - 12y + 24$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6$.

2. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - \dfrac{x^3}{y}$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3\dfrac{x^2}{y}$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y + \dfrac{x^3}{y^2}$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 6\dfrac{x}{y}$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 - 2\dfrac{x^3}{y^3}$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{3x^2}{y^2}$.

3. $f(x,y) = e^{2x^2+xy+7x+y^2}$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (4x + y + 7)f(x,y)$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x + 2y)f(x,y)$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \big(4 + (4x + y + 7)^2\big)f(x,y)$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \big(2 + (x + 2y)^2\big)f(x,y)$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \big(1 + (x + 2y)(4x + y + 7)\big)f(x,y)$.

4. $f(x,y) = \sin(x.y)$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\cos(xy)$.
   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(xy)$.
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\sin(xy)$.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x^2 \sin(xy)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$.

5. $f(x, y) = \ln(x + y)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{x + y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \dfrac{-1}{(x + y)^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

Correction de l'exercice 2. $f(x, y) = \sqrt{x + 5y}$.

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 5y}}$.
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{5}{2\sqrt{x + 5y}}$.
2. $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y \geq 0\}$
$\mathcal{D}_{\frac{\partial f}{\partial x}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 5y > 0\} = \mathcal{D}_{\frac{\partial f}{\partial y}}$

Correction de l'exercice 3.

1. Par définition la différentielle de f est :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

Ici, nous avons : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2x + y}{y^2}$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{x}{y^2}$
D'où : $df = \dfrac{2x + y}{y^2}dx + \Big(-2\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{x}{y^2}\Big)dy$

2. $f(x, y) = \dfrac{u(x, y)}{v(x, y)}$ avec $u(x, y) = x^2 + xy$ et $v(x, y) = y^2$.
On regarde f comme étant une fonction ayant pour variables u et v.
$f = \dfrac{u}{v}$
Cela donne : $df = \dfrac{1}{v}du + \Big(-\dfrac{u}{v^2}\Big)dv$. Nous avons exprimé df en fonctoin de u et de v, mais nous souhaitons avoir df en fonction de x et de y. Nous allons donc remplacer u par $x^2 + xy$ et v par y^2. Pour du et dv nous obtenons alors : $du = (2x + y)dx + xdy$, $dv = 0dx + 2ydy$.
On remplace ces expressions dans la formule trouvée précédemment et on obtient :
$df = \dfrac{1}{y^2} \times \big((2x + y)dx + xdy\big) - \Big(\dfrac{x^2 + xy}{y^4}\Big)2ydy$

$$df = \frac{2x+y}{y^2}dx + \Big(\frac{x}{y^2} - \frac{x^2+xy}{y^4} \times 2y\Big)dy$$
$$df = \frac{2x+y}{y^2}dx + \Big(-\frac{x}{y^2} - 2\frac{x^2}{y^3}\Big)dy$$

Correction de l'exercice 4. $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1;2) = -2$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1;2) = -4$

Soit

$$\begin{array}{rcl} f_{y=2} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 16 - x^2 - 2^2 = -x^2 + 12 \end{array}$$

On a : $f'_{y=2}(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1;2)$ (par définition de $\frac{\partial f}{\partial x}$)
Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1;2) = -2$ est la pente de la courbe représentative de $f_{y=2}$ en $x = 1$.
La courbe représentative de $f_{y=2}$ s'obtient en effectuant une coupe verticale de $\mathcal{S}_f$ par le plan d'équation $y = 2$.

De même $\frac{\partial f}{\partial y}(1;2) = -4$ est la pente de la courbe représentative de $f_{x=1}$ en $y = 2$. Cette courbe s'obtient en effectuant une coupe verticale de $\mathcal{S}_f$ par le plan d'équation $x = 1$.

Correction de l'exercice 5. $f(x,y) = y - x^2$

1. $f(2;5) = 5 - 2^2 = 1$.
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$
   $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$
   Donc $\nabla f(2;5) = (-4;1)$.
3. Le gradient est orthogonal aux lignes de niveaux. De plus celui-ci est orienté dans le sens des lignes de niveaux croissantes.
   Autrement dit, si on se déplace sur une montagne dont les lignes de niveaux sont données par $z = f(x,y)$ alors le gradient donne la direction et le sens de la marche pour lequel on se fatiguera le plus...
   Remarque : La même direction en sens inverse nous permettra de nous fatiguer le moins possible !

Chapitre 3

Approximation affine, Calcul d'incertitude

3.1 Approximation d'une fonction à une seule variable

Une fois de plus nous commençons un chapitre en rappelant la définition de la dérivée d'une fonction en une seule variable.

Définition 1. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On dit que f est dérivable en x et de dérivée $f'(x)$ lorsque la limite suivante est finie (c'est à dire la limite existe et ce n'est pas $+\infty$ ou $-\infty$).

$$f'(x) = \lim_{\delta_x \to 0} \frac{f(x+\delta_x) - f(x)}{\delta_x}.$$

Remarque :
Traditionnellement lorsque l'on définit la dérivée d'une fonction d'un point de vue théorique le petit nombre qui tend vers 0 se note h. Lorsque l'on effectue un calcul d'erreur, on utilise comme notation δ_x à la place de h...

Puisque nous avons une égalité lorsque δ_x tend vers 0 nous en déduisons l'approximation suivante :

Proposition 1.

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\delta_x) - f(x)}{\delta_x}$$

Exercice 1. *A l'aide du tableau de valeurs suivant donner une approximation de $f'(2)$.*

x	*1*	*2*	*2,4*	*3*
$f(x)$	*10*	*13*	*13,6*	*20*

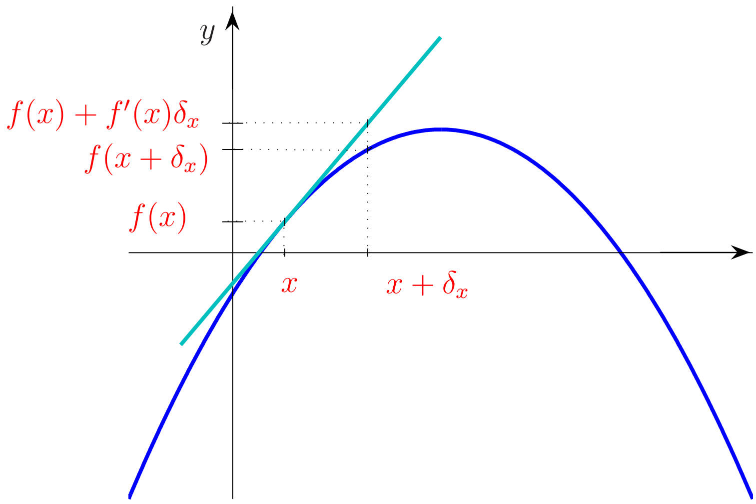
Solution :
On applique la formule précédente avec $x = 2$ et $\delta_x = 0,4$. On obtient :
$f'(2) \approx \dfrac{f(2,4) - f(2)}{0,4} = \dfrac{0,6}{0,4} = 1,5$. D'où $f'(2) \approx 1,5$.

Puisque $f'(x) \approx \big(f(x+\delta_x) - f(x)\big)/\delta_x$, on a $f'(x)\delta_x \approx f(x+\delta_x) - f(x)$ et donc une autre façon d'écrire l'approximation précédente est la suivante :

Proposition 2 (Approximation affine d'une fonction d'une variable)**.**

$$f(x+\delta_x) \approx f(x) + f'(x)\delta_x.$$

Interprétation graphique :



$\mathcal{T}$ est la tangente de f en x. Avec nos notations $f(x) + f'(x)\delta_x$ représente l'ordonnée du point de $\mathcal{T}$ d'abscisse $x + \delta_x$.
Il est donc naturel de dire que $f(x+\delta_x)$ et $f(x) + f'(x)\delta_x$ sont très proches.

Exercice 2. *Sans calculatrice donner une valeur approchée de* $\sqrt{1,01}$.

Solution :
On considère la fonction f suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Nous cherchons donc une approximation de $f(1,01)$.
On pose : $x = 1$, $\delta_x = 0,01$.
On obtient : $\sqrt{1,01} = f(1,01) \approx f(1) + f'(1) \times 0,01$.
On a : $f(1) = 1$
$f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$, donc $f'(1) = 1/2$.
D'où : $\sqrt{1,01} \approx 1 + 1/2 \times 0,01 = 1,005$.
Conclusion : $\sqrt{1,01} \approx 1,005$.
Remarque : La valeur exacte de $\sqrt{1,01}$ est $1,00498\ldots$

3.2 Approximation d'une fonction de plusieurs variables

Les idées précédentes peuvent s'appliquer aussi aux dérivées partielles. En effet, nous avons vu qu'une dérivée partielle n'est rien d'autre que la dérivée d'une fonction à une seule variable. Voyons cela sur un exemple.

Exercice 3. *La hauteur des vagues h en haute mer dépend principalement de la force du vent v et du temps t pendant lequel il souffle à cette vitesse.*
Des valeurs de la fonction $h = f(v,t)$ sont rassemblées dans la table suivante :

v \ t	5	10	15	20	25	30	40
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	6	6	6
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19

Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial t}(15,20)$.

Solution : $\dfrac{\partial f}{\partial t}(15,20)$ est la dérivée de la fonction $f_{v=15}(t)$ lorsque $t = 20$. Les valeurs de cette fonction se lisent dans la troisième ligne du tableau.
Nous allons donc appliquer la Proposition 1 du cours à la fonction $f_{v=15}(t)$ en $t = 20$ avec $\delta_t = 5$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t}(15,20) = f'_{v=15}(20) &\approx \frac{f_{v=15}(25) - f_{v=15}(20)}{5} = \frac{f(15,25) - f(15,20)}{5} \\
&\approx \frac{6-5}{5} \\
&\approx 0,2.
\end{aligned}$$

Sur l'exemple précédent nous avons ramené le problème à l'étude d'une fonction en une seule variable. Nous nous sommes ramenés au cas où seul t "bougeait", v

restant constant. Cependant une telle démarche ne permet pas de régler tous les problèmes. Nous allons donc généraliser la formule $f(x+\delta_x) \approx f(x) + f'(x)\delta_x$.

Proposition 3 (Approximation affine d'une fonction de deux variables)**.**
Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables. Nous avons l'approximation suivante :

$$f(x+\delta_x, y+\delta_y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\delta_y.$$

Lorsque δ_x et δ_y deviennent de plus en plus petit, l'approximation devient meilleure.

Exercice 4. *Soit $f(x,y) = 3x^2 - xy - y^2$. Calculer sans calculatrice une valeur approchée de $f(1,01; 2,98)$.*

Solution : Nous allons utiliser la proposition 3 avec $x = 1$, $\delta x = 0,01$, $y = 3$ et $\delta_y = -0,02$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - y$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,3) = 3$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x - 2y$, donc $\frac{\partial f}{\partial y}(1,3) = -7$.

On obtient alors :

$$\begin{aligned} f(1,01; 2,98) &\approx f(1;3) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,3) \times 0,01 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,3) \times (-0,02) \\ &\approx -9 + 3 \times 0,01 - 7 \times (-0,02) \\ &\approx -8,87 \end{aligned}$$

Remarque : La valeur exacte de $f(1,01; 2,98)$ est -8,8299.

3.3 Calcul d'erreur

3.3.1 Le cas des fonctions d'une seule variable

Lorsque nous faisons des mesures nous effectuons des erreurs dues à la précision des outils dont nous disposons. Il faut donc faire une distinction entre valeur exacte (théorique) et valeur approchée (obtenue par la pratique).
Par exemple, supposons que nous mesurons le côté d'un carré.
On obtient par une mesure 9,98 mètres et nous savons que nos appareils de mesure donne une précision à 0,05 mètres prés.
Cependant la mesure exacte est de 10 mètres.
Il existe donc une différence entre valeur mesurée et valeur exacte. Dans notre cas, cette erreur est de 0,02 mètres.

Définition 2. *D'une manière générale, on notera x la valeur mesurée, δ_x l'erreur de mesure et Δ_x la précision de l'appareil de mesure.*
Ainsi, la valeur exacte est $x + \delta_x$.
De plus $|\delta_x| \leq \Delta_x$.

Dans notre cas nous avons donc $x = 9,98$ et $\delta_x = -0,02$ et $\Delta_x = 0,05$.

En pratique, seul x et Δ_x sont connus ! ! !
Nous remarquons qu'en pratique nous ne connaissons pas δ_x.
(Si on connait une mesure et l'erreur de cette mesure alors on connait la valeur exacte...)

A présent, nous voulons évaluer la surface du carré. Comme en pratique la valeur exacte $x + \delta_x$ nous est inconnue la seule chose que nous pouvons faire c'est utiliser x la valeur mesurée. Comme notre mesure nous à donner une longueur de 1,98 mètres, on calcule $f(9,98)$, où $f(l) = l^2$
On a $f(9,98) = 99,6004$.
Cette valeur ne correspond pas à la surface exacte du carré car nous avons utilisé pour les calculs une valeur approchée.
Peut-on faire mieux en pratique ?
Non !
En effet, en pratique nous ne connaissons pas la mesure exacte du côté !
La seule chose que nous pouvons faire c'est estimer l'erreur commise en prenant une valeur approchée. Cette erreur est $f(x) - f(x + \delta_x)$.

Nous connaissons l'approximation suivante :

$$f(x + \delta_x) \approx f(x) + f'(x)\delta_x.$$

Cela donne :

$$f(x + \delta_x) - f(x) \approx f'(x)\delta_x.$$

Nous ne connaissons qu'une majoration de $|\delta_x|$ qui est $\Delta_x = 0,05$.

Cela donne :

$$|f(x + \delta_x) - f(x)| \approx |f'(x)|\Delta_x.$$

Dans notre cas $x = 9,98$ et $\Delta_x = 0,05$. Comme $f'(x) = 2.x$, on obtient $f'(9,98) = 19,96$, il vient alors :

$$|f(x + \delta_x) - f(x)| \approx 19,96 \times 0,05 = 0,998\ldots$$

L'erreur commise est donc d'environ 0,998 m^2.
Cela signifie que dans notre cas, les chiffres donnés après la virgule dans le calcul de $f(9,98)$ n'ont aucune signification pour l'estimation de la surface mesurée.

Afin d'alléger l'écriture, nous allons introduire une notation.

Définition 3. *L'erreur* $|f(x+\delta_x)-f(x)|$ *se note* δ_f. *Cette erreur s'appelle aussi erreur absolue.*

En résumé nous avons montré :

Proposition 4. *On note* $\Delta_f = |f'(x)|\Delta_x$.
Δ_f *est l'ordre de grandeur de l'erreur absolue.*
Avec les notations précédentes nous avons :

$$|\delta_f| \approx |f'(x)|\Delta_x = \Delta_f.$$

L'erreur relative

Dans ce qui précède nous avons étudié l'erreur Δ_f. Nous avons vu que cette erreur était d'environ 1 m^2. A-t-on obtenu une bonne approximation ?
En effet, il existe une différence sensible entre un erreur de $1m^2$ sur une surface de 1 000 m^2 et sur une surface de $2m^2$...
Pour savoir si une erreur est grande ou pas, on regarde quelle proportion, quel pourcentage elle représente par rapport à $f(x)$.

Définition 4. *On appelle erreur relative le quotient :* $\dfrac{\Delta_f}{|f(x)|}$.
Ce nombre s'exprime en %.

Dans l'exemple précédent l'erreur relative est :
$\dfrac{\Delta_f}{|f(x)|} \approx 0,998/99,6004 \approx 0,01 = 1\%.$

Remarque :
Calculer l'erreur relative revient à calculer $\dfrac{|f'(x)|}{|f(x)|}\Delta_x$.
Nous pouvons donc calculer l'erreur relative à partir d'un calcul de dérivée logarithmique.
En effet $\dfrac{|f'(x)|}{|f(x)|} = |\Big(\ln\big(f(x)\big)\Big)'|$.

3.3.2 Le cas des fonctions de plusieurs variables

Comme d'habitude nous allons généraliser ce que nous venons de voir pour les fonctions d'une seule variable.
Concrètement pour passer de la différentielle df à l'erreur Δ_f, nous avons :
- pris la valeur absolue de chaque terme,
- remplacer le signe = par le signe ≈.

Nous allons faire la même chose pour les fonctions de plusieurs variables.

Proposition 5. *Soient* x *et* y *deux mesures,* δ_x *et* δ_y *les erreurs de mesure et* Δ_x, Δ_y *la précision des appareils qui ont mesuré* x *et* y.

Nous pouvons estimer l'erreur absolue $\delta_f = |f(x+\delta_x, y+\delta_y) - f(x,y)|$ *de la manière suivante :*

$$|\delta_f| \approx \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\Delta_y.$$

On note $\Delta_f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\Delta_y.$
Δ_f *représente l'ordre de grandeur de l'erreur absolue.*

On peut définir de même l'erreur relative :

Définition 5. *On appelle erreur relative le quotient :* $\dfrac{\Delta_f}{|f(x,y)|}$.
Ce nombre s'exprime en %.

Remarque :
Calculer l'erreur relative revient à calculer :

$$\frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|\Delta_x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\Delta_y}{|f(x,y)|}.$$

Nous remarquons qu'ici aussi nous pouvons obtenir l'erreur relative en utilisant la dérivée d'un logarithme. En effet,

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{f(x,y)} \text{ est la dérivée partielle de } \ln(f) \text{ par rapport à } x.$$

Nous avons la même chose pour la dérivée par rapport à y.

Ainsi, calculer l'erreur relative revient à calculer la différentielle de $\ln(f)$.

Exercice 5. *On mesure une longueur* l *en mètres et on obtient* $l = 50 \pm 0,1$ *mètres. Cela signifie que la longueur mesurée est de 50 mètres et que la précision de la mesure est de 0,1 mètre.*
Un coureur parcourt cette distance en $t = 5,8 \pm 0,01$ *secondes.*
(Le temps mesuré est de 5,8 secondes et la précision de cette mesure est de 0,01 secondes.)

1. *Calculer la vitesse moyenne du coureur sur ce parcours.*
2. *Donner une estimation de l'erreur absolue commise à partir de ces mesures.*
3. *Caculer l'erreur relative commise à partir de ces mesures.*

Solution :

1. $v = \dfrac{l}{t} = \dfrac{50}{5,8} = 8,6206\ldots.$

2. $v(l,t) = \frac{l}{t}$. D'où
$$dv = \frac{1}{t}dl - \frac{l}{t^2}dt.$$
Ainsi
$$\Delta v = \left|\frac{1}{t}\right|\Delta_l + \left|-\frac{l}{t^2}\right|\Delta_t = \frac{1}{5,8} \times 0,1 + \frac{50}{5,8^2} \times 0,01 = 0,0321\ldots.$$
L'erreur absolue est donc d'environ $0,03\, m.s^{-1}$.

Remarque :
Pratiquement le chiffre des millièmes n'a donc aucun sens dans l'écriture $v = 8,6206$ puisque que le résultat est connu à 0,03 près.

3. L'erreur relative est :
$$\frac{\Delta_v}{|v|} = \frac{0,03}{8,62} = 0,003\ldots$$
L'erreur relative est donc de $0,3\%$.

Sujet de méditation : Nous avons vu que pour δ_x et δ_y très petit nous avons :
$$f(x+\delta_x, y+\delta_y) \approx f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\delta_y$$
En fait, il existe une version "exacte" de ce principe d'approximation affine. C'est la formule de Taylor-Lagrange :

Théorème 1. *Si $f(x,y)$ admet des dérivées partielles d'ordre 1, continue dans un domaine fermé et si les dérivées partielles d'ordre 2 existent dans le domaine ouvert, alors*
$$f(x+\delta_x, y+\delta_y) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\delta_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\delta_y + R_2.$$
R_2 désigne le reste d'ordre 2, (c'est l'erreur commise lors de l'approximation) et on a :
$$R_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\theta\delta_x, y+\theta\delta_y)\delta_x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x+\theta\delta_x, y+\theta\delta_y)\delta_x\delta_y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x+\theta\delta_x, y+\theta\delta_y)\delta_y^2,$$
où $0 < \theta < 1$.

Pouvez vous démontrer ce théorème ?

3.4 Exercices du TD

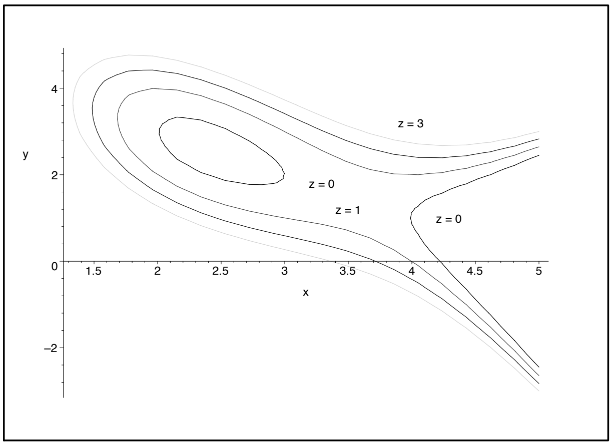
Exercice 1. *Sans calculatrice, donner une valeur approchée de :* $\sqrt{9,004}$; $\ln(1,001)$; $1,01^{1,01}$.

Exercice 2.
1. *On considère la fonction* $f(x) = 100x^3 - 300x^2 + 299x - 99$.
   Calculer l'ordre de grandeur de l'erreur absolue Δ_f *lorsque* $x = 1 \pm 0,1$.
2. *On considère la fonction* $f(x) = \sqrt{x}$.
   Calculer l'ordre de grandeur de l'erreur absolue Δ_f *lorsque* $x = 1 \pm 10^{-50}$.

Exercice 3. *On considère un cercle de rayon* R. *On note* S *l'aire du disque ainsi délimité. On a* $R = 10,0 \pm 0,1$ *m.*
Calculer l'ordre de grandeur de l'erreur absolue et l'erreur relative commise sur S.

Exercice 4. *Donner une approximation de* $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ *en* $(x; y) = (6,9;\ 2,06)$.

Exercice 5. *Voici un diagramme de courbe de niveau d'une fonction* f. *Nous avons tracé les lignes de niveau pour* $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$ *et* $z = 3$. *D'après cette figure, estimer* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(4, 0)$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3, 3)$.



Exercice 6. *Un sac contient* $1,1 \pm 0,03$ *kg de bonbons. Pour estimer le nombre de bonbons présents dans le sac, on pèse un bonbon au hasard et on obtient* 15 ± 2 *g. On suppose que tous les bonbons sont identiques. Calculer le nombre total de bonbons avec l'incertitude absolue et relative.*

Exercice 7. *Vous mesurez les coordonnées (x, y) d'un point à l'aide d'un double décimètre. On a donc $\Delta_x = 0,1cm$ et $\Delta_y = 0,1cm$.*
Vous obtenez $x = 3cm$ et $y = 4cm$.
A partir de ces mesures vous devez calculer la distance de ce point à l'origine.

1. *Donner une estimation de l'erreur absolue commise.*
2. *Quelle est l'erreur relative commise ?*

Exercice 8. *On mesure un cube de béton. La mesure d'un côté est $l = 10cm$ et la masse $m = 2,2kg$. Nos appareils de mesure nous indiquent $\Delta l = 0,1cm$ et $m = 0,1kg$.*

1. *Calculer la masse volumique de ce béton en $kg.m^{-3}$.*
2. *Calculer une estimation de l'erreur absolue commise avec ces mesures.*
3. *Calculer une estimation de l'erreur relative commise avec ces mesures.*

Exercice 9. *On mesure un pavé en béton. Les mesures des côtés sont $l = 10cm$, $L = 20cm$, $h = 5cm$ et la masse $m = 2,2kg$. Nos appareils de mesure nous indiquent $\Delta l = 0,1cm$, $\Delta L = 0,1cm \Delta h = 0,1cm$ et $\Delta m = 0,1kg$.*
Calculer une estimation de l'erreur relative commise sur la masse volumique à partir de ces mesures.

Exercice 10. *On considère la fonction suivante : $\rho = \dfrac{m_1 - m}{m_2 - m}$.*

1. *Calculer $\dfrac{d\rho}{\rho}$.*
2. *On a $m = 10,0 \pm 0,1$, $m_1 = 90,0 \pm 0,1$, $m_2 = 20,0 \pm 0,1$. Calculer l'erreur relative $\Delta_\rho / |\rho|$.*

Exercice 11. *Méthode de Newton.*
Dans cet exercice nous allons donner un procédé permettant de calculer de manière approchée des racines carrées. Commencons avec un cas particulier $\sqrt{3}$.
Soit $f(x) = x^2 - 3$. Notons $\sqrt{3} = 3 + h_1$. h_1 est donc l'erreur commise lorsque l'on approche $\sqrt{3}$ par 3. Nous allons essayer d'obtenir une valeur approchée de h_1.
En effectuant l'approximation affine de cette fonction nous obtenons :

$$f(\sqrt{3}) = f(3 + h_1) \approx f(3) + f'(3)h_1.$$

1. *Quelle valeur peut on donner à h_1 ? (Il s'agit de valeur approchée.)*
2. *A l'aide de la valeur obtenue précédemment calculer $u_1 = 3 + h_1$.*
3. *On note $\sqrt{3} = u_1 + h_2$. Quelle valeur peut on donner à h_2 ? (Effectuer le même travail qu'en 1.)*

4. *A l'aide la valeur obtenue précédemment calculer* $u_2 = u_1 + h_2$.
5. *De même calculer* u_3.
6. *Comparer* u_3 *avec la valeur de* $\sqrt{3}$ *donnée par la calculatrice.*
7. *Proposer une méthode pour calculer* $\sqrt{a}$, *lorsque* $a > 0$.

3.5 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

- $\sqrt{9,004}$
  $f(x) = \sqrt{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$\begin{aligned} f(9+0,004) &\approx f(9) + f'(9) \times 0,004 \\ &\approx 3 + \frac{1}{2\times 3} \times 0,004 \\ &\approx 3 + \frac{4\times 10^{-3}}{2\times 3} \approx 3 + \frac{2\times 10^{-3}}{3} \\ &\approx 3 + 0,666\cdots \times 10^{-3} \\ &\approx 3,000666\ldots \end{aligned}$$

- $\ln(1,001)$
  $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f(1+0,001) &\approx f'(1) \times 0,001 \\ &\approx 0 + \frac{1}{1} \times 0,001 \\ &\approx 0,001 \end{aligned}$$

- $1,01^{1,01}$
  $f(x) = x^x = e^{x\ln(x)}$, $f'(x) = \Big(\ln(x) + x \times \dfrac{1}{x}\Big)e^{x\ln(x)} = \big(\ln(x)+1\big)e^{x\ln(x)}$.

$$\begin{aligned} f(1+0,01) &\approx f(1) + f'(1) \times 0,01 \\ &\approx 1 + \big(\ln(1)+1\big)e^{1\ln(1)} \times 0,01 \\ &\approx 1,01 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 2.

1. Nous avons $\Delta_x = 0,1$, et $f'(x) = 300x^2 - 600x + 299$.
   Donc $\Delta_f = |f'(1)|.0,1 = |300 - 600 + 299|.0,1 = 0,1$.
   Remarque : $\Delta_f \neq |f(1,1) - f(1)|$.
2. Ici $\Delta_x = 10^{-50}$, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Donc $\Delta_f = \dfrac{1}{2\sqrt{1}}.10^{-50} = \dfrac{10^{-50}}{2}$.
   Remarque :
   Une erreur courante consiste à dire $\Delta_f = |\sqrt{1+10^{-50}} - \sqrt{1}|$ et d'effectuer le calcul à la calculatrice. Dans ce cas la calculatrice rendra la valeur 0…

Correction de l'exercice 3. $S(R) = \pi R^2$, $S'(R) = 2\pi R$.
$\Delta_S = 2\pi \times 10 \times 0,1 = 2\pi$.
$\left|\frac{\Delta_S}{S}\right| = \frac{2\pi}{\pi \times 10^2} = \frac{2}{100} = 2\%$.

Correction de l'exercice 4. $f(x, y) = \ln(x - 3y)$, $(x; y) = (6,9\,;\,2,06)$
Pour calculer une approximation nous allons avoir besoin de connaitre les dérivées partielles de f.
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{x - 3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-3}{x - 3y}$.
A présent calculons l'approximation demandée :

$$
\begin{aligned}
f(6,9\,;\,2,06) &= f(7 - 0,1\,;\,2 + 0,06) \\
&\approx f(7;2) + \frac{\partial f}{\partial x}(7;2) \times (-0,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(7;2) \times 0,06 \\
&\approx \ln(7-6) + \frac{1}{1} \times (-0,1) - \frac{3}{1} \times (0,06) \\
&\approx -0,1 - 0,18 \\
&\approx -0,28
\end{aligned}
$$

Correction de l'exercice 5.
$\frac{\partial f}{\partial x}(4;0)$ est par définition la dérivée $f'_{y=0}(4)$. Or nous avons vu :

$$f'_{y=0}(4) \approx \frac{f_{y=0}(4 + \delta_x) - f_{y=0}(4)}{\delta_x}$$

Dans notre situation cela donne : $\frac{\partial f}{\partial x}(4;0) \approx \frac{f(4,2;0) - f(4;0)}{0,2} \approx \frac{0-1}{0,2} \approx -5$.
La valeur $\delta_x = 0,2$ a été prise de telle sorte à pouvoir lire la valeur de $f(4 + \delta_x, 0)$ sur le dessin.
Pour la dérivée partielle en y un raisonnement identique nous donne :
$\frac{\partial f}{\partial y}(3;3) \approx \frac{f(3;3,6) - f(3;3)}{0,6} \approx \frac{2-1}{0,6} \approx 1,666$.

Correction de l'exercice 6. Dans la situation du problème la fonction correspondante est : $f(x, y) = \frac{x}{y}$ avec $y = 15 \pm 2$ et $x = 1100 \pm 30$.
$f(1100; 15) = 73,3$. Donc il y a environ 73 bonbons.

$$df = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

D'où : $\Delta_f = \left|\frac{1}{y}\right|\Delta_x + \left|\frac{-x}{y^2}\right|\Delta_y = \frac{1}{15} \times 30 + \frac{1100}{15^2} \times 2 = 11,77$
L'erreur absolue est donc d'environ 11 bonbons.

$\left|\dfrac{\Delta_f}{f(1100,15)}\right| = 0,16\cdots \approx 16\%.$
L'erreur relative est donc de 16%.

Correction de l'exercice 7.

1. Dans la situation du problème la fonction correspondante est : $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ avec $x = 3 \pm 0,1$ et $y = 4 \pm 0,1$.

$$df = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}dx + \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}dy$$

D'où : $\Delta_f = \dfrac{2\times 3}{2\times 5} \times 0,1 + \dfrac{2\times 4}{2\times 5} \times 0,1 = \dfrac{14}{10} \times 0,1 = 0,14$

2. $\left|\dfrac{\Delta_f}{f}\right| = \dfrac{0,14}{5} = \dfrac{0,28}{10} = \dfrac{2,8}{100} = 2,8\%.$

Correction de l'exercice 8.

1. Ramenons la mesure en mètre. Nous avons $l = 0,1$ mètre.
La masse volumique ρ est donnée par $\rho = \dfrac{m}{l^3}$.
Nous obtenons ici $\rho = \dfrac{2,2}{0,1^3} = \dfrac{2,2}{10^{-3}} = 2,2.10^3 = 2200$.
Ainsi, la masse volumique de ce béton est de $2200 kg.m^{-3}$.
2. Tout d'abord exprimons Δl en mètre, nous avons $\Delta l = 0,001m$.
Nous sommes en train d'étudier la fonction

$$\rho(m,l) = \frac{m}{l^3}$$

et nous voulons calculer l'ordre de grandeur de l'erreur absolue $\Delta\rho$. Nous avons

$$d\rho = \frac{1}{l^3}dm - 3\frac{m}{l^4}dl.$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \left|\frac{1}{0,1^3}\right|.0,1 + 3\left|\frac{2,2}{0,1^4}\right|.0,001\\ &= \frac{1}{10^{-3}}.10^{-1} + 3\frac{2,2}{10^{-4}}.10^{-3}\\ &= 10^2 + 6,6.10 = 166.\end{aligned}$$

L'ordre de grandeur de l'erreur absolue $\Delta\rho$ est donc de $166 kg.m^{-3}$.

3. Nous devons calculer $\frac{\Delta\rho}{\rho}$. A l'aide des résultats précédents nous obtenons :
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{166}{2000} = \frac{2.83}{2.10^2} = \frac{83}{100} = 0,083.$$
L'erreur relative commise est donc d'environ $8,3\%$.

Deuxième méthode :
Si nous souhaitons calculer directement l'estimation de l'erreur relative alors nous devons calculer $\frac{d\rho}{\rho}$. Cela revient à calculer la différentielle de $\ln(\rho)$. Or,
$$\ln(\rho) = \ln m - 3\ln(l).$$
On en déduit :
$$\frac{d\rho}{\rho} = d\big(\ln(\rho)\big) = \frac{1}{m}dm - 3\frac{1}{l}dl,$$
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{1}{m}\right|\Delta m + 3\left|\frac{1}{l}\right|\Delta l.$$
Cela donne :
$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{1}{m}\right|.\Delta m + 3\left|\frac{1}{l}\right|.\Delta l = \left|\frac{1}{2,2}\right|.0,1 + 3\left|\frac{1}{0,1}\right|.0,001 = 0,04545454\ldots + 0,03 = 0,0754\ldots.$$
Ici nous obtenons comme erreur relative $7,5\%$. Nous retrouvons bien l'ordre de grandeur du résultat précédent.

Les deux méthodes ne donnent pas exactement le même résultat. Ce n'est pas une erreur. Dans le premier cas nous estimons l'erreur relative en regardant la formule de Taylor (voir TP du S1) sur f que nous divisons ensuite par $f(x)$. Dans le deuxième cas nous utilisons la formule de Taylor sur $\ln(f)$. L'estimation des erreurs relatives est donc différentes selon la méthode utilisée car les restes dans ces deux formules de Taylor sont différents. Ce que nous pouvons toutefois certifié, c'est le fait que l'ordre de grandeur est le même.

Correction de l'exercice 9. Dans cet exercice nous voulons simplement connaitre l'ordre de grandeur de l'erreur relative. Nous n'avons pas besoin de connaitre l'erreur absolue. Nous allons utiliser la deuxième méthode utilisée dans l'exercice précédent.
La masse volumique du pavé est donnée par la formule suivante :
$$\rho(m,l,L,h) = \frac{m}{l.L.h}.$$
Nous avons :
$$\ln\big(\rho(m,l,L,h)\big) = \ln(m) - \ln(l) - \ln(L) - \ln(h).$$

Cela donne :

$$d\ln(\rho) = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{m}dm - \frac{1}{l}dl - \frac{1}{L}dL - \frac{1}{h}dh,$$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{1}{m}\right|.\Delta m + \left|\frac{1}{l}\right|.\Delta l + \left|\frac{1}{L}\right|.\Delta L + \left|\frac{1}{h}\right|.\Delta h.$$

Application numérique :

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{1}{2,2}\right|.0,1+\left|\frac{1}{10}\right|.0,1+\left|\frac{1}{20}\right|.0,1+\left|\frac{1}{5}\right|.0,1 = 0,04545\ldots+0,01+0,01+0,01 = 0,075454\ldots.$$

Remarque :
Si nous souhaitons simplement connaitre l'erreur relative il n'est pas nécessaire d'effectuer de changement d'unité.
Nous retrouvons la même erreur relative que dans l'exercice précédent car nous avons mesuré le même volume avec la même masse et les mêmes erreurs.

Correction de l'exercice 10.

1. La méthode usuelle pour calculer une erreur relative revient à calculer df puis df/f et ensuite faire l'application numérique en prenant les valeurs absolues. Ici nous ne voulons pas l'erreur absolue nous voulons juste l'erreur relative. Nous allons voir que nous pouvons l'obtenir sans passer par l'erreur absolue. Ici ρ joue le rôle de la fonction f et m, m_1, m_2 sont les variables.
   Un calcul direct de $\frac{d\rho}{\rho}$ nous amènerait à calculer une fraction de fractions : c'est à dire $d\rho$ est une fraction et ρ aussi. Les calculs peuvent donc être pénible...
   L'astuce est la suivante nous allons considérer la fonction F suivante :

   $$F = \ln(\rho) = \ln(m_1 - m) - \ln(m_2 - m)$$

   La différentielle de F est :

   $$\begin{aligned} dF &= \frac{1}{m_1 - m}dm_1 - \frac{dm}{m_1 - m} - \left(\frac{1}{m_2 - m}dm_2 - \frac{dm}{m_2 - m}\right) \\ &= \frac{dm_1}{m_1 - m} - \frac{dm_2}{m_2 - m} + \frac{m_1 - m_2}{(m_2 - m)(m_1 - m)}dm \end{aligned}$$

   A présent nous remarquons que la différentielle de $\ln(\rho)$ (donc de F) est $\frac{d\rho}{\rho}$.
   Donc :

   $$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dm_1}{m_1 - m} - \frac{dm_2}{m_2 - m} + \frac{m_1 - m_2}{(m_2 - m)(m_1 - m)}dm$$

2. Application numérique :
   $\left|\frac{\Delta_\rho}{\rho}\right| = \left|\frac{0,1}{90 - 10}\right| + \left|-\frac{0,1}{20 - 10}\right| + \left|\frac{90 - 20}{(20 - 10)(90 - 10)} \times 0,1\right| = 0,02 = 2\%.$

Correction de l'exercice 11.

1. $f(\sqrt{3}) = 0 \approx f(3) + f'(3)h_1 \approx 6 + 6h_1$.
   D'où $h_1 \approx -\dfrac{f(3)}{f'(3)} \approx -1$.
2. $u_1 = 3 - 1 = 2$.
3. $f(\sqrt{3}) = 0 \approx f(u_1) + f'(u_1)h_2 \approx 1 + 4h_2$.
   D'où $h_2 \approx -\dfrac{f(u_1)}{f'(u_1)} \approx -\dfrac{1}{4}$.
4. $u_2 = u_1 + h_2 = 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}$.
5. $u_3 = u_2 - \dfrac{f(u_2)}{f'(u_2)} = \dfrac{7}{4} - \dfrac{1}{56} = \dfrac{97}{56} \approx 1.732142857$.
6. La calculatrice donne : $\sqrt{3} = 1.732050808$.
7. On considère la fonction $f(x) = x^2 - a$.
   Comme précédemment nous utilisons la suite : $\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)}. \end{cases}$
   Cette suite a pour limite $\sqrt{a}$, et la précision de l'approximation augmente à chaque étape.

Chapitre 4

Extrema d'une fonction de deux variables

Nous savons trouver et étudier le maximum et le minimum d'une fonction d'une variable. Nous utilisons pour cela la dérivée. Nous allons voir dans ce chapitre comment trouver le maximum ou le minimum d'une fonction de plusieurs variables.

4.1 Rappel dans le cas d'une seule variable

Définition 1. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*

1. *$f(x_0)$ est un maximum global de f si :*
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ pour tout } x \in I.$$
2. *$f(x_0)$ est un maximum local de f s'il existe un intervalle $]a, b[\subset I$ contenant x_0 tel que :*
$$f(x) \leq f(x_0), \text{ pour tout } x \in]a, b[.$$
3. *$f(x_0)$ est un minimum global de f si :*
$$f(x) \geq f(x_0), \text{ pour tout } x \in I.$$
4. *$f(x_0)$ est un minimum local de f s'il existe un intervalle $]a, b[\subset I$ contenant x_0 tel que :*
$$f(x) \geq f(x_0), \text{ pour tout } x \in]a, b[.$$

Un extremum (extrema au pluriel) désigne soit un maximum soit un minimum.

Exercice 1. *Graphiquement, donner les extrema locaux et globaux de la fonction suivante f définie sur $[0; 3, 5]$:*

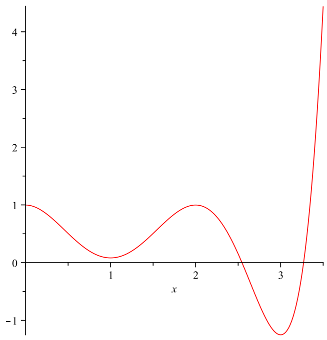


FIGURE 4.1 – Représentation graphique de la fonction f.

Solution :
Sur le graphique nous constatons qu'en $x = 0$ et $x = 2$ nous avons un maximum local, qu'en $x = 1$ nous avons un minimum local, qu'en $x = 3$ nous avons un maximum gobal et qu'en $x = 3,5$ nous avons un maximum global.

Pour détecter les extrema locaux nous avons la propriété suivante :

Proposition 1. *Si f possède un extremum relatif en $x = x_0$ alors soit $f'(x_0) = 0$ soit $f'(x_0)$ n'existe pas.*

Exercice 2. *1. Montrer que la fonction $f(x) = x^2 + 7$ a un minimum global en $x = 0$.*

2. Montrer que la fonction $f(x) = x^2$ définie sur $[-1; 1]$ admet un maximum global en $x = -1$.

3. Montrer que la fonction $f(x) = |x| + 2$ admet un minimum global en $x = 0$.

Solution :

1. Nous avons $f'(x) = 2x$. La fonction f' est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule lorsque $x = 0$. Donc si f admet un extremum local alors celui-ci se trouve en $x = 0$. Comme, nous avons $f(0) = 7 \leq x^2 + 7 = f(x)$, nous en déduisons que nous avons un minimum global.
2. Si $-1 \leq x \leq 1$ alors $x^2 \leq 1$. Nous avons donc $f(x) \leq f(1)$ pour $x \in [-1; 1]$. Donc la fonction étudiée admet un maximum en $x = 1$. Nous remarquons qu'en $x = 1$ la dérivée de la fonction étudiée n'existe pas. En effet, par définition

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

Cela suppose donc que $f(1 + h)$ existe lorsque $h > 0$, or ici f est définie uniquement sur $[-1; 1]$, donc $f'(1)$ n'existe pas.
3. Voici la représentation graphique de f.

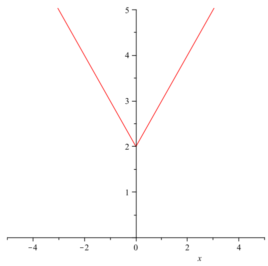


FIGURE 4.2 – Représentation graphique de $f(x) = |x| + 2$.

Nous avons $f'(x) = -1$ lorsque $x < 0$ et $f'(x) = 1$ lorsque $x > 0$. La fonction f' n'est pas définie lorsque $x = 0$. Donc si f admet un extremum local alors celui-ci se trouve en $x = 0$. Comme, nous avons $f(0) = 2 \leq |x| + 2 = f(x)$, nous en déduisons que nous avons un minimum global.

Exercice 3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.*
Cette fontion admet-elle un extremum ?

Solution :
Nous avons $f'(x) = 3x^2$. La dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$ lorsque $x = 0$. Ainsi, si nous avons un extremum alors celui-ci se trouve en $x = 0$. Or, $f(x) = x^3 \leq 0 = f(0)$ pour $x \leq 0$ et $f(x) = x^3 \geq 0 = f(0)$ pour $x \geq 0$ donc f ne possède pas d'extremum.

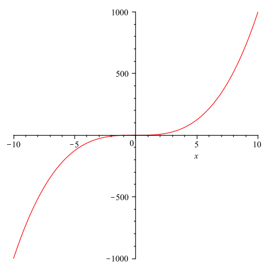


FIGURE 4.3 – Représentation graphique de $f(x) = x^3$.

Nous venons de voir que $f'(x) = 0$ ne suffit pas à garantir l'existence d'un extremum. La propriété suivante utilisant la dérivée seconde complète cette lacune. En effet, en étudiant la concavité ou la convexité de la fonction on peut déterminer si un point est un extremum local.

Proposition 2. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. Soit $]a, b[$ un intervalle contenant x_0.*
On suppose que $f'(x_0) = 0$ et que f'' existe sur $]a, b[\subset I$ dans ce cas :

1. *si $f''(x_0) > 0$, alors $f(x_0)$ est un minimum local.*
2. *si $f''(x_0) < 0$, alors $f(x_0)$ est un maximum local.*

Exercice 4. *Montrer qu'en $x = 3$ la fonction $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ admet un maximum local.*

Solution :
Nous avons $f'(x) = -2x + 6$, on en déduit $f'(x) = 0$ lorsque $x = 3$.
D'autre part $f''(x) = -2$. Donc $f''(3) = -2 < 0$. Ainsi f admet un maximum local en $x = 3$.

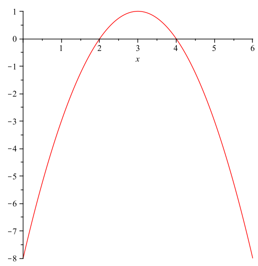


FIGURE 4.4 – Représentation graphique de $f(x) = -x^2 + 6x - 8$.

4.2 Extrémum local d'une fonction de plusieurs variables

Nous souhaitons étudier les extrema d'une fonction de plusieurs variables. Nous allons pour cela généraliser ce que nous savons faire à une une seule variable. Nous nous contenterons dans ce cours d'étudier les fonctions de deux variables.

Afin d'alléger les définitions de maximum et de minimum dans le cadre des fonctions de deux variables nous introduisons la notion suivante de voisinage :

Définition 2. *On appelle voisinage d'un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ toute partie du plan contenant un disque de centre (x_0, y_0) et de rayon strictement positif.*

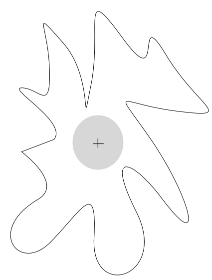


FIGURE 4.5 – Un exemple de voisinage d'un point.

On peut remarquer qu'une partie du plan est un voisinage d'un point lorsque ce point se trouve à l'intérieur de cette partie. Autrement dit, un ensemble n'est pas un voisinage d'un point lorsque le point ne se trouve pas dans cet ensemble ou bien lorsque le point se situe sur le bord de l'ensemble considéré.

Définition 3. *Soit f une fonction de deux variables x, y définie sur une partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.*

1. *$f(x_0, y_0)$ est un maximum global de f si :*
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathcal{D}.$$
2. *$f(x_0, y_0)$ est un maximum local de f s'il existe un voisinage $V \subset \mathcal{D}$ de (x_0, y_0) tel que :*
$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in V.$$
3. *$f(x_0, y_0)$ est un minimum global de f si :*
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in \mathcal{D}.$$
4. *$f(x_0, y_0)$ est unminimum local de f s'il existe un voisinage $V \subset \mathcal{D}$ de (x_0, y_0) tel que :*
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0), \text{ pour tout } (x, y) \in V.$$

Pour détecter les extrema locaux nous avons la propriété suivante :

Proposition 3. *Si f possède un extremum relatif en (x_0, y_0) alors :*
- *soit $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.*
- *soit l'une des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ n'existe pas.*

Un point (x_0, y_0) vérifiant l'une de ces conditions s'appelle un point critique.

Exercice 5. 1. *Montrer que la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ a un minimum local en $(0; 0)$.*
2. *Montrer que la fonction $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ a un minimum local en $(0; 0)$.*

Solution :

1. Nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$.
   Nous avons $2x = 0$ et $2y = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$.
   Donc, si f admet un extremum local alors celui-ci se trouve en $(0; 0)$.
   Nous avons $f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y)$, car un carré est positif.
   On en déduit que $(0; 0)$ est un minimum local (même global).
   La figure suivante, voir Figure 4.6, donne la représentation graphique de f.

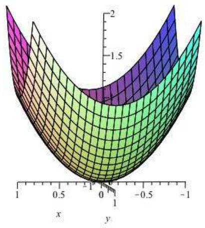


FIGURE 4.6 – Représentation graphique de $f(x) = x^2 + y^2$.

2. Nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$.
   Nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ qui ne sont pas définies en $(0,0)$ (division par zéro).
   De plus une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul. Donc pour obtenir $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ il faut avoir $x = 0$ et $y = 0$. Or cela nous donne la valeur interdite obtenue précédemment.
   Ainsi, si f admet un extremum local alors celui-ci se trouve en $(0;0)$.
   Nous avons $f(0,0) = 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} = f(x,y)$, car une racine carrée est positive. On en déduit que $f(0;0)$ est un minimum local (même global).
   Voici la représentation graphique de f :

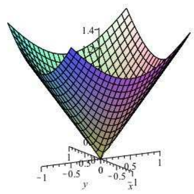


FIGURE 4.7 – Représentation graphique de $f(x) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 6. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^2 - y^2$. Cette fontion admet-elle un extremum ?*

Solution :
Nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2y$. Ces deux dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$.
De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ lorsque $x = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ lorsque $y = 0$.

Ainsi, si nous avons un extremum alors celui-ci se trouve en $(0;0)$.
Or,

- $f(0;0) = 0 \leq x^2 = f(x,0)$. Donc tous les points de coordonnées $(x;0)$ ont une image se trouvant au dessus de $f(0;0)$.

- $f(0;0) = 0 \geq -y^2 = f(0,y)$. Donc tous les points de coordonnées $(0;y)$ ont une image se trouvant en dessous de $f(0;0)$.

Conclusion : La fonction f n'admet pas d'extremum.

Dans une telle situation, on dit que le point $(0;0;f(0,0))$ est un point selle. Cette dénomination se comprend à l'aide de la représentation graphique de cette fonction.

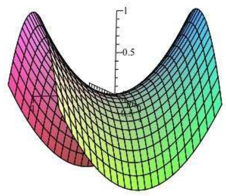


FIGURE 4.8 – Représentation graphique de $f(x) = x^2 - y^2$.

Nous venons de voir que la condition $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$ ne suffit pas à garantir l'existence d'un extremum. Comme dans le cas des fonctions à une variable, nous pouvons combler cette lacune en étudiant les dérivées secondes.

Proposition 4. *Soit f une fonction de deux variables x,y définie sur une partie $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. On pose*

$$d = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0,y_0).\frac{\partial f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2.$$

1. *si $d > 0$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ alors $f(x_0,y_0)$ est un minimum local.*
2. *si $d > 0$, et $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ alors $f(x_0,y_0)$ est un maximum local.*
3. *si $d < 0$ alors $\big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\big)$ est un point selle, donc $f(x_0,y_0)$ n'est pas un extremum.*

Exercice 7.

Trouver les extrema et les points selles de la fonction $f(x,y) = xy - \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{4}y^4$.

Solution :
Voici la représentation graphique de f.

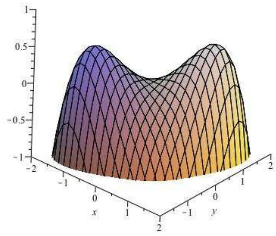


FIGURE 4.9 – Représentation graphique de $f(x) = xy - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}y^4$.

Tout d'abord recherchons les points critiques de f.
Nous avons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y - x^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y^3$.
Ces deux fonctions sont définies dans $\mathbb{R}^2$. Nous cherchons alors à résoudre :

$$\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0. \end{cases}$$

Cela donne : $\begin{cases} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x = (x^3)^3 = x^9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0. \end{cases}$

La dernière équation nous donne comme valeur possible pour x, $x = 0$ et les racines huitièmes de l'unité. Or nous ne cherchons que des racines réelles donc les valeurs possibles de x sont $x = 0$, $x = 1$ et $x = -1$. Cela donne comme solutions réelles du système $(0; 0)$, $(1; 1)$ et $(-1; -1)$.
D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x, y) = -3x^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) = -3y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1.$$

On obtient alors :

- En $(-1; -1)$, nous avons $d = (-3).(-3) - 1 = 8 > 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(-1, -1) = -3 < 0$, donc $f(-1; -1)$ est un maximum local.
- En $(0; 0)$, nous avons $d = 0 - 1 = -1 < 0$, donc $\big(0; 0; f(0; 0)\big)$ est un point selle.
- En $(1; 1)$, nous avons $d = (-3).(-3) - 1 = 8 > 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(-1, -1) = -3 < 0$, donc $f(-1; -1)$ est un maximum local.

Sujet de méditation :
Soit $(X;Y)$ une série statistique de dimension 2. On note $(x_i;y_i)$ les valeurs prises par cette série. On considère alors la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a,b) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Big(y_i-(ax_i+b)\Big)^2 \end{array}$$

A l'aide d'une étude de f, pouvez vous retrouver la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés.
La droite des moindres carrés est la droite dont le carré des écarts verticaux entre les points $(x_i;y_i)$ et celle-ci est minimal.

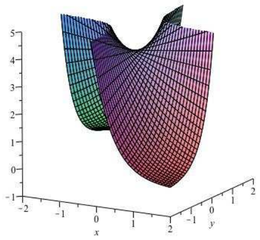
4.3 Exercices du TD

Exercice 1. *Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes ainsi que les points selles :*

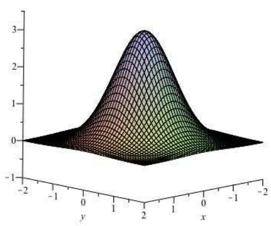
1. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$,
2. $f(x, y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$,
3. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8$,
4. $f(x, y) = x.e^{-x^2-y^2}$,
5. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 1$,
6. $f(x, y) = x^2 + y^4$.

Exercice 2. *En étudiant les extrema, associer à chaque figure la formule correspondante :*

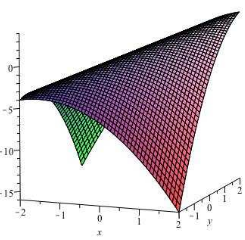
1. $f(x, y) = 3.e^{-x^2-y^2}$,
2. $g(x, y) = x + y + 2xy - x^2 - y^2$,
3. $h(x, y) = 4e^{xy}$,



a)



b)



c)

Exercice 3. *Une boîte en carton rectangulaire (plus rigoureusement parallélépipédique) ouverte sur le dessus a un volume de $32m^3$. Quelles doivent être ses dimensions pour que sa surface totale soit minimale ?*
(Autrement dit, quelles doivent être les dimensions pour obtenir une boite de $32m^3$ en utilisant le moins de carton possible ?)

Exercice 4. *Afin de traiter une infection bactérienne, l'utilisation conjointe de deux composés chimiques est utilisée. Des études ont montré qu'en laboratoire la durée de l'infection pouvait être modélisée par*

$$D(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120,$$

où x est le dosage en mg du premier composé et y le dosage en mg du second. Comment minimiser la durée de l'infection ?

4.4 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

1. Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2 = 0 \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première nous obtenons : $\begin{cases} 2x + 2 = 0 \\ 2x + 2y = 0. \end{cases}$
Cela donne $x = -1$ et $y = 1$.
D'autre part nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2.$$

On obtient alors : $d = 4.2 - 2 = 6 > 0$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x^2}(-1,1) > 0$ nous avons un minimum local en $f(-1;1)$.

2. Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -10x + 4y + 16, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 2y.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} -10x + 4y + 16 = 0 \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

En additionnant deux fois la seconde ligne à la première nous obtenons : $\begin{cases} -2x + 16 = 0 \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$
Cela donne $x = 8$ et $y = 16$.
D'autre part nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = -10, \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4.$$

On obtient alors : $d = -10.(-2) - 4 = 16 > 0$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x^2}(8,16) < 0$ nous avons un maximum local en $f(8;16)$.

3. Calculons les points critiques. Nous avons
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y-4.$$
Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre :
$$\begin{cases} 2x+4=0 \\ -2y-4=0. \end{cases}$$
Cela donne $x=-2$ et $y=-2$.
D'autre part nous avons
$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$
On obtient alors : $d = 2.(-2) - 0 = 2 < 0$, nous avons donc un point selle en $(-2;-2;-8)$.
4. Calculons les points critiques. Nous avons
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-x^2-y^2} + x.(-2x).e^{-x^2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x.(-2y).e^{-x^2-y^2}.$$
Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre :
$$\begin{cases} (1-2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0 \\ -2xy.e^{-x^2-y^2} = 0. \end{cases}$$
La première équation donne : $x^2 = 1/2$, donc $x = 1/\sqrt{2}$ ou $x = -1/\sqrt{2}$.
De la seconde équation on déduit $y = 0$.
D'autre part nous avons
$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = -4x.e^{-x^2-y^2} + (1-2x^2).(-2x).e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = -2x.e^{-x^2-y^2} - 2xy.(-2y).e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y.e^{-x^2-y^2} - 2xy.(-2x).e^{-x^2-y^2}.$$
On obtient alors :
- En $(1/\sqrt{2}, 0)$, $d = (-2\sqrt{2}e^{-1/2}).(-\sqrt{2}e^{-1/2}) - 0 = 4e^{-1} > 0$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x^2}(1/\sqrt{2}, 0) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$ nous avons un maximum local en $f(1/\sqrt{2}; 0)$.
- En $(-1/\sqrt{2}, 0)$, $d = (2\sqrt{2}e^{-1/2}).(\sqrt{2}e^{-1/2}) - 0 = 4e^{-1} > 0$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x^2}(-1/\sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$ nous avons un minimum local en $f(-1/\sqrt{2}, 0)$.

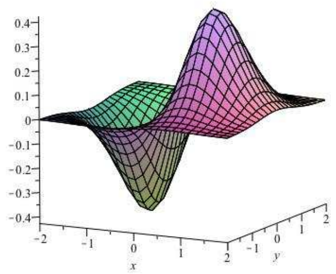


FIGURE 4.10 – Représentation graphique de $f(x) = x.e^{-x^2-y^2}$.

La représentation graphique de f est donnée ci-dessus :

5. Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{(x^2+y^2)^{2/3}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2}{3}\frac{y}{(x^2+y^2)^{2/3}}.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$. De plus, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\}$ ces deux fonctions sont non nulles, donc le seul point critique se trouve en $(0;0)$.
Donc si f admet un extremum local celui-ci se trouve en $(0,0)$.
Nous avons $f(0,0) = 1 \leq 1 + (x^2+y^2)^{2/3} = 1 + \left((x^2+y^2)^{1/3}\right)^2 = f(x,y)$, car un carré est toujours positif. On en déduit que $f(0,0) = 1$ est un minimum local (même global) de la fonction f.
La représentation graphique de f est la suivante :

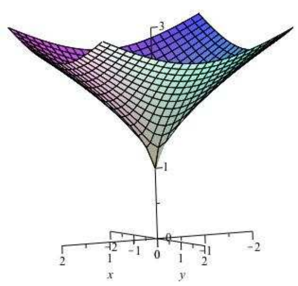


FIGURE 4.11 – Représentation graphique de $f(x) = (x^2+y^2)^{1/3} + 1$.

6. Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y^3 = 0. \end{cases}$$

Cela donne $x = 0$ et $y = 0$.
Donc si f possède un extremum celui-ci se situe en $(0,0)$.
D'autre part nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

On obtient alors : $d = 2.(0) - 0 = 0$. Nous ne pouvons donc pas conclure avec le critère habituelle. Cependant, nous avons : $f(0,0) = 0 \leq x^2 + y^4 = f(x,y)$, donc $f(0,0)$ est un minimum global.

Correction de l'exercice 2.

1. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xe^{-x^2-y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6ye^{-x^2-y^2}.$$

Nous avons un point critique en $(0;0)$. D'autre part :

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = -6e^{-x^2-y^2} - 6x.(-2x)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = -6e^{-x^2-y^2} - 6y.(-2y)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 12xye^{-x^2-y^2}.$$

On obtient alors : $d = -6.(-6) - 0 = 36 > 0$ et comme $\frac{\partial f}{\partial x^2}(0;0) = -6 < 0$ nous avons un maximum local en $f(0;0)$.
La figure représentant cette situation est la figure b).

2. Nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 1 + 2y - 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 1 + 2x - 2y.$$

Pour trouver les points critiques nous devons résoudre : $\begin{cases} 1 + 2y - 2x = 0 \\ 1 + 2x - 2y = 0 \end{cases}$
En additionnant les deux lignes nous obtenons $2 = 0$ ce qui est impossible. Donc le système est impossible, donc la fonction g ne possède pas de points critiques, donc g n'a pas d'extremum.
La figure représentant cette situation est la figure c).

3. Nous avons
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 4ye^{xy}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 4xe^{xy}.$$
Nous avons donc un point critique en $(0;0)$. D'autre part,
$$\frac{\partial h}{\partial x^2}(x,y) = 4y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial h}{\partial y^2}(x,y) = 4x^2e^{xy}, \quad \frac{\partial h}{\partial x\partial y}(x,y) = 4e^{xy} + 4xye^{xy}.$$
On obtient alors : $d = 0.0 - 4 < 0$ nous avons donc un point selle. La figure correspondante est la figure a).

Correction de l'exercice 3. Notons x, y, z la longueur, largeur et hauteur de cette boîte.
Le volume est donné par $V(x,y,z) = xyz = 32$.
De plus la surface est donnée par $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$.
Comme $xyz = 32$ nous en déduisons : $z = \dfrac{32}{xy}$.
Nous sommes donc amenés à chercher le minimum de la fonction de deux variables :
$$f(x,y) = xy + 2x.\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}.$$
Cherchons les points critiques de f :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - \frac{64}{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{64}{y^2}.$$
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas définie lorsque $x = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est pas définie lorsque $y = 0$.
Les situations où $x = 0$ et $y = 0$ ne sont pas envisageables car dans ce cas nous ne pouvons pas avoir un volume de $32m^3$.

Nous devons donc résoudre lorsque $x \neq 0$ et $y \neq 0$ le système : $\begin{cases} y - \dfrac{64}{x^2} = 0 \\ x - \dfrac{64}{y^2} = 0 \end{cases}$

Cela donne $\begin{cases} yx^2 = 64 \\ xy^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow yx^2 = xy^2 \Rightarrow xy(x-y) = 0.$

Donc on en déduit $x = y$. En utilisant à nouveau $y - \dfrac{64}{x^2} = 0$ avec $x = y$, on obtient : $x^3 = 64$, donc $x = 4$, $y = 4$ et $z = 2$.
Reste à voir, si l'extremum obtenu correspond à une surface minimale ou maximale :
$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{128}{x^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{128}{y^3}, \quad \frac{\partial f}{\partial x\partial y}(x,y) = 1.$$
On obtient alors : $d = \dfrac{128}{4^3}.(\dfrac{128}{4^3}) - 1 = 2.2 - 1 > 0$.
De plus $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(4,4) = \dfrac{128}{4^3} = 2 > 0$, nous avons donc bien un minimum.

Conclusion : les dimensions $4 \times 4 \times 2$ donnent une surface minimale pour un volume de $32m^3$.

Correction de l'exercice 4. Il suffit de trouver les valeurs de x et de y pour lesquelles la fonction D est minimale. Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 18 + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - 24 + 2x.$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre :

$$\begin{cases} 2x - 18 + 2y = 0 \\ 4y - 24 + 2x = 0. \end{cases}$$

En soustrayant la seconde ligne à la première nous obtenons : $\begin{cases} 6 - 2y = 0 \\ 4y - 24 + 2x = 0. \end{cases}$

Cela donne $x = 6$ et $y = 3$.
D'autre part nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x^2}(x,y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2.$$

On obtient alors : $d = 2.4 - 2 = 6 > 0$ et comme $\dfrac{\partial f}{\partial x^2}(6,3) = 2 > 0$ nous avons un minimum local en $f(6;3)$.
Conclusion : Pour minimiser la durée de l'infection il faut prendre 6mg du premier composé et 3 mg du second.

Deuxième partie

Équations différentielles

Chapitre 1

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1 Présentation générale

Dans cette partie du cours nous allons parler d'équations différentielles. Qu'est ce qu'une équation différentielle ? En voila un exemple :

$$y' - 2x.y = 5e^{x^2},$$

x désigne une variable, y une fonction et y' sa dérivée.
Cela signifie que nous cherchons une fonction $y(x)$ définie sur un intervalle I et vérifiant

$$y'(x) - 2x.y(x) = 5e^{x^2}.$$

Nous pouvons sur cet exemple comprendre le vocabulaire. Nous avons écrit ci-dessus une expression mathématiques contenant une égalité, c'est donc une *équation*. De plus dans cette équation apparait une dérivée. La partie des mathématiques étudiant les dérivées des fonctions s'appelle le calcul *différentiel* et les équations contenant des dérivées s'appellent des *équations différentielles*. De manière générale, une équation différentielle est une équation du type $f(x, y, y') = 0$, où f est une formule donnée et y désigne l'inconnue, c'est à dire la fonction recherchée. Pour faire apparaitre cette forme dans l'exemple précédent on le réécrit $y' - 2x.y - 5e^{x^2} = 0$.

L'*ordre* d'une équation différentielle correspond au plus grand ordre de dérivation apparaissant dans l'équation. Ici, nous avons dérivé une fois la fonction y, nous avons une formule du type $f(x, y, y') = 0$, on dit alors que cette équation différentielle est *d'ordre 1*.
L'équation $y'' + 3xy + \cos(x)y + x^5 = 0$ est une équation différentielle *d'ordre* 2.

Les équations différentielles sont donc des équations liants une fonction et sa dérivée. Ce type d'équation apparaît naturellement en physique. Par exemple, si $y(x)$ désigne la position d'un objet à l'instant x alors $y'(x)$ représente sa vitesse à cet instant. Une équation différentielle exprime donc que la vitesse de l'objet dépend

d'une certaine façon de sa position.
Un autre exemple simple d'équation différentielle est donné par l'étude de la décharge d'un condensateur dans un circuit contenant une résistance. Si on note R la résistance en ohm et C la capacité du condensateur alors la charge $y(x)$ à l'instant x du condensateur est donnée par : $Ry' + \frac{1}{C}y = 0$.

1.1.1 Équations différentielles et intégration

Vous avez déjà résolu des équations différentielles.

Exercice 1. *Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' = x$.*

Solution : $y' = x$ signifie $y'(x) = x$ cela donne :

$$\begin{aligned} \int y'(x)dx &= \int xdx \\ y(x) &= \frac{x^2}{2} + c, \text{où } c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Cet exercice nous montre deux choses :
- La résolution d'équation différentielle du type $y' = f(x)$ correspond au calcul de $\int f(x)dx$.
- La solution d'une équation différentielle dépend d'un paramètre $c \in \mathbb{R}$. Cela signifie qu'une équation différentielle possède une infinité de solutions. On parle dans ce cas de famille de solutions.

Il peut arriver que nous ne recherchions qu'une solution particulière.

Exercice 2. *Donner la fonction y vérifiant : $y' = x$ et $y(1) = 7$.*

Solution : Nous savons que y est du type $y(x) = \frac{x^2}{2} + c$. Comme $y(1) = 7$, il vient : $\frac{1}{2} + c = 7$, donc $c = 6,5$. D'où $y(x) = \frac{x^2}{2} + 6,5$.

1.1.2 Solutions d'une équation différentielle

Une équation différentielle, comme toute équation, n'a pas nécessairement de solutions !
Exemple : $(y')^2 = -1$.

Cette équation différentielle ne possède pas de solutions. En effet, dans tout ce cours il sera sous-entendu que nous ne considérons que des fonctions à valeurs réelles.

Il existe aussi des équations différentielles dont nous ne pouvons pas donner de formules explicites pour exprimer les solutions.

Par exemple : $y' - y^2 + x = 0$.
Autre exemple : $y' = e^{x^2}$.

Il est possible de montrer que ces équations différentielles ont des solutions mais que celles-ci ne peuvent pas être exprimées à l'aide des formules élémentaires usuelles utilisant les polynômes, les cosinus, sinus, exponentielles et logarithmes.

Comment faire alors pour étudier les solutions ? Nous les dessinons...

1.1.3 Interprétation géométrique

L'équation $y' - y^2 + x = 0$ s'écrit aussi $y' = y^2 - x$. Donc en particulier lorsque $x = -1$ et $y = 3$, la valeur de y' est connue et vaut $y' = (3)^2 - (-1) = 10$. Cela signifie que nous connaissons la pente d'une fonction solution lorsque $x = -1$ et $y = 3$. Nous pouvons faire cela pour toutes les valeurs possibles de x et de y. Donc en tous le points du plan nous pouvons dessiner le vecteur directeur unitaire de la tangente au graphe d'une fonction solution. Nous obtenons alors un *champ de vecteurs*. Cela donne ceci :

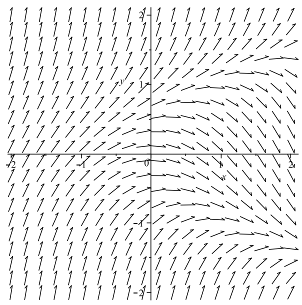


FIGURE 1.1 – Champ de vecteurs associé à $y' = y^2 - x$.

Graphiquement, trouver une solution de l'équation différentielle signifie donc tracer une courbe tangente aux vecteurs dessinés.

Voici une courbe solution vérifiant $y(-1) = -1,5$. La représentation graphique

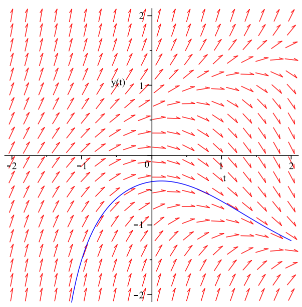


FIGURE 1.2 – Représentation d'une solution de $y' = y^2 - x$.

d'une solution s'appelle une *courbe intégrale*.

Il existe une infinité de solutions à cette équation, voici la représentation graphique de certaines d'entre elles.

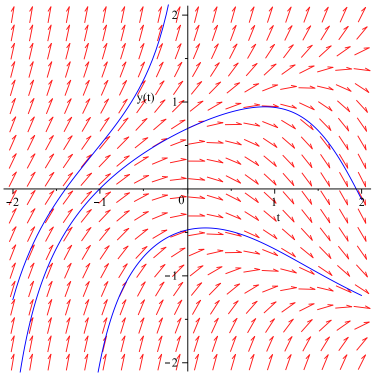


Figure 1.3 – Représentation de solutions de $y' = y^2 - x$.

Sur la figure 1.3, nous remarquons que par un point donné ne passe qu'une seule courbe solution. De plus, deux courbes solutions ne se croisent pas.
Ces propriétés sont vraies de manière générale et ce résultat s'appelle le théorème de Cauchy (1789-1857). Autrement dit on peut montrer sous certaines hypothèses que :

- Une équation différentielle d'ordre 1 possède une infinité de solutions. Ces solutions dépendent d'un paramètre généralement noté $c \in \mathbb{R}$.
- Par un point de coordonnées (x_0, y_0) ne passe qu'une seule solution.
  Autrement dit, il n'existe qu'une solution vérifiant la *condition initiale* $y(x_0) = y_0$.

Puisque par un point ne passe qu'une seule solution on en déduit que deux courbes intégrales distinctes ne se croisent pas.

Comment a-t-on obtenu ces dessins ?
L'idée suivante est due à Euler (1707-1783).
En chaque point du plan nous pouvons calculer et représenter un vecteur directeur de la tangente d'une courbe intégrale. Nous avons vu qu'en $x = -1$ et $y = 3$, nous avons $y' = 10$. Donc un vecteur directeur de la tangente à la courbe intégrale en ce point est $(1; 10)$. Nous pouvons donc dessiner la tangente à la courbe intégrale passant par le point $(-1; 3)$. Ensuite, l'idée est de dire que localement la courbe ressemble à sa tangente. Donc nous pouvons dessiner un "petit morceau" de la tangente à la place de la courbe. Cela donne la figure ci-contre, où nous avons représenté moins de vecteurs du champ de vecteurs afin d'aérer la figure.

Puis nous prolongeons ce dessin en recommençant ce procédé à partir du "bout" de tangente dessiné. Cela donne la ligne brisée donnée à la Figure 1.5.

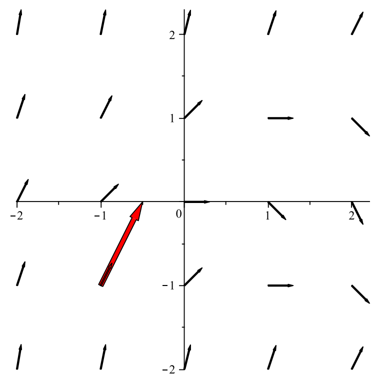


FIGURE 1.4 – Représentation d'une portion de tangente en un point.

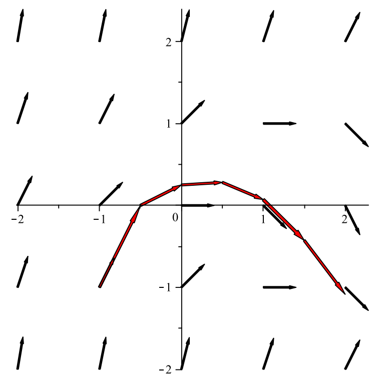


FIGURE 1.5 – Représentation d'une solution via la méthode d'Euler.

Ainsi nous avons une ligne brisée qui ressemble à une solution. En prenant des morceaux de tangentes plus petits nous obtenons une courbe plus lisse.

1.2 Méthodes de résolution des équations différentielles linéaires d'ordre 1

Nous allons dans ce qui suit présenter une méthode pour obtenir une formule donnant les solutions d'équations différentielles d'un certain type. Nous allons considérer les équations différentielles *linéaires* d'ordre 1. Ce sont les équations du type :

$$y' + \alpha(x)y = \gamma(x),$$

où α, et γ sont deux fonctions données.
La méthode de résolution est constituée de trois étapes que nous allons illustrer sur l'exemple : $y' + 2xy = 3x$. A partir de cet exemple, nous en déduirons la méthode générale.

Le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' + 2xy = 3x$ est le suivant :

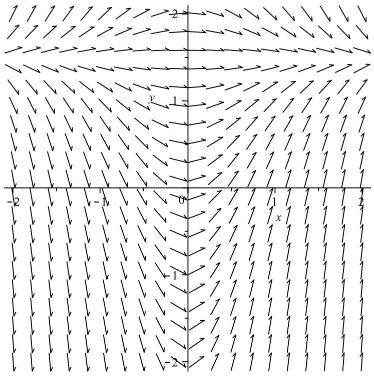


Figure 1.6 – Champ de vecteurs de $y' + 2xy = 3x$.

1.2.1 Équation homogène

L'équation homogène associée à $y' + \alpha(x)y = \gamma(x)$ est :

$$y' + \alpha(x)y = 0.$$

Dans notre exemple, cela donne : $y' + 2xy = 0$.

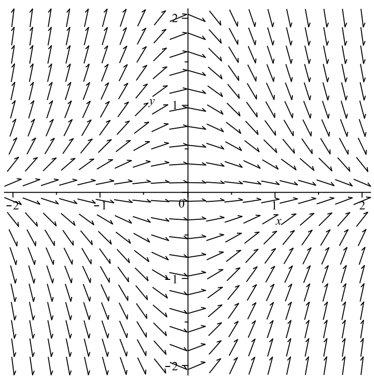


Figure 1.7 – Champ de vecteurs de $y' + 2xy = 0$.

La première étape consiste à résoudre l'équation homogène associée. Voila comment on procède sur l'exemple $y' + 2xy = 0$.

Tout d'abord nous remarquons que la fonction constante égale à 0 est solution de cette équation.
En effet, si $y(x) = 0$ alors $y'(x) = 0$ et nous avons $0 + 2x \times 0 = 0$, l'équation est donc bien vérifiée. Une façon de voir les choses est de dire que 0 est une solution

évidente.

A présent, considérons une fonctions y solution de l'équation différentielle et telle que y ne soit pas la fonction constante égale à 0. Comme deux courbes intégrales ne se coupent pas on obtient alors que y sera de signe constant, c'est à dire y est soit strictement positive soit strictement négative.

De plus, y vérifie l'équation donc nous avons :

$$\begin{aligned}
& y'(x) + 2xy(x) = 0 \\
\Rightarrow\ & y'(x) = -2xy(x) \\
\Rightarrow\ & \frac{y'(x)}{y(x)} = -2x, \text{ cette division est possible puisque } y(x) \neq 0. \\
\Rightarrow\ & \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int -2x dx = -2 \int x dx = -x^2 + c_1 \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\ & \ln(|y(x)|) = -x^2 + c_1 \\
\Rightarrow\ & |y(x)| = e^{-x^2+c_1} = e^{-x^2}.e^{c_1} = c_2 e^{-x^2}, \text{ où } c_2 = e^{c_1} \\
\Rightarrow\ & y(x) = c_2 e^{-x^2} \text{ ou } - c_2 e^{-x^2} \\
\Rightarrow\ & y(x) = ce^{-x^2}, \text{ où } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Nous remarquons que lorsque $c = 0$ alors nous obtenons la fonction constante égale à 0 qui avait déjà été identifiée comme solution.

En reprenant, cette approche dans le cas général de l'équation homogène $y' + \alpha(x)y = 0$ on obtient :

Théorème 1. *La solution, notée $y_0(x)$, de l'équation homogène $y' + \alpha(x)y = 0$ est de la forme :*

$$y_0(x) = ce^{-A(x)}, \text{ où } c \in \mathbb{R},$$

$$\text{et } A(x) = \int \alpha(x) dx.$$

On note la solution y_0 afin d'insister sur le fait que le second membre de l'équation différentielle étudiée est nul. Sur notre exemple, nous avons montré que $y_0(x) = ce^{-x^2}$.

1.2.2 Calcul d'une solution particulière

A présent, nous allons voir comment calculer une solution particulière de l'équation $y' + \alpha(x)y = \gamma(x)$. Autrement dit, nous allons voir comment trouver la formule d'une solution parmi l'infinité de solution de l'équation différentielle étudiée.

Comme nous cherchons une solution particulière nous la notons y_p.

Comment calculer y_p ?
Nous allons voir comment faire sur l'exemple $y' + 2xy = 3x$.

Nous avons vu que ce^{-x^2} est solution de $y' + 2xy = 0$. De plus, l'équation

$$(H) : y' + 2xy = 0$$

ressemble beaucoup à l'équation

$$(E) : y' + 2xy = 3x.$$

On se dit alors que les solutions de (E) vont ressembler aux solutions de l'équation de (H).
Le second membre de l'équation (H) est la constante égale à 0 et les solutions sont du type ce^{-x^2}, où c est une constante.
Le second membre de l'équation de (E) est une fonction. Nous allons alors chercher y_p sous la forme $y_p(x) = F(x)e^{-x^2}$, où F est une fonction à déterminer.

Examinons, pourquoi cette astuce fonctionne.
Nous avons posé : $y_p(x) = F(x)e^{-x^2}$.
Cela donne donc $y_p'(x) = F'(x)e^{-x^2} + F(x).(-2x).e^{-x^2}$.
De plus y_p est une solution de l'équation $y' + 2xy = 3x$, donc : $y_p'(x) + 2xy_p(x) = 3x$.
En remplaçant, y_p et y_p' par les formules ci-dessus nous en déduisons :
$F'(x)e^{-x^2} + F(x).(-2x).e^{-x^2} + 2xF(x)e^{-x^2} = 3x$.
D'où : $F'(x)e^{-x^2} = 3x$.
Ainsi, $F'(x) = 3xe^{+x^2}$. On obtient : $F(x) = \int 3xe^{+x^2}dx$.

Cette approche marche de manière générale :

Théorème 2. *Avec les notations du théorème précédent, nous avons :*
Une solution particulière de l'équation différentielle $y' + \alpha(x)y = \gamma(x)$ est donnée par :

$$y_p(x) = F(x)e^{-A(x)}, \text{ où } F(x) = \int \gamma(x)e^{A(x)}dx.$$

Attention au signe devant $A(x)$.
Revenons au calcul de notre exemple :

$$F(x) = \int 3xe^{+x^2}dx = \int \frac{3}{2}2xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{3}{2}e^{x^2}.$$

Nous avons utilisé la formule $\int u'e^u = e^u$ avec $u = x^2$.
Donc sur notre exemple $y_p(x) = F(x)e^{-x^2} = \frac{3}{2}e^{x^2}e^{-x^2} = \frac{3}{2}$.

1.2.3 Solution générale

Nous allons voir comment nous pouvons utiliser les résultats des deux sections précédentes afin de donner la solution générale de l'équation différentielle.

On note y_G la solution générale de l'équation différentielle. Cela signifie sur notre exemple que :

$$y_G'(x) + 2xy_G(x) = 3x. \qquad (E_1)$$

D'autre part nous savons que y_p est aussi solution de cette équation différentielle, donc :

$$y_p'(x) + 2xy_p(x) = 3x. \qquad (E_2)$$

On soustrait (E_2) à (E_1) et on obtient :

$$\begin{aligned} y_G'(x) - y_p'(x) + 2xy_G(x) - 2xy_p(x) &= 0. \\ \big(y_G(x) - y_p(x)\big)' + 2x\big(y_G(x) - y_p(x)\big) &= 0. \end{aligned}$$

Cela signifie donc que $y_G - y_p$ est une solution de $(H) : y' + 2xy = 0$.
Donc $y_G - y_p = y_0$ d'après le Théorème 1. Ainsi $y_G = y_0 + y_p$.

Ce raisonnement se généralise et on a :

Théorème 3. *Avec les notations précédentes, nous avons :*
La solution générale y_G de l'équation différentielle $y' + \alpha(x)y = \gamma(x)$ est donnée par

$$y_G = y_0 + y_p.$$

Sur notre exemple, on obtient $y_G(x) = ce^{-x^2} + \dfrac{3}{2}$.

1.2.4 Astuces

Principe de superposition

Exercice 3. *L'équation $y' + 2xy = 3x$ a pour solution particulière $y_1(x) = \dfrac{3}{2}$.*
L'équation $y' + 2xy = \cos(x)e^{-x^2}$ a pour solution particulière $y_2(x) = \sin(x)e^{-x^2}$.
Donner une solution particulière pour l'équation $y' + 2xy = 3x + \cos(x)e^{-x^2}$.

Solution :
Nous avons $y_1(x)' + 2xy_1(x) = 3x$ et $y_2'(x) + 2xy_2(x) = \cos(x)e^{-x^2}$. En sommant ces deux équations nous obtenons :

$$\begin{aligned} y_1(x)' + 2xy_1(x) + y_2'(x) + 2xy_2(x) &= 3x + \cos(x)e^{-x^2} \\ y_1(x)' + y_2'(x) + 2xy_1(x) + 2xy_2(x) &= 3x + \cos(x)e^{-x^2} \\ \big(y_1(x) + y_2(x)\big)' + 2x\big(y_1(x) + y_2(x)\big) &= 3x + \cos(x)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $y_1 + y_2$ est une solution particulière de $y' + 2xy = 3x + \cos(x)e^{-x^2}$.

Théorème 4. *[Principe de superposition]*
Soit y_1 une solution de $y' + \alpha(x)y = \gamma_1(x)$.
Soit y_2 une solution de $y' + \alpha(x)y = \gamma_2(x)$.
On a alors $y_1 + y_2$ comme solutions de $y' + \alpha(x)y = \gamma_1(x) + \gamma_2(x)$.

Equation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

Lorsque la fonction $\alpha(x)$ est constante, il existe des astuces pour obtenir une solution particulière évitant le calcul de primitives. L'idée est de chercher une solution particulière ayant la même forme que $\gamma(x)$.

Proposition 1. *Soit $y' + \alpha y = \gamma(x)$ une équation différentielle où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
Si $\gamma(x)$ est un polynôme, c'est à dire du type

$$\gamma(x) = p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0,$$

où $p_n, \ldots, p_0 \in \mathbb{R}$, alors on peut chercher $y_p(x)$ sous la forme :

$$y_p(x) = q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0,$$

où $q_n, \ldots, q_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *A l'aide de la proposition précédente, résoudre : $y' + 5y = x^2 + 3$.*

Solution : L'application directe du Théorème 1 nous donne $y_0(x) = ce^{-5x}$, $c \in \mathbb{R}$. Recherchons à présent une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. Nous avons alors $y_p'(x) = 2ax + b$. De plus, $y_p' + 5y_p = x^2 + 3$, donc :

$$\begin{aligned} 2ax + b + 5(ax^2 + bx + c) &= x^2 + 3 \\ 5ax^2 + (2a + 5b)x + b + 5c &= x^2 + 3 \end{aligned}$$

On identifie les coefficients du polynôme du membre de gauche avec ceux du membre de droite. On obtient :

$$\begin{cases} 5a = 1 \\ 2a + 5b = 0 \\ b + 5c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/5 \\ b = -2/25 \\ c = 77/125. \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale est $y_G(x) = ce^{-5x} + \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{2}{25}x + \dfrac{77}{125}$, $c \in \mathbb{R}$.
La méthode directe du Théorème 2 nous aurait amené à effectuer une intégration par parties pour trouver y_p.

Proposition 2. *Soit $y' + \alpha y = \gamma(x)$ une équation différentielle où $\alpha \in \mathbb{R}$.*
Si $\gamma(x)$ est du type :

$$\gamma(x) = (p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0)e^{ax},$$

où $a, p_n, \ldots, p_0 \in \mathbb{R}$,

– *si* $y_0(x) \neq ce^{ax}$ *alors on peut chercher* $y_p(x)$ *sous la forme :*

$$y_p(x) = (q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0)e^{ax},$$

où $q_n, \ldots, q_0 \in \mathbb{R}$.

– *si* $y_0(x) = ce^{ax}$ *alors on peut chercher* $y_p(x)$ *sous la forme :*

$$y_p(x) = x(q_n x^n + \cdots + q_1 x + q_0)e^{ax},$$

où $q_n, \ldots, q_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. *A l'aide de la proposition précédente, résoudre l'équation différentielle :* $y' + 5y = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$.

Solution :

L'application directe du Théorème 1 nous donne $y_0(x) = ce^{-5x}$, $c \in \mathbb{R}$.
Ici, $a = -3$, on a donc $y_0(x) \neq ce^{ax}$. Nous cherchons alors une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-3x}$.
Cela donne $y_p'(x) = (2ax + b)e^{-3x} + (ax^2 + bx + c).(-3).e^{-3x}$.
De plus, $y_p' + 5y_p = (x^2 + x + 1)e^{-3x}$, donc :

$$\begin{aligned} (2ax+b)e^{-3x} + (ax^2+bx+c).(-3).e^{-3x} + 5(ax^2+bx+c)e^{-3x} &= (x^2+x+1)e^{-3x} \\ \big(2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c\big)e^{-3x} &= (x^2+x+1)e^{-3x} \end{aligned}$$

On identifie les coefficients du membre de gauche avec ceux du membre de droite. On obtient :

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 1 \\ b + 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ c = 1/2. \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale est $y_G(x) = ce^{-5x} + (\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2})e^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$.

Proposition 3. *Soit* $y' + \alpha y = \gamma(x)$ *une équation différentielle où* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Si $\gamma(x)$ *est du type*

$$\gamma(x) = e^{\theta x}\big(a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)\big)P(x),$$

où $\theta, a, b \in \mathbb{R}$ *et* $P(x)$ *est un polynôme, alors on cherche* $y_p(x)$ *sous la forme*

$$y_p(x) = e^{\theta x}\big(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\big)Q(x),$$

où $A, B \in \mathbb{R}$ *et* Q *est un polynôme de même degré que* P.

Exercice 6. *A l'aide de la proposition précédente, résoudre l'équation différentielle :* $y' + 5y = e^{-3x}\big(53\cos(7x) + 53\sin(7x)\big)$.

Solution :
L'application directe du Théorème 1 nous donne $y_0(x) = ce^{-5x}$, $c \in \mathbb{R}$.
Nous cherchons une solution particulière sous la forme :
$y_p(x) = \big(A\cos(7x) + B\sin(7x)\big)e^{-3x}$.
Nous avons alors :

$$\begin{array}{rcl} y_p'(x) & = & \big(-7A\sin(7x) + 7B\cos(7x)\big)e^{-3x} + \big(A\cos(7x) + B\sin(7x)\big).(-3).e^{-3x} \\ & = & \big((-3A+7B)\cos(7x) + (-7A-3B)\sin(7x)\big)e^{-3x} \end{array}$$

De plus, $y_p' + 5y_p = \big(53\cos(7x) + 53\sin(7x)\big)e^{-3x}$, donc :

$$\begin{array}{rcl} y_p'(x) + 5y_p(x) & = & \big((-3A+7B)\cos(7x) + (-7A-3B)\sin(7x)\big)e^{-3x} \\ & & +5\big(A\cos(7x) + B\sin(7x)\big)e^{-3x} \\ & = & \big((2A+7B)\cos(7x) + (-7A+2B)\sin(7x)\big)e^{-3x} \\ & = & \big(53\cos(7x) + 53\sin(7x)\big)e^{-3x} \end{array}$$

On identifie les coefficients et on obtient :

$$\begin{cases} 2A + 7B = 53 \\ -7A + 2B = 53 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -5 \\ B = 9 \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale est $y_G(x) = ce^{-5x} + \big(-5\cos(7x) + 9\sin(7x)\big)e^{-3x}$, $c \in \mathbb{R}$.

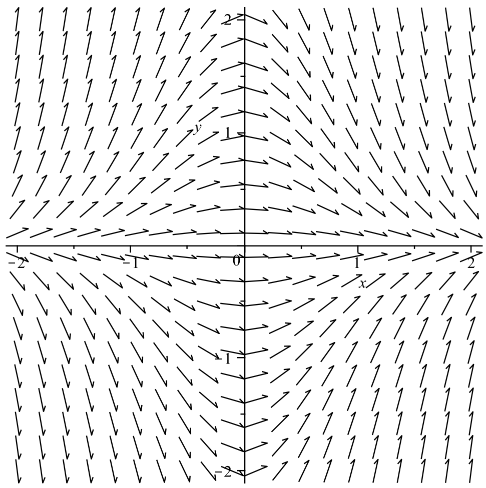
Sujet de méditation :
Dans de nombreuses situations (électricité, mécanique) nous n'étudions pas simplement une seule fonction mais plusieurs fonctions qui sont reliées entre elles par un système différentiel. Par exemple, nous sommes amenés à résoudre des systèmes de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x) + bz(x) \\ z'(x) = cy(x) + dz(x), \end{cases}$$

où $y(x)$ et $z(x)$ sont les fonctions que l'on recherchent et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sont donnés. Comment peut on résoudre ce type de système ?

1.3 Exercices du TD

Exercice 1. *La figure ci-dessous représente le champ de vecteurs associé à une équation différentielle du type* $y' = f(x, y)$.
On note y_1 *la solution de cette équation différentielle vérifiant :* $y_1(0) = 1$.



Vrai ou faux.

1. $y_1(2)$ *est proche de 2.*
2. $y_1(2)$ *est proche de 1.*
3. $y_1(2)$ *est proche de 0.*

Exercice 2. *Donner une équation différentielle ayant pour solution la fonction* $\cos(x)e^{x^2}$.

Exercice 3. *Est ce que* $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + e^{-2x}$ *est solution de* $y' + 2y = x^2$ *?*
Justifier votre réponse.

Exercice 4. *Résoudre :*

1. $y' + \cos(x)y = 0$.
2. $xy' - 7y = 0$, *lorsque* $x > 0$.

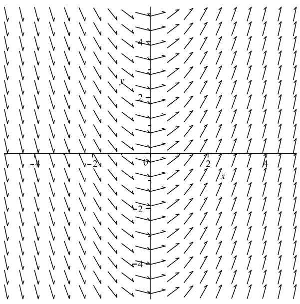
Exercice 5. *Résoudre :*

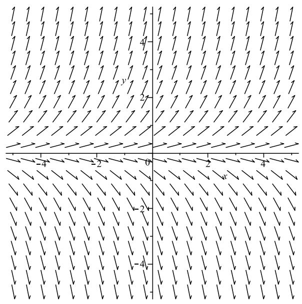
1. $xy' + 2y = x^4$, *lorsque* $x > 0$.
2. $xy' + 2y = e^{x^2}$, *lorsque* $x > 0$.
3. $xy' + 2y = x^4 + e^{x^2}$, *lorsque* $x > 0$.
4. $(1 + e^x)y' + e^x y = 1 + e^x$, *lorsque* $x \in \mathbb{R}$.
5. *Donner la solution de l'équation différentielle* $(1+e^x)y'+e^x y = 1+e^x$, *vérifiant* $y(0) = \frac{5}{2}$.

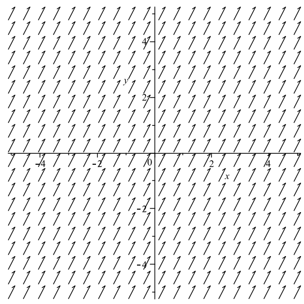
Exercice 6. *Résoudre :*

1. $y' - 2y = 2x + 1$.
2. $y' - 2y = 3e^{5x}$.
3. $y' - 2y = \cos(3x) - 5\sin(3x)$.
4. $y' - 2y = 17e^{2x}$.
5. $y' - 2y = \cos(x)e^{2x}$.

Exercice 7. *Associer à chaque équation différentielle ci-dessous, le champ de vecteurs correspondant :*
1) $y' = y$, *2)* $y' = 2$, *3)* $y' = x$.

a) 

b) 

c) 

1.4 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1. Nous traçons sur la figure la solution vérifiant la condition initiale $y_1(0) = 1$

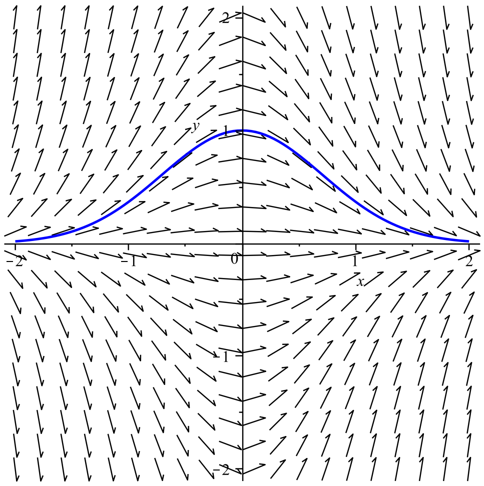


FIGURE 1.8 – Représentation graphique de $y_1(x)$.

On constate alors que $y_1(2) \approx 0$.

Correction de l'exercice 2. On pose $y(x) = \cos(x)e^{x^2}$.
On dérive cette fonction. Cela donne : $y'(x) = -\sin(x)e^{x^2} + \cos(x)2xe^{x^2}$.
Donc y vérifie : $y' = -\sin(x)e^{x^2} + \cos(x)2xe^{x^2}$.
On peut remarquer aussi que $y'(x) = -\sin(x)e^{x^2} + \cos(x)2xe^{x^2} = \sin(x)e^{x^2} + 2xy(x)$.
Donc, y vérifie aussi l'équation différentielle : $y' = \sin(x)e^{x^2} + 2xy$.

Correction de l'exercice 3. On pose $y(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + e^{-2x}$.
On dérive cette fonction. Cela donne : $y'(x) = -\frac{1}{2} + x - 2e^{-2x}$.
On obtient alors :

$$\begin{aligned} y'(x) + 2y(x) &= -\frac{1}{2} + x - 2e^{-2x} + 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + e^{-2x}\right) \\ &= x^2. \end{aligned}$$

La fonction $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + e^{-2x}$ est donc bien solution de l'équation différentielle $y' + 2y = x^2$.

Correction de l'exercice 4. Cet exercice revient à calculer y_0 et donc à appliquer le Théorème 1 de la page 79. Nous allons rédiger le premier cas de deux

façons différentes. Tout d'abord en reprenant la démonstration du cours, puis nous appliquerons directement le Théorème 1. Ensuite, seul les calculs seront notés dans cette correction.
En pratique, vous utilisez la méthode que vous préférez.

1. *Première méthode :*
   Tout d'abord nous remarquons que la fonction constante égale à 0 est solution évidente de cette équation.

   A présent, considérons une fonctions y solution de l'équation différentielle et telle que y ne soit pas la fonction constante égale à 0. Comme deux courbes intégrales ne se coupent pas on obtient alors que y est de signe constant, c'est à dire y est soit strictement positive soit strictement négative.
   De plus, nous avons :

$$\begin{aligned}
&y'(x) + \cos(x)y(x) = 0\\
&\Rightarrow y'(x) = -\cos(x)y(x)\\
&\Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = -\cos(x), \text{ cette division est possible puisque } y(x) \neq 0.\\
&\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y(x)}dx = \int -\cos(x)dx = -\sin(x) + c_1, c_1 \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow \ln(|y(x)|) = -\sin(x) + c_1\\
&\Rightarrow |y(x)| = e^{-\sin(x)+c_1} = e^{-\sin(x)}.e^{c_1} = c_2e^{-\sin(x)}, \text{ où } c_2 = e^{c_1}\\
&\Rightarrow y(x) = c_2e^{-\sin(x)} \text{ ou } -c_2e^{-\sin(x)}\\
&\Rightarrow y(x) = ce^{-sin(x)}, \text{ où } c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

   Deuxième méthode :
   L'équation $y'(x)+\cos(x)y(x) = 0$ est du type $y'+\alpha(x)y = 0$ avec $\alpha(x) = \cos(x)$. La solution de cette équation est donc de la forme $y_0(x) = ce^{-A(x)}$, où $c \in \mathbb{R}$ et $A(x) = \int \alpha(x)dx$.
   Dans notre cas nous avons : $A(x) = \int \cos(x)dx = \sin(x)$. On en déduit : $y_0(x) = ce^{-\sin(x)}$, avec $c \in \mathbb{R}$.
2. L'équation $xy' - 7y = 0$ n'est pas sous la forme $y' + \alpha(x)y = 0$. Il faut donc se ramener à cette situation, on obtient alors :

$$y' - \frac{7}{x}y = 0.$$

   Remarquons que cette formule est sous la bonne forme et qu'elle est valide puisque nous supposons $x > 0$.
   Nous devons donc calculer $A(x) = \displaystyle\int -\frac{7}{x}dx = -7\ln(x)$.
   D'où : $y_0(x) = ce^{7\ln(x)} = ce^{\ln(x^7)} = cx^7$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 5.

1. Tout d'abord il faut ramener l'équation à la forme étudiée en cours, c'est à dire : $y' + \alpha(x) = \gamma(x)$. Dans notre cas nous obtenons :
$$y' + \frac{2}{x}y = x^3.$$
Cette équation est valide car nous avons supposé $x > 0$.

Calcul de y_0 ***:*** Ici $\alpha(x) = \dfrac{2}{x}$ et $A(x) = \displaystyle\int \frac{2}{x}dx = 2\ln(x)$.
D'où $y_0(x) = ce^{-2\ln(x)} = ce^{\ln(x^{-2})} = cx^{-2} = \dfrac{c}{x^2}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Calcul de y_p ***:***
Première méthode : Posons : $y_p(x) = \dfrac{F(x)}{x^2}$.
Cela donne donc $y_p'(x) = \dfrac{F'(x).x^2 - F(x).2x}{x^4}$.
Nous voulons que y_p soit une solution de l'équation $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$, donc : $y_p' + \dfrac{2}{x}y_p = x^3$.
En remplaçant, y_p et y_p' par les formules ci-dessus nous en déduisons :
$$\frac{F'(x).x^2 - F(x).2x}{x^4} + \frac{2}{x}\frac{F(x)}{x^2} = x^3.$$
D'où : $\dfrac{F'(x)}{x^2} = x^3$.
Ainsi, $F'(x) = x^5$. On obtient : $F(x) = \int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6}$.
Donc : $y_p(x) = \dfrac{x^6}{6x^2} = \dfrac{x^4}{6}$.

Deuxième méthode :
Pour trouver une solution particulière nous utilisons le Théorème 2 page 80, la solution particulière y_p sera donc de la forme
$$y_p(x) = \frac{F(x)}{x^2}, \text{ avec } F(x) = \int x^3.x^2dx.$$
Comme $\displaystyle\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}$, il vient $y_p(x) = \dfrac{x^6}{6x^2} = \dfrac{x^4}{6}$.

Conclusion : La solution générale de cette équation différentielle est $y_G(x) = \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{x^4}{6}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

2. Nous devons résoudre l'équation : $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^{x^2}}{x}$.
Le calcul de y_0 a déjà été effectué dans la question précédente.

Calcul de y_p ***:*** Nous sommes amenés à calculer :

$$F(x) = \int \frac{e^{x^2}}{x}.x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}.$$

Nous avons utilisé la formule $\int u'(x)e^{u(x)}dx = e^{u(x)}$.

On en déduit : $y_p(x) = \dfrac{e^{x^2}}{2x^2}$.

Conclusion : La solution générale de cette équation différentielle est $y_G(x) = \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{e^{x^2}}{2x^2}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

3. D'après le principe de superposition, voir Théorème 4 page 82, nous avons $y_G(x) = \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{e^{x^2}}{2x^2}$, avec $c \in \mathbb{R}$.
4. Tout d'abord il faut ramener l'équation à la forme étudiée en cours, c'est à dire : $y' + \alpha(x) = \gamma(x)$. Dans notre cas nous obtenons :

$$y' + \frac{e^x}{1+e^x}y = 1.$$

Calcul de y_0 ***:*** Ici $\alpha(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et $A(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \ln(1+e^x)$.

Nous avons utilisé la formule $\int u'(x)/u(x)dx = \ln\big(u(x)\big)$.

D'où $y_0(x) = ce^{-\ln(1+e^x)} = ce^{\ln\left((1+e^x)^{-1}\right)} = \dfrac{c}{1+e^x}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Calcul de y_p ***:***

Nous sommes amenés à calculer : $F(x) = \displaystyle\int 1.(1+e^x)dx = x + e^x$.

On en déduit : $y_p(x) = \dfrac{x+e^x}{1+e^x}$.

Conclusion : La solution générale de cette équation différentielle est $y_G(x) = \dfrac{c}{1+e^x} + \dfrac{x+e^x}{1+e^x}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

5. Nous remplaçons x par 0 dans la formule : $\dfrac{c}{1+e^x} + \dfrac{x+e^x}{1+e^x}$.

On obtient $y(0) = \dfrac{c}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$.

On en déduit $c = 4$ et $y(x) = \dfrac{4}{1+e^x} + \dfrac{x+e^x}{1+e^x}$.

Correction de l'exercice 6.

Toutes les équations de cet exercice ont la même équation homogène associée. Nous calculons donc une fois pour toutes la solution y_0.

Calcul de y_0 ***:***

Ici $\alpha(x) = -2$ et $A(x) = \displaystyle\int -2dx = -2x$.

D'où $y_0(x) = ce^{2x}$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Calcul de y_p :

1. Comme $\alpha(x)$ est une constante et le second membre $2x+1$ est un polynôme nous pouvons d'après la Proposition 1, rechercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = ax + b$.
   Cela donne : $y_p'(x) = a$, de plus y_p doit vérifier $y_p'(x) - 2y_p(x) = 2x + 1$. On déduit alors :
$$\begin{aligned} y_p'(x) - 2y_p(x) &= a - 2(ax+b) \\ &= -2ax + a - 2b \\ &= 2x + 1. \end{aligned}$$
   Par identification des coefficients, nous obtenons : $\begin{cases} -2a = 2 \\ a - 2b = 1. \end{cases}$
   D'où $a = -1$ et $b = -1$ et $y_p(x) = -x - 1$.
   Conclusion : $y_G(x) = ce^{2x} - x - 1$.
2. Comme $\alpha(x)$ est une constante et le second membre $3e^{5x}$ est de la forme ae^{5x}, nous pouvons d'après la Proposition 2, rechercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = ae^{5x}$ car $5 \neq -\alpha = 2$.
   Cela donne : $y_p'(x) = 5ae^{5x}$, de plus y_p doit vérifier $y_p'(x) - 2y_p(x) = 3e^{5x}$. On déduit alors :
$$\begin{aligned} y_p'(x) - 2y_p(x) &= 5ae^{5x} - 2.ae^{5x} \\ &= 3ae^{5x} \\ &= 3e^{5x}. \end{aligned}$$
   Par identification des coefficients, nous obtenons : $a = 1$. D'où $y_p(x) = e^{5x}$.
   Conclusion : $y_G(x) = ce^{2x} + e^{5x}$.
3. Comme $\alpha(x)$ est une constante et le second membre $1\cos(3x) - 5\sin(3x)$ est de la forme $a\cos(3x) + b\sin(3x)$ nous pouvons d'après la Proposition 3, rechercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$.
   Cela donne : $y_p'(x) = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$, de plus y_p doit vérifier $y_p'(x) - 2y_p(x) = 1\cos(3x) - 5\sin(3x)$. On déduit alors :
$$\begin{aligned} y_p'(x) - 2y_p(x) &= -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x) - 2\big(a\cos(3x) + b\sin(3x)\big) \\ &= (-2a+3b)\cos(3x) + (-3a-2b)\sin(3x) \\ &= \cos(3x) - 5\sin(3x). \end{aligned}$$
   Par identification, nous obtenons :
$$\begin{cases} -2a + 3b = 1 \\ -3a - 2b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a + 9b = 3 \\ -6a - 4b = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a + 9b = 3 \\ 13b = 13. \end{cases}$$
   D'où $a = 1$ et $b = 1$ et $y_p(x) = \cos(3x) + \sin(3x)$.
   Conclusion : $y_G(x) = ce^{2x} + \cos(3x) + \sin(3x)$.

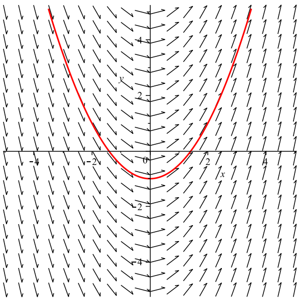
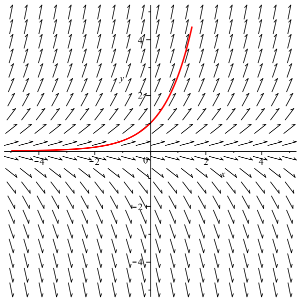
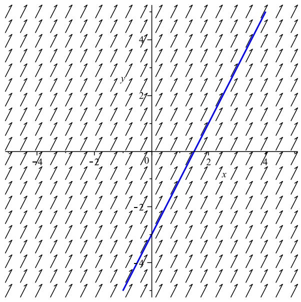
4. Comme $\alpha(x)$ est une constante et le second membre $17e^{2x}$ est de la forme ae^{2x}, nous pouvons d'après la Proposition 2, rechercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = xae^{2x}$ car $2 = -\alpha$.
   Cela donne : $y_p'(x) = ae^{2x} + x.a.2e^{2x}$, de plus y_p doit vérifier $y_p'(x) - 2y_p(x) = 17e^{2x}$. On déduit alors :
   $$\begin{aligned} y_p'(x) - 2y_p(x) &= ae^{2x} + x.a.2e^{2x} - 2(xae^{2x}) \\ &= ae^{2x} \\ &= 17e^{2x}. \end{aligned}$$
   Par identification des coefficients, nous obtenons : $a = 17$. D'où $y_p(x) = 17e^{2x}$.
   Conclusion : $y_G(x) = ce^{2x} + 17e^{2x}$.
5. Comme $\alpha(x)$ est une constante et le second membre $\cos(x)e^{2x}$ est de la forme $\big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)e^{2x}$, nous pouvons d'après la Proposition 3, rechercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = \big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)e^{2x}$.
   Cela donne : $y_p'(x) = \big(-a\sin(x) + b\cos(x)\big)e^{2x} + \big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)2e^{2x}$, de plus y_p doit vérifier $y_p'(x) - 2y_p(x) = \cos(x)e^{2x}$. On déduit alors :
   $$\begin{aligned} y_p'(x) - 2y_p(x) &= \big(-a\sin(x) + b\cos(x)\big)e^{2x} + \big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)2e^{2x} \\ &\quad -2\big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)e^{2x} \\ &= \big(-a\sin(x) + b\cos(x)\big)e^{2x} \\ &= \cos(x)e^{2x}. \end{aligned}$$
   Par identification, nous obtenons : $a = 0$, $b = 1$.
   D'où $y_p(x) = \sin(x)e^{2x}$.
   Conclusion : $y_G(x) = ce^{2x} + \sin(x)e^{2x}$.

Correction de l'exercice 7. Un calcul rapide montre que :

- l'équation différentielle $y' = y$ a pour solution $y(x) = ce^x$, avec $c \in \mathbb{R}$,
- l'équation différentielle $y' = 2$ a pour solution $y(x) = 2x + c$, avec $c \in \mathbb{R}$,
- l'équation différentielle $y' = x$ a pour solution $y(x) = \dfrac{x^2}{2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

Nous avons alors : $1 \longleftrightarrow b$; $2 \longleftrightarrow c$; $3 \longleftrightarrow a$.

Voici la représentation d'une solution pour chacune des équations différentielles :

a)  b)  c) 

Chapitre 2

Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

2.1 Généralités

Dans ce chapitre nous étudions des équations différentielles d'ordre 2, donc de la forme $f(x, y, y', y'') = 0$. En toute généralité nous ne savons pas résoudre de telles équations. Comme pour l'ordre 1, nous pouvons aussi montrer que certaines équations de ce type ont des solutions que nous ne pouvons pas exprimer à l'aide des fonctions usuelles. Nous allons donc restreindre notre étude aux équations du type suivant :

$$(E) : \quad y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma(x), \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \gamma(x) \text{ est une fonction.}$$

Ce type d'équations apparait en physique lorsque l'on étudie des phénomènes oscillants (étude du mouvement d'une masse attachée à un ressort, d'un pendule, ou encore dans l'étude de la tension dans un circuit électrique RLC).

Nous savons déjà résoudre un cas particulier d'équations différentielles d'ordre 2. Lorsque α et β sont nuls, résoudre l'équation différentielle revient à calculer deux primitives.

Exercice 1. *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' = x^5$.

Solution : Nous avons $y'(x) = \int y''(x)dx = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c_1$, avec $c_1 \in \mathbb{R}$. On en déduit : $y(x) = \int y'(x)dx = \int \frac{x^6}{6} + c_1 dx = \frac{x^7}{42} + c_1 x + c_2$, avec $c_2 \in \mathbb{R}$.

Cet exemple illustre un phénomène plus général. On peut montrer, sous certaines hypothèses qui seront toujours vérifiées dans ce cours, que *la solution d'une équation différentielle d'ordre 2 dépend de 2 paramètres.*
Rappel : A l'ordre 1 nous avions une seul paramètre.

Pour illustrer à l'aide d'une figure les équations différentielles d'ordre 2, il faut utiliser l'astuce suivante :

On pose $y' = z$, donc $y'' = z'$. Cela donne :
$z' = y'' = -\alpha y' - \beta y + \gamma(x) = -\alpha z - \beta y - \gamma(x)$. Ainsi on a :

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\alpha z - \beta y - \gamma(x) \end{pmatrix}.$$

Cela signifie que pour chaque point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ nous pouvons calculer un vecteur directeur d'une courbe dans l'espace... Nous ne développerons pas d'avantage ce point de vue dans ce cours.

2.2 Résolution

Comme à l'ordre 1, la solution générale d'une équation différentielle sera la somme de la solution de l'équation homogène associée et d'une solution particulière. La démonstration est identique.

Théorème 1. *La solution générale y_G de l'équation différentielle*

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma(x),$$

est donnée par

$$y_G = y_0 + y_p,$$

où y_0 est la solution de l'équation homogène associée : (H) : $\quad y'' + \alpha y' + \beta y = 0$, et y_p est une solution particulière.

2.2.1 Résolution de l'équation homogène associée

Dans le chapitre précédent nous avons vu que la solution de l'équation différentielle $y' + \alpha y = 0$ est $y_0 = ce^{-\alpha x}$, avec $c \in \mathbb{R}$. Cherchons à voir si à l'ordre 2 nous avons aussi des solutions de ce type.
On pose $y(x) = e^{rx}$, avec $r \in \mathbb{R}$. On a $y'(x) = re^{rx}$, et $y''(x) = r^2 e^{rx}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) &= r^2 e^{rx} + \alpha r e^{rx} + \beta e^{rx} \\ &= (r^2 + \alpha r + \beta) e^{rx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme un exponentielle est toujours positive, on en déduit :

Théorème 2. *La fonction e^{rx} est une solution de (H), si et seulement si r est solution de :*

$$r^2 + \alpha r + \beta = 0,$$

cette équation s'appelle l'équation caractéristique associée à (H).

Nous avons vu que la solution d'une équation différentielle d'ordre 2 dépend de deux paramètres. Cela signifie que nous avons besoin de 2 fonctions pour représenter toutes les solutions. Voyons comment nous obtenons ces 2 fonctions :

Soit $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$, le discriminant de $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

- **Si $\Delta > 0$** alors nous avons deux solutions $r_1 = \dfrac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2}$.

Donc, d'après le Théorème 2, nous avons deux solutions $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et $y_2(x) = e^{r_2 x}$.
Toutes les solutions de (H) sont donc données par : $c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- **Si $\Delta = 0$** alors nous n'avons qu'une racine $r_0 = \dfrac{-\alpha}{2}$ à l'équation caractéristique.

Nous avons donc comme solution pour l'équation différentielle $e^{r_0 x}$. Il nous manque donc une solution. On peut remarquer aussi que la fonction xe^{rx} est aussi solution de l'équation différentielle.
En effet, on pose $y(x) = xe^{r_0 x}$. On a $y'(x) = (1 + r_0 x)e^{r_0 x}$, et $y''(x) = (2r_0 + r_0^2 x)e^{r_0 x}$.
Cela donne :

$$\begin{aligned} y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) &= (2r_0 + r_0^2 x)e^{r_0 x} + \alpha(1 + r_0 x)e^{r_0 x} + \beta x e^{r_0 x} \\ &= \big((r_0^2 + \alpha r_0 + \beta)x + (2r_0 + \alpha)\big)e^{r_0 x} \end{aligned}$$

Comme r_0 est solution de l'équation caractéristique et que $r_0 = \dfrac{-\alpha}{2}$, nous obtenons $xe^{r_0 x}$ est aussi solution de (H).
Ainsi, lorsque $\Delta = 0$, toutes les solutions de (H) sont données par : $c_1 e^{r_0 x} + c_2 x e^{r_0 x}$.

- **Si $\Delta < 0$** alors alors nous avons deux solutions complexes $r_1 = a + ib$ et $r_2 = a - ib$, avec $a = \dfrac{-\alpha}{2}$ et $b = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Autrement dit les racines sont de la forme : $\dfrac{-\alpha \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2}$.

Le Théorème 2 nous donne alors : $e^{(a+ib)x}$ et $e^{(a-ib)x}$ sont solutions de l'équation différentielle. Toutes les solutions de (H) s'écrivent donc $c_1 e^{(a+ib)x} + c_2 e^{(a-ib)x}$.
Comme nous cherchons des solutions réelles nous allons essayer de faire disparaitre le nombre complexe i. Avec $c_1 = 1/2$ et $c_2 = 1/2$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{(a+ib)x} + \frac{1}{2}e^{(a-ib)x} &= \frac{1}{2}e^{ax}e^{ibx} + \frac{1}{2}e^{ax}e^{-ibx} \\ &= e^{ax}\left(\frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2}\right) \\ &= e^{ax}\cos(bx). \end{aligned}$$

De même en prenant $c_1 = 1/2i$ et $c_2 = -1/2i$ nous faisons apparaitre la solution $e^{ax}\sin(bx)$. Nous avons donc obtenu 2 solutions pour l'équation (H).
Ainsi, lorsque $\Delta < 0$, toutes les solutions de (H) sont données par :
$c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$.
En résumé :

Théorème 3. *Soit* $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$, *le discriminant de* $r^2 + \alpha r + \beta = 0$.

1. *Si* $\Delta > 0$ *alors les solutions de* (H) *sont données par :*
$$y_0(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$
où
$$r_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \textit{et} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. *Si* $\Delta = 0$ *alors les solutions de* (H) *sont données par :*
$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_0 x},$$
où
$$r_0 = \frac{-\alpha}{2} \quad \textit{et} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. *Si* $\Delta < 0$ *alors les solutions de* (H) *sont données par :*
$$y_0(x) = c_1 e^{ax}\cos(bx) + c_2 e^{ax}\sin(bx)$$
où
$$a \pm ib = \frac{-\alpha}{2} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \quad \textit{et} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2. *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' + y' - 2y = 0$.

Solution :
L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$. Dans ce cas nous avons : $\Delta = 9 > 0$, et deux racines distinctes $r_1 = -2$ et $r_2 = 1$.
Ainsi, $y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Solution :
L'équation caractéristique est $r^2 - 6r + 9 = 0$. Dans ce cas nous avons : $\Delta = 0$, et une seule racine $r_0 = 3$.
Ainsi, $y_0(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. *Résoudre l'équation différentielle :* $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Solution :
L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 29 = 0$. Dans ce cas nous avons : $\Delta = -100$, et deux racines complexes $a \pm ib = \dfrac{4}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{|-100|}}{2} = 2 \pm i5$. Donc.
Ainsi, $y_0(x) = c_1 e^{2x} \cos(5x) + c_2 e^{2x} \sin(5x)$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Calcul d'une solution particulière

Nous avons vu au chapitre précédent que lorsque nous avons des coefficients constants alors nous pouvons chercher une solution particulière sous la même forme que le seconde membre $\gamma(x)$. Cette astuce reste valable ici.

Théorème 4. *On suppose que* $\gamma(x)$ *est :*
- *soit polynôme, c'est à dire* $\gamma(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$,
- *soit une exponentielle, c'est à dire* $\gamma(x) = e^{ax}$,
- *soit une combinaison linéaire de cosinus et de sinus, c'est à dire :* $\gamma(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$,
- *soit un produit de ces différentes fonctions.*

Si $\gamma(x)$ *n'est pas de la forme* $P(x)y_0(x)$, *avec* $P(x)$ *un polynôme, alors nous pouvons chercher une solution particulière* $y_p(x)$ *sous la même forme que* $\gamma(x)$.

Si $\gamma(x)$ *est de la forme* $P(x)y_0(x)$, *avec* $P(x)$ *un polynôme, on cherche* $y_p(x)$
- *sous la forme* $xQ(x)y_0(x)$ *lorsque* $\Delta \neq 0$,
- *sous la forme* $x^2Q(x)y_0(x)$ *lorsque* $\Delta = 0$.

Exercice 5. *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + y' - 2y = x^2 + 2x + 3$.

Solution : Nous avons vu l'Exercice 2, que $y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Le second membre $\gamma(x)$ n'est donc pas du type $P(x)y_0(x)$. On cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.
Nous avons $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. Cela donne :

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) &= 2a + 2ax + b - 2(ax^2 + bx + c) \\ &= -2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c \\ &= x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

En identifiant, les coefficients on obtient :

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 2 \\ b - 2c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1/2 \\ b = -3/2 \\ c = -9/4. \end{cases}$$

Ainsi la solution générale de cette équation est : $y_G(x) = c_1e^{-2x}+c_2e^x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{9}{4}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + y' - 2y = (6x + 4)e^{-2x}$.

Solution : Nous avons vu à l'Exercice 2, que $y_0(x) = c_1e^{-2x}+c_2e^x$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Le second membre $\gamma(x)$ est du type $P(x)y_0(x)$. En effet, on prend $P(x) = 6x + 4$ et $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ dans l'expression de y_0.

On cherche alors une solution particulière sous la forme $y_p(x) = x(ax + b)e^{-2x}$, car $\Delta \neq 0$.

Nous avons $y_p'(x) = \big(- 2ax^2 + (2a - 2b)x + b\big)e^{-2x}$ et

$y_p''(x) = \big(4ax^2 + (-8a + 4b)x + 2a - 4b\big)e^{-2x}$. Cela donne :

$$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p'(x) - 2y_p(x) &= (-6ax + 2a - 3b)e^{-2x} \\ &= (6x + 4)e^{-2x} \end{aligned}$$

En identifiant, les coefficients on obtient :

$$\begin{cases} -6a = 6 \\ 2a - 3b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases}$$

Ainsi la solution générale de cette équation est : $y_G(x) = c_1e^{-2x}+c_2e^x+x(-x-2)e^{-2x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Sujet de méditation :

Pouvez vous donner une formule pour la solution générale de l'équation suivante :

$$y'' + f(y)y' + g(y) = 0,$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont deux polynômes ?

Cette équation s'appelle l'équation de Liénard.

2.3 Exercices du TD

Exercice 1. *Résoudre :*

1. $y'' - 3y' - 4y = (12x + 7)e^{2x}$,
2. $y'' - 3y' - 4y = (-50x + 5)e^{-x}$,
3. $y'' - 4y' + 4y = 9e^{-x}$,
4. $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$,
5. $y'' - 4y' + 4y = 9e^{-x} + 6e^{2x}$,
6. $y'' + 4y' + 13y = 40\sin(3x)$,
7. $y'' + y = 4\cos(x) - \sin(x)$,
8. $y'' + 4y = 2x^2$.

Exercice 2. *Le but de cet exercice est de montrer pourquoi lorsque $\Delta = 0$, la solution "en plus" de $\mathrm{e}^{r_0 x}$ est du type $x\mathrm{e}^{r_0 x}$. Nous allons voir d'où vient cette multiplication par x sur l'étude de l'exemple : $y'' - 8y' + 16y = 0$.*

1. *Résoudre l'équation différentielle $y'' - 8y' + 16y = 0$.*
2. *On considère l'équation différentielle $(E_h) : y'' - (8 + h)y' + (16 + 4h)y = 0$. Résoudre, cette équation lorsque $h > 0$.*
3. *En déduire que la fonction $y_h(x) = \dfrac{1}{h}\mathrm{e}^{(4+h)x} - \dfrac{1}{h}\mathrm{e}^{4x}$ est une solution de (E_h).*
4. *Lorsque h tend vers 0 vers quelle équation tend (E_h) ?*
5. *Lorsque h tend vers 0 vers quelle est la limite de $y_h(x)$?*

2.4 Correction des exercices

Correction de l'exercice 1.

1. *Calcul de y_0 :*
   Equation caractéristique : $r^2 - 3r - 4 = 0$.
   On en déduit $\Delta = 9 - 4.(-4) = 25 > 0$. Les racines associées à cette équation sont : $r_1 = 4$ et $r_2 = -1$.
   D'après le Théorème 3, nous obtenons : $y_0(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p :
   Nous cherchons une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = (ax + b)e^{2x}$.
   Donc :
   $y_p'(x) = ae^{2x} + 2(ax + b)e^{2x} = (2ax + 2b + a)e^{2x}$,
   $y_p''(x) = 2ae^{2x} + (2ax + 2b + a).2.e^{2x} = (4ax + 4b + 4a)e^{2x}$.

   De plus nous avons :

   $$\begin{aligned} y_p''(x) - 3y_p'(x) - 4y_p(x) &= (4ax + 4b + 4a)e^{2x} - 3(2ax + 2b + a)e^{2x} - 4(ax + b)e^{2x} \\ &= (-6ax + a - 6b)e^{2x} \\ &= (12x + 7)e^{2x} \end{aligned}$$

   Par identification nous obtenons : $\begin{cases} -6a = 12 \\ a - 6b = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3/2 \end{cases}$.
   D'où : $y_p(x) = (-2x - 3/2)e^{2x}$.

   Conclusion : $y_G(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + (-2x - 3/2)e^{2x}$.

2. *Calcul de y_0 :* voir question précédente.
   Nous avons donc $\Delta \neq 0$ et $y_0(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p :
   En prenant $c_2 = 0$, $c_1 = 1$ et $P(x) = -50x + 5$ alors le second membre de l'équation est du type $P(x)y_0(x)$. Le Théorème 4 nous dit alors que nous pouvons chercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = x(ax+b)e^{-x}$.
   Donc :

   $$\begin{aligned} y_p(x) &= (ax^2 + bx)e^{-x}, \\ y_p'(x) &= (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx)e^{-x} = \big(- ax^2 + (2a - b)x + b\big)e^{-x}, \\ y_p''(x) &= (-2ax + (2a - b))e^{-x} - (-ax^2 + (2a + b)x + b)e^{-x} \\ &= \big(ax^2 + (-4a + b)x + 2a - 2b\big)e^{-x}. \end{aligned}$$

De plus nous avons :

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 3y_p'(x) - 4y_p(x) &= \big(ax^2 + (-4a+b)x + 2a - 2b\big)e^{-x} - 3\big(-ax^2 + (2a-b)x + b\big)e^{-x} \\ &\quad -4(ax^2+bx)e^{-x} \\ &= (-10ax + 2a - 5b)e^{-x} \\ &= (-50x+5)e^{-x} \end{aligned}$$

Par identification nous obtenons : $\begin{cases} -10a = -50 \\ 2a - 5b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases}$.

D'où : $y_p(x) = (5x^2 + x)e^{-x}$.

Conclusion : $y_G(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + (5x^2 + x)e^{-x}$.

3. *Calcul de y_0 :*
   Equation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0$.
   On en déduit $\Delta = 4^2 - 4.4 = 0$. Nous avons donc une racine double qui est $r_0 = 4/2 = 2$.
   D'après le Théorème 3, nous obtenons : $y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p :
   Nous cherchons une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = ae^{2x}$. Donc :
   $y_p'(x) = -ae^{-x}$,
   $y_p''(x) = ae^{-x}$.

   De plus nous avons :

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) &= ae^{-x} - 4.(-a)e^{-x} + 4ae^{-x} \\ &= (9a)e^{-x} \\ &= 9e^{-x} \end{aligned}$$

   Par identification nous obtenons : $a = 1$.
   D'où : $y_p(x) = e^{-x}$.

   Conclusion : $y_G(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + e^{-x}$.

4. *Calcul de y_0 :* voir question précédente.
   Nous avons donc $\Delta = 0$ et $y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p :
   En prenant $c_1 = 6$, $c_2 = 0$ et $P(x) = 1$ alors le second membre de l'équation est du type $P(x)y_0(x)$. Le Théorème 4 nous dit alors que nous pouvons chercher

une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = x^2.a.e^{-x}$. Donc :

$$\begin{aligned} y_p(x) &= ax^2e^{2x}, \\ y_p'(x) &= 2axe^{2x} + ax^2 2e^{2x} = (2ax^2 + 2ax)e^{2x}, \\ y_p''(x) &= (4ax + 2a)e^{2x} + (2ax^2 + 2ax)2e^{2x} = (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x} \end{aligned}$$

De plus nous avons :

$$\begin{aligned} y_p''(x) - 4y_p'(x) + 4y_p(x) &= (4ax^2 + 8ax + 2a)e^{2x} - 4.(2ax^2 + 2ax)e^{2x} + 4.ax^2e^{2x} \\ &= (2a)e^{2x} \\ &= (6)e^{2x} \end{aligned}$$

Par identification nous obtenons : $a = 3$. D'où : $y_p(x) = 3x^2e^{2x}$.

Conclusion : $y_G(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + 3x^2e^{2x}$.

5. A l'aide des deux questions précédentes et du principe de superposition nous obtenons : $y_G(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + e^{-x} + 3x^2e^{2x}$.
6. *Calcul de y_0 :*
   Equation caractéristique : $r^2 + 4r + 13 = 0$.
   On en déduit $\Delta = 4^2 - 4.13 = -36 < 0$. D'où :
   $$a \pm ib = \frac{-4 \pm i\sqrt{|-36|}}{2} = -2 \pm 3i$$
   D'après le Théorème 3, nous obtenons : $y_0(x) = c_1\cos(3x)e^{-2x} + c_2\sin(3x)e^{-2x}$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p :
   Nous cherchons une solution particulière sous la forme :
   $y_p(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$. Donc :
   $y_p'(x) = -3a\sin(3x) + 3b\cos(3x)$,
   $y_p''(x) = -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x)$.

   De plus nous avons :
   $$\begin{aligned} y_p''(x) + 4y_p'(x) + 13y_p(x) &= (4a + 12b)\cos(3x) + (-12a + 4b)\sin(3x) \\ &= 40\sin(3x) \end{aligned}$$

   Par identification nous obtenons :
   $$\begin{cases} 4a + 12b = 0 \\ -12a + 4b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a + 36b = 0 \\ -12a + 4b = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 40b = 40 \\ -12a + 4b = 40. \end{cases}$$

D'où : $a = -3$, $b = 1$ et $y_p(x) = -3\cos(3x) + \sin(3x)$.

Conclusion : $y_G(x) = c_1 \cos(3x)e^{-2x} + c_2 \sin(3x)e^{-2x} - 3\cos(3x) + \sin(3x)$.

7. *Calcul de* y_0 *:*
   Equation caractéristique : $r^2 + 1 = 0$.
   Nous avons deux racines évidentes i et $-i$. D'où :

   $$a \pm ib = 0 \pm 1.i$$

   D'après le Théorème 3, nous obtenons : $y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p *:*
   En prenant $c_1 = 4$, $c_2 = -1$ et $P(x) = 1$ alors le second membre de l'équation est du type $P(x)y_0(x)$. Le Théorème 4 nous dit alors que nous pouvons chercher une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = x\big(a\cos(x) + b\sin(x)\big)$. Donc :

   $$\begin{aligned} y_p'(x) &= a\cos(x) + b\sin(x) + x\big(-a\sin(x) + b\cos(x)\big), \\ y_p''(x) &= -2a\sin(x) + 2b\cos(x) + x\big(-a\cos(x) - b\sin(x)\big). \end{aligned}$$

   De plus nous avons :

   $$\begin{aligned} y_p''(x) + y_p(x) &= -2a\sin(x) + 2b\cos(x) \\ &= 4\cos(x) - \sin(x) \end{aligned}$$

   Par identification nous obtenons : $a = 1/2$ et $b = 2$. D'où : $y_p(x) = \frac{1}{2}x\cos(x) + 2x\sin(x)$.

   Conclusion : $y_G(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) + 2x\sin(x)$.

8. *Calcul de* y_0 *:*
   Equation caractéristique : $r^2 + 4 = 0$.
   On en déduit $\Delta = 0 - 4.4 = -16 < 0$. D'où :

   $$a \pm ib = \frac{0 \pm i\sqrt{|-16|}}{2} = 0 \pm 2i$$

   D'après le Théorème 3, nous obtenons : $y_0(x) = c_1\cos(2x) + c_2\sin(2x)$, avec $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

   Calcul de y_p *:*
   Nous cherchons une solution particulière sous la forme : $y_p(x) = ax^2 + bx + c$.

Donc :
$y_p'(x) = 2ax + b$,
$y_p''(x) = 2a$.

De plus nous avons :

$$\begin{aligned} y_p''(x) + 4y_p(x) &= 2a + 4(ax^2 + bx + c)) \\ &= 4ax^2 + 4bx + 2a + 4c \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

Par identification nous obtenons :
$\begin{cases} 4a = 2 \\ 4b = 0 \\ 2a + 4c = 0 \end{cases}$
D'où : $a = 1/2$, $b = 0$, $c = -1/4$ et $y_p(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}$.

Conclusion : $y_G(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 2.

1. L'équation caractéristique associée à $y'' - 8y' + 16y = 0$ est $r^2 - 8r + 16 = 0$.
   Pour cette équation nous avons $\Delta = 8^2 - 4.16 = 0$.
   Nous avons une racine double $r_0 = 4$.
   Ainsi la solution de $y'' - 8y' + 16y = 0$ est $c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$.
2. L'équation caractéristique associée à $y'' - (8+h)y' + (16+4h)y = 0$ est $r^2 - (8+h)r + (16+4h) = 0$.
   Pour cette équation nous avons
   $$\Delta = (8+h)^2 - 4(16+4h) = 64 + 16h + h^2 - 64 - 16h = h^2.$$
   Nous obtenons alors deux racines distinctes : $r_1 = 4$ et $r_2 = 4 + h$.
   Ainsi la solution de l'équation différentielle considérée est :
   $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{(4+h)x}$, avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
3. En prenant $c_1 = -1/h$ et $c_2 = 1/h$ nous obtenons le résultat désiré.
4. Lorsque h tend vers 0 l'équation (E_h) tend vers $y'' - 8y' + 16y = 0$.
5. Lorsque h tend vers 0 la limite de $y_h(x)$ est par définition de la dérivée
   $$\lim_{h\to 0} y_h(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(4+h)x} - e^{4x}}{h} = f'(4) = xe^{4x},$$
   où $f(y) = e^{xy}$.
   Conclusion : (E_h) tend vers $y'' - 8y' + 16y = 0$ lorsque h tend vers 0. Nous

nous attendons donc à ce que les solutions de (E_h) tendent vers les solutions de $y'' - 8y' + 16y = 0$ lorsque h tend vers 0. C'est effectivement ce qu'il se passe : y_h est une solution de (E_h) et lorsque h tend vers 0 nous avons y_h qui tend vers xe^{4x} qui est la solution en plus de e^{4x} de $y'' - 8y' + 16y = 0$.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Annales corrigées

IUT Génie Civil **DUT – 2010/2011**
Mathématiques

Examen du 15 Avril 2011

Sujet I

Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, Et les mots pour le dire arrivent aisément.
Nicolas BOILEAU (1636-1711) (Recueil : L'art poétique ; Chant I))

C'est à dire : La qualité, la clarté et la présentation de vos résultats sont prises en considération pour l'évaluation de votre travail.

Documents autorisés : Une feuille A4 recto-verso manuscrite + une calculatrice "collège".

Exercice 7 (7 points)**.** *Etude de la fonction :* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

1. *Donner le plus grand domaine de définition possible pour* f.
2. *Déterminer les lignes de niveaux* $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$.
3. *Tracer l'intersection de la surface représentative de* f*, notée* $\mathcal{S}_f$*, avec le plan d'équation* $y = 0$*. (Rappel :* $\sqrt{x^2} = |x|$*.)*
4. *Donner une représentation de* $\mathcal{S}_f$ *dans l'espace.*

Exercice 8 (4 points)**.** *On considère la fonction* $f(r, h) = \pi r^2 h$*. (*f *est donc une fonction de deux variables* r *et* h*.)*

1. *Calculer* df.
2. *Le volume* V *d'un cylindre de rayon* r *et de hauteur* h *est donné par la formule :* $\pi r^2 h$*. Après avoir effectué des mesures on obtient :* $r = 2 \pm 0,1m$ *et* $h = 5 \pm 0,1m$.
   Calculer l'ordre de grandeur Δ_V *de l'erreur absolue commise sur* V *à partir de ces mesures.*
3. *Calculer l'erreur relative commise à partir de ces mesures.*

Exercice 9 (6 points)**.** *On considère la fonction suivante :* $f(x, y) = \cos(x^3 y^2 + 5x + 7y - 1)$.
Calculer les dérivées suivantes.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Exercice 10 (3 points)**.** *Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par la fonction f :*

$$f(x) = \frac{A}{x^2} \text{ si } x \geq 7,$$

$$f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. *Calculer A.*
2. *Calculer la probabilité $P(9 \leq X \leq 10)$.*

IUT Génie Civil **DUT – 2010/2011**
Mathématiques

Correction du Partiel du 15 Avril 2011, Sujet I

Exercice 1. *1.* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$.

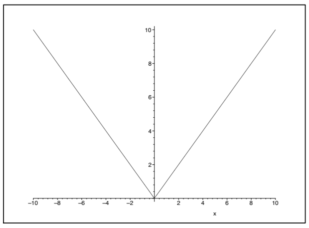
2. $\mathcal{S}_f \cap \{z = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = -1\} = \emptyset$.

$\mathcal{S}_f \cap \{z = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0; 0)\}$.

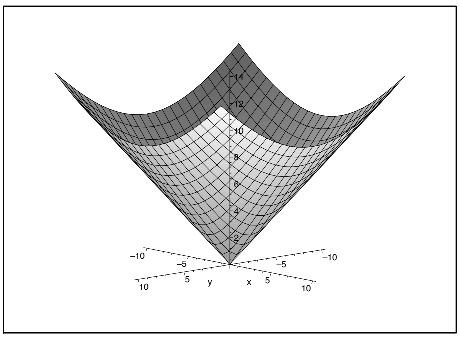
$\mathcal{S}_f \cap \{z = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.
Nous obtenons le cercle de centre $(0; 0)$ *et de rayon 1.*

$\mathcal{S}_f \cap \{z = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$.
Nous obtenons le cercle de centre $(0; 0)$ *et de rayon 2.*

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, *donc lorsque* $y = 0$ *nous avons :* $z = \sqrt{x^2} = |x|$.



4. Nous obtenons un cône de sommet l'origine du repère et d'axe (Oz).



Exercice 2. *1.* $df = 2\pi rh dr + \pi r^2 dh$.

2. $\Delta_V = |2\pi rh|\Delta_r + |\pi r^2|\Delta_h = |2\times 2\pi \times 5| \times 0,1 + |4\pi| \times 0,1 = 2,4\pi \approx 7,5$.

3. $\dfrac{\Delta_V}{V} = \dfrac{2,4\pi}{\pi \times 4 \times 5} = \dfrac{2,4}{20} = 12\%$.

Exercice 3. *On pose* $u(x,y) = x^3y^2 + 5x + 7y - 1$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = -(3x^2y^2+5)\sin(u(x,y))$,

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -(2x^3y+7)\sin(u(x,y))$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -(6x^2y)\sin(u(x,y)) - (2x^3y+7)(3x^2y^2+5)\cos(u(x,y))$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^3\sin(u(x,y)) - (2x^3y+7)^2\cos(u(x,y))$.

Exercice 4. *1. Nous avons :* $1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{7} 0dx + \int_{7}^{+\infty} \frac{A}{x^2}dx = 0 + \Big[-\frac{A}{x}\Big]_7^{+\infty} = \Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{-A}{x}\Big) - \frac{-A}{7} = -A(0-\frac{1}{7})$.

Donc $A = 7$.

2. $P(9 \le X \le 10) = \displaystyle\int_9^{10} \frac{7}{x^2}dx = 7\Big[-\frac{1}{x}\Big]_9^{10} = \frac{7}{90}$.

IUT Génie Civil

DUT – 2011/2012
Mathématiques

Examen du 2 MARS 2012

Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement, Et les mots pour le dire arrivent aisément.
Nicolas BOILEAU (1636-1711) (Recueil : L'art poétique ; Chant I))

C'est à dire : La qualité, la clarté et la présentation de vos résultats sont prises en considération pour l'évaluation de votre travail.

Documents interdits
Calculatrice interdite

Rappel :

$(u.v)' = u'v + uv'$, $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\quad \big(\cos(u)\big)' = -\sin(u).u'$,

$\big(\sin(u)\big)' = \cos(u).u'$, $\quad \big(e^u\big)' = u'.e^u$, $\quad (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, $\quad \big(\ln(u)\big)' = \dfrac{u'}{u}$.

Exercice 1 (5 points)**.** *Déterminer et représenter le plus grand domaine de définition possible de la fonction* $f(x,y) = \sqrt{(x-2).(y-x^2+3)}$*.*
Dans votre dessin vous hachurerez la région correspondante au domaine de définition.

Exercice 2 (3 points)**.** *Déterminer la ligne de niveau* $z = 0$ *de la fonction* $f(x,y) = \ln(x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2)$*.*

Exercice 3 (6 points)**.** *On considère la fonction suivante :*

$$f(x,y) = e^{x^5y^7+3x^2+7y-\cos(2x)}.$$

Calculer les dérivées suivantes : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

Exercice 4 (4 points)**.** *Soit* ABC *un triangle rectangle en* B*. On note les longueurs de la manière suivante :* $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$*.*

1. *Rappeler la formule donnant le cosinus de l'angle* $\widehat{CAB}$.
2. *On a mesuré les longueurs et on a obtenu :* $x = 3 \pm 0,1cm$, $y = 4 \pm 0,1cm$, $z = 5 \pm 0,1cm$.
   Calculer l'ordre de grandeur Δ_{cos} *de l'erreur absolue commise sur* $\cos(\widehat{CAB})$ *à partir de ces mesures.*

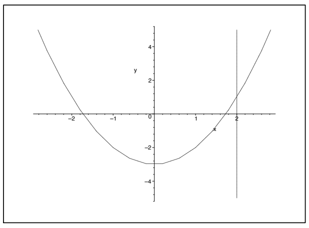
Exercice 5 (2 points)**.** *Donner une valeur approchée de* $\sqrt{24,9}$.

IUT Génie Civil **DUT – 2011/2012**
Mathématiques

Correction du Partiel du 2 Mars 2012

Exercice 1. *1.* $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2 \geq 0$ *et* $y - x^2 + 3 \geq 0,$ *ou,* $x - 2 \leq 0,$ *et* $y - x^2 + 3 \leq 0\}$.

2.



Exercice 2. *Pour trouver le ligne de niveau* $z = 0$ *de* $f(x, y) = \ln(x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2)$ *nous devons "résoudre" l'équation* $\ln(x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2) = 0$*. Cela donne*

$$\begin{aligned} 0 =& \ln(x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2) \\ \iff 1 =& x^2 - 6x + y^2 + 4y - 2 \\ \iff 1 =& (x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 2 \\ \iff 16 =& (x-3)^2 + (y+2)^2. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le cercle de centre $(3; -2)$ *et de rayon 4.*

Exercice 3. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \big(5x^4y^7 + 6x + 2\sin(2x)\big) f(x, y),$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = (7x^5y^6 + 7).f(x, y),$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \Big(35x^4y^6 + \big(7x^5y^6 + 7\big)\big(5x^4y^7 + 6x + 2\sin(2x)\big)\Big).f(x, y),$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (42x^5y^5 + (7x^5y^6 + 7)^2).f(x, y).$

Exercice 4. *1.* $\cos(\widehat{CAB}) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{x}{z}$.

2. On considère la fonction $f(x,z) = \dfrac{x}{z}$*. On a :* $df = \dfrac{1}{z}dx - \dfrac{x}{z^2}dz$.

Cela donne : $\Delta_f = \left|\dfrac{1}{z}\right|\Delta_x + \left|-\dfrac{x}{z^2}\right|\Delta_z$.

Avec les notations de l'exercice on a : $\Delta_{cos} = \Delta_f$.

D'où : $\Delta_{cos} = \left|\dfrac{1}{5}\right|.0,1 + \left|-\dfrac{3}{5^2}\right|.0,1 = \dfrac{5+3}{25}.0,1 = \dfrac{8}{25}.0,1 = \dfrac{32}{100}.0,1 = 32.10^{-3} = 0.032$

Exercice 5.

$$\begin{aligned}
\sqrt{24,9} &\approx \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}.(-0,1) \\
&\approx 5 - \frac{1}{2.5}.0,1 \\
&\approx 5 - 0,01 \\
&\approx 4,99.
\end{aligned}$$

Annexe B

Trouver l'erreur

Cette annexe s'adresse aux étudiants ayant terminer tous les exercices de TD lors d'une séance.
Vous êtes donc capable de trouver la bonne solution d'un exercice, mais pouvez vous trouver les erreurs dans les raisonnements qui suivent...

Erreur 1

$$\begin{aligned} 4-6 &= 1-3 \\ 4-6+9/4 &= 1-3+9/4 \\ (2-3/2)^2 &= (1-3/2)^2 \\ 2-3/2 &= 1-3/2 \\ 2 &= 1\ldots \end{aligned}$$

Erreur 2
Considérons deux nombres a et b. Si $a=1$ et $b=1$ alors $a=b$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} ab &= a^2 \\ ab-b^2 &= a^2-b^2 \text{ on retranche } b^2 \text{ aux deux membres} \\ b(a-b) &= (a+b)(a-b) \text{ factorisation et identité remarquable} \\ b &= a+b \text{ simplifiquation par } a-b \end{aligned}$$

On remplace a et b par leur valeur et il en résulte que : $1=2\ldots$

Erreur 3

On a : $\dfrac{-1}{1}=\dfrac{1}{-1}$.
On prend les racines carrées : $\sqrt{\dfrac{-1}{1}}=\sqrt{\dfrac{1}{-1}}$.

Cela donne : $\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} = \dfrac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}}$.
On en déduit : $\dfrac{i}{\sqrt{1}} = \dfrac{\sqrt{1}}{i}$
D'où : $\dfrac{i}{1} = \dfrac{1}{i}$
En multipliant par i à gauche et à droite il vient : $i^2 = 1$
Donc : $-1 = 1\ldots$

Erreur 4
Considérons l'équation :

$$\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Elle peut se réécrire en mettant le membre de gauche sur le même dénominateur $x-7$:

$$\frac{x+5-5(x-7)}{x-7} = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Après simplification et changement de signe on obtient :

$$\frac{4x-40}{7-x} = \frac{4x-40}{13-x}.$$

Les numérateurs étant égaux dans l'équation ci-dessus, les dénominateurs le sont aussi. Donc : $7-x = 13-x$.
Conclusion : $7 = 13$.

Erreur 5
Vous savez (ou devez connaitre) la formule suivante :

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Voici un moyen de la démontrer pour tous ceux qui auraient oublier...
Notons S la somme $1+2+3+\cdots+n$.
On a alors :

$$\begin{array}{rcl} S & = & 1+2+3+\cdots+n-1+n \\ S & = & n+(n-1)+\cdots+2+1 \end{array}$$

En sommant les deux equations précédentes colonnes par colonnes on obtient :
$2S = n+1\ +\ (n-1)+2\ +\cdots+2+(n-1)\ +\ 1+n = n\times(n+1)$
D'où la formule demandée.)

A prèsent voici la démonstration fausse :
L'égalité étant vraie pour tout entier n écrivons la pour $n-1$:
$1+2+3+\cdots+n-1 = \dfrac{(n-1)n}{2}$

On ajoute 1 à chaque membre de cette égalité :
$1+2+3+\cdots+n-1+1=\dfrac{(n-1)n}{2}+1$
Comme $n-1+1=n$ cela donne :
$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{(n-1)n}{2}+1$
En utilisant la formule rappelée ci-dessus nous avons :
$\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(n-1)n}{2}+1$
Ainsi : $n^2+n=n^2-n+2$.
Donc : $2n=2$.
Conclusion : $n=1$, et donc tout entier est égal à 1...

Erreur 6
Calculons la dérivée de x^3 de deux façons différentes :

1. Par la formule habituelle $(x^n)'=nx^{n-1}$. Ici, on obtient : $(x^3)'=3x^2$.
2. On écrit $x^3=x^2+x^2+\cdots+x^2$ (la somme comporte x fois le terme x^2).
   On dérive de chaque côté :
   $(x^3)'=(x^2)'+(x^2)'+\cdots+(x^2)'$, (la dérivée d'une somme et la somme des dérivées.)
   D'où : $(x^3)'=2x+2x+\cdots+2x$. De plus dans cette somme il y a x termes.
   Donc : $(x^3)'=x\times 2x$.
   En utilisant le résultat du 1. on trouve : $3x^2=2x^2$.
   En prenant $x=1$ dans l'égalité précédente on obtient : $3=2$...

Annexe C

Alphabet grec

Prononciation	Minuscule	Majuscule
alpha	α	
beta	β	
gamma	γ	Γ
delta	δ	Δ
epsilon	ε ou ϵ	
zeta	ζ	
eta	η	
theta	θ	Θ
iota	ι	
kappa	κ	
lambda	λ	Λ
mu	μ	
nu	ν	
ksi	ξ	Ξ
pi	π	Π
rho	ρ	
sigma	σ	Σ
tau	τ	
upsilon	υ	Υ
phi	φ ou ϕ	Φ
ki	χ	
psi	ψ	Ψ
omega	ω	Ω