

Daniel ALIBERT

Fonctions de plusieurs variables. Intégrales dépendant d'un paramètre.

Objectifs :

Chercher si une fonction de plusieurs variables est continue. Calculer ses dérivées partielles, vérifier si elle est différentiable. Déterminer ses extrema.

Etudier la convergence d'une intégrale à paramètre, la continuité, la dérivabilité, de la fonction qu'elle définit.

## Organisation, mode d'emploi

Cet ouvrage, comme tous ceux de la série, a été conçu en vue d'un usage pratique simple.

Il s'agit d'un livre d'exercices corrigés, avec rappels de cours.

Il ne se substitue en aucune façon à un cours de mathématiques complet, il doit au contraire l'accompagner en fournissant des exemples illustratifs, et des exercices pour aider à l'assimilation du cours.

Ce livre a été écrit pour des étudiants de première et seconde années des Licences de sciences, dans les parcours où les mathématiques tiennent une place importante.

Il est le fruit de nombreuses années d'enseignement auprès de ces étudiants, et de l'observation des difficultés qu'ils rencontrent dans l'abord des mathématiques au niveau du premier cycle des universités :

- difficulté à valoriser les nombreuses connaissances mathématiques dont ils disposent lorsqu'ils quittent le lycée,
- difficulté pour comprendre un énoncé, une définition, dès lors qu'ils mettent en jeu des objets abstraits, alors que c'est la nature même des mathématiques de le faire,
- difficulté de conception et de rédaction de raisonnements même simples,
- manque de méthodes de base de résolution des problèmes.

L'ambition de cet ouvrage est de contribuer à la résolution de ces difficultés aux côtés des enseignants.

Ce livre comporte quatre parties.

La première, intitulée "A Savoir", rassemble les définitions et résultats qui sont utilisés dans les exercices qui suivent. Elle ne contient ni démonstration, ni exemple.

La seconde est intitulée "Pour Voir" : son rôle est de présenter des exemples de toutes les définitions, et de tous les résultats de la partie précédente, en ne faisant référence qu'aux connaissances qu'un étudiant abordant le chapitre considéré a nécessairement déjà rencontré (souvent des objets et résultats abordés avant le baccalauréat). La moitié environ de ces exemples sont développés complètement, pour éclairer la définition ou l'énoncé correspondant. L'autre moitié est formée d'énoncés intitulés "exemple à traiter" : il s'agit de questions permettant au lecteur de réfléchir de manière active à d'autres exemples très proches des précédents. Ils sont suivis immédiatement d'explications détaillées.

La troisième partie est intitulée "Pour Comprendre et Utiliser" : des énoncés d'exercices y sont rassemblés, en référence à des objectifs. Ces énoncés comportent des renvois de trois sortes :

(☺) pour obtenir des indications pour résoudre la question,

(♫) lorsqu'une méthode plus générale est décrite,

(↪) renvoie à une entrée du lexique.

Tous les exercices sont corrigés de manière très détaillée dans la partie 3 - 2. Au cours de la rédaction, on a souvent proposé au lecteur qui souhaiterait approfondir, ou élargir, sa réflexion, des questions complémentaires (QC), également corrigées de façon détaillée.

La quatrième partie, "Pour Chercher", rassemble les indications, les méthodes, et le lexique.

Certains livres d'exercices comportent un grand nombre d'exercices assez voisins, privilégiant un aspect "entraînement" dans le travail de l'étudiant

en mathématiques. Ce n'est pas le choix qui a été fait ici : les exemples à traiter, les exercices et les questions complémentaires proposés abordent des aspects variés d'une question du niveau du L1 L2 de sciences pour l'éclairer de diverses manières et ainsi aider à sa compréhension.

Le lecteur est invité, à propos de chacun d'entre eux, à s'interroger sur ce qu'il a de général (on l'y aide par quelques commentaires)

## Table des matières

1 A Savoir.....	9
1-1 .....	9
1-2 .....	
1-3 .....	
1-4 .....	
2 Pour Voir.....	
2-1 .....	
2-2 .....	
2-3 .....	
2-4 .....	
3 Pour Comprendre et Utiliser .....	
3-1 Énoncés des exercices .....	
3-2 Corrigés des exercices.....	
3-3 Corrigés des questions complémentaires .....	
4 Pour Chercher.....	
4-1 Indications pour les exercices .....	
4-2 Méthodes .....	
4-3 Lexique.....	

---

## 1 ↗ A Savoir

---

Dans cette partie, on rappelle rapidement les principales définitions et les principaux énoncés utilisés. Vous devrez vous référer à votre cours pour les démonstrations.

Vous trouverez des exemples dans la partie 2\*Pour Voir.

---

### 1-1 Fonctions de plusieurs variables

Définition

On appelle **norme** sur  $\mathbb{R}^n$ , une application :

$$N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

qui vérifie :

$$N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$N(\lambda v) = |\lambda| \cdot N(v) \text{ pour tout réel } \lambda,$$

$$N(v + w) \leq N(v) + N(w) \text{ (inégalité triangulaire).}$$

\*\* On utilise le plus souvent la **norme euclidienne** :

$$N(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}.$$

\*\* Il en existe d'autres, qui peuvent être plus pratiques dans les calculs, et qui sont **équivalentes** à la norme euclidienne. Une norme  $N'$  est équivalente à une norme  $N$  s'il existe des réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout vecteur  $v$  :

$$\alpha \cdot N(v) \leq N'(v) \leq \beta \cdot N(v).$$

\*\* On déduit de l'inégalité triangulaire la relation :

$$N(v - w) \geq |N(v) - N(w)|.$$

\*\* Dans la suite on suppose qu'on a choisi une norme sur chacun des espaces  $\mathbb{R}^n$  considérés, dont la valeur pour un vecteur  $v$  est notée  $\|v\|$ .

Les notions introduites sont indépendantes de ce choix.

\*\* Comme dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on peut définir dans  $\mathbb{R}^n$  la notion de **point adhérent à une partie U**, dès que l'on a choisi une norme : un vecteur  $a$  de  $\mathbb{R}^n$  est adhérent à  $U$  si pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$  il existe au moins un vecteur  $u$  de  $U$  vérifiant :

$$\|a - u\| \leq \varepsilon.$$

Bien entendu, les points de  $U$  sont adhérents à  $U$  (prendre  $u = a$ ).

\*\* On dit qu'une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est **ouverte** si pour tout vecteur  $v$  appartenant à  $U$ , il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que l'ensemble suivant :

$$B(v, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - v\| < \varepsilon\}$$

soit contenu dans  $U$ .

\*\* L'ensemble décrit précédemment s'appelle la **boule ouverte** de centre  $v$  et de rayon  $\varepsilon$  (disque ouvert si  $n = 2$ ).

---

#### Définition

Une application  $f$  d'une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est souvent appelée une **fonction vectorielle de  $n$  variables**. Elle équivaut à la donnée de  $p$  fonctions de  $n$  variables à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , appelées ses **composantes** :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)).$$

\*\* Etant donné un point  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , on définit la  $i$ -ème application partielle de  $f$  en  $a$ , par l'égalité :

$$f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_i, \dots, a_n).$$

---

#### Définition

Soit  $f$  une fonction de  $n$  variables définie sur  $U \subset \mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $a$  un point adhérent à  $U$ , et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

On dit que  $f$  a **pour limite  $b$  en  $a$ , dans  $U$** , si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, x \in U \text{ et } \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon.$$

\*\* On dira aussi que  $f(x)$  **tend vers  $b$  quand  $x$  tend vers  $a$  dans  $U$** .

\* Si  $a$  est un point de  $U$ , et si  $f$  a une limite en  $a$  dans  $U$ , alors cette limite est  $f(a)$ . On dit alors que  $f$  est **continue** en  $a$ . Si  $f$  est continue en tout point de  $U$ , on dit qu'elle est **continue sur  $U$** .

\* La fonction  $f$  est continue en  $a$  si et seulement si toutes ses composantes le sont.

\* Si  $f$  et  $g$  sont deux applications définies sur  $U$  et continues en un point  $a$  de l'adhérence de  $U$ , alors  $f + g$  est continue en  $a$ , de même que  $\langle f, g \rangle$  (produit scalaire) et, si  $p = 1$  et  $g(a) \neq 0$ ,  $f/g$ .

---

#### Définition

Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $u$  un élément de  $U$ , et  $f$  une fonction définie sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ . On dit que  $f$  est **différentiable** en  $u$  s'il existe une application linéaire  $L_u$  et une application  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  telles que :

$$\begin{aligned} \text{si } u + h \in U, f(u + h) &= f(u) + L_u(h) + \|h\|\varepsilon(h) \\ \varepsilon(h) \text{ tend vers } 0 \text{ si } h \text{ tend vers } 0. \end{aligned}$$

\* Si  $f$  est différentiable en tout point de  $U$ , on dira qu'elle est **différentiable sur  $U$** .

\* L'application linéaire  $L_u$ , si elle existe, est déterminée de manière unique par  $f$  et  $u$ , c'est la **différentielle** de  $f$  en  $u$ .

\* Si  $f$  est différentiable en  $u$ , elle est continue en  $u$ .

\* L'application  $f$  est différentiable en  $u$  si et seulement si ses composantes le sont. Pour cette raison on étudie surtout le cas des fonctions à valeurs réelles.

\* Pour une fonction à valeurs réelles :

$$f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

différentiable en  $u$ , la différentielle en  $u$  est une application linéaire :

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n.$$

Le vecteur  $a = (a_1, \dots, a_n)$  est le **gradient** de  $f$  en  $u$ .



---

 Définition

Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  un point de  $U$ , et  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $U$ . On appelle  $i$ -ème **dérivée partielle** de  $f$  en  $u$  la dérivée en  $u_i$  de la  $i$ -ème application partielle de  $f$  en  $u$ , si elle existe, c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow u_i \\ t \neq u_i}} \left( \frac{f(u_1, \dots, t, \dots, u_n) - f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)}{t - u_i} \right).$$

\*\* Cette dérivée partielle est souvent notée d'une des manières suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(u), f'_{x_i}(u).$$

\*\* Les dérivées partielles définissent à leur tour des fonctions de  $n$  variables qui peuvent être continues, différentiables etc...

---

 Théorème

Soit  $f$  une fonction différentiable en  $u$ . Alors chacune des composantes de  $f$  admet des dérivées partielles par rapport à chacune des variables.

Dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ , la différentielle a pour matrice la matrice  $(p, n)$  suivante, exprimée en fonction des dérivées partielles.

Cette matrice est la **matrice jacobienne** de  $f$  en  $u$ .

$$J_f(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(u) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(u) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(u) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(u) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(u) & \dots & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(u) \end{pmatrix}.$$

\*\* En particulier, si  $p = 1$ , le gradient de  $f$  en  $u$  s'exprime à l'aide des dérivées partielles :

$$\text{grad}_u(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right).$$

\* Dans ce cas, si le gradient de  $f$  en  $u$  est nul, on dit que  $u$  est un **point critique**, ou **stationnaire**, de  $f$ .

---

Théorème

Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  un point de  $U$ , et  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $U$ . Si chaque composante de  $f$  admet sur  $U$  des dérivées partielles continues, alors  $f$  est différentiable sur  $U$ .

\* Cet énoncé n'est pas une réciproque du précédent, puisqu'il contient une hypothèse de continuité des dérivées partielles.

\* Il existe des fonctions non différentiables, ni même continues, qui admettent des dérivées partielles en tout point.

\* Une fonction différentiable dont les dérivées partielles sont continues est dite **continument différentiable**, ou de **classe  $C^1$** .

\* Les dérivées partielles peuvent à leur tour être éventuellement dérivées par rapport à l'une des variables, et ainsi de suite. On obtient ainsi des dérivées partielles secondes ... L'ordre des dérivations partielles successives compte.

On note en général une dérivée seconde par :

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}(u), \text{ si } k \neq l, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l^2}(u), \text{ si } k = l.$$

---

Théorème

Si les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}(u), \text{ et } \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}(u)$$

existent, et sont continues, alors elles sont égales.

\* On peut alors parler de fonction de classe  $C^2$ , ...,  $C^m$ , ou  $C^\infty$ .

---

 Théorème

(Formule de Taylor à deux variables)

Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{R}^2$ , et  $f$  de classe  $C^2$  sur  $U$ .Pour tout point  $u$  de  $U$ , il existe une fonction  $\varepsilon$  de deux variables, tendant vers 0 en  $(0, 0)$ , telle que :

$$\begin{aligned}
 f(u_1 + h_1, u_2 + h_2) &= f(u_1, u_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, u_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1, u_2) \\
 &+ \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(u_1, u_2) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(u_1, u_2) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(u_1, u_2) \right) \\
 &+ (h_1^2 + h_2^2) \varepsilon(h_1, h_2).
 \end{aligned}$$

---

 Théorème
Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, différentiable sur une partie ouverte  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Tout extremum (local) de  $f$  est un point critique.

\* Comme dans le cas d'une variable, la réciproque est fautive.

\* Etant donné un point critique  $u$ , pour voir s'il s'agit d'un extremum de  $f$ , il faut pouvoir déterminer au voisinage le signe de  $f(x) - f(u)$ .

---

 Méthode d'étude des points critiques pour
 $n = 2$ Compte tenu de la formule de Taylor, le signe de  $f(u + h) - f(u)$  est celui de la forme bilinéaire suivante, lorsqu'elle n'est pas nulle :

$$\phi(h_1, h_2) = \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(u_1, u_2) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(u_1, u_2) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(u_1, u_2) \right).$$

On pose donc :

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(u_1, u_2), b = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(u_1, u_2), c = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(u_1, u_2).$$

\* Si  $b^2 - ac < 0$ , le signe est celui de  $a$  (ou  $c$ ) :

si  $a < 0$ ,  $u$  est un maximum local

si  $a > 0$ ,  $u$  est un minimum local.

✱ Si  $b^2 - ac > 0$ ,  $u$  n'est pas un extremum. Dans certaines directions, c'est un "maximum", et dans d'autres un "minimum". Graphiquement, on observe un col au voisinage de  $u$  (on dit encore, de manière imagée, que c'est un point-selle).

✱ Si  $b^2 - ac = 0$ , la forme quadratique est dégénérée, on ne peut rien conclure à partir de la formule de Taylor à l'ordre 2.

## 1-2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Il s'agit d'étudier des fonctions du type :

$$x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt,$$

$a$ , ou  $b$ , pouvant être, si cela a un sens, infini, et  $x \in I$  ( $I$  est un intervalle, ouvert ou fermé, borné ou non).

On cherchera le domaine de définition d'une telle fonction, et on étudiera sa continuité, sa dérivabilité.

Théorème

Soient  $a$  et  $b$  des réels,  $a < b$ , et soit  $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue.

Posons :

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt,$$

la fonction  $F$  est définie et continue sur  $I$ .

✱ Il faut bien se rappeler que la continuité de  $f$  n'est pas équivalente à la continuité par rapport à  $x$  et à  $t$  séparément.

---

 Théorème

Soient  $a$  et  $b$  des réels, et soit  $f : I \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue.

Supposons que  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable, continue sur  $I \times [a, b]$ .

Alors la fonction  $F$  définie dans l'énoncé précédent est dérivable sur l'intervalle  $I$ . Sa dérivée est continue, et :

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

✱ Pour prouver la dérivabilité (ou la continuité) de  $F$ , on peut si nécessaire restreindre l'intervalle  $I$  à un voisinage d'un point donné, puisque ces propriétés sont locales. Ce voisinage peut être choisi fermé et borné.

---

 Définition

Soit  $a$  un réel et soit  $f : I \times [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue.

On dit que l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dt$$

**converge uniformément** sur  $I$  si on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, T > A \text{ et } x \in I \Rightarrow \left| \int_T^{+\infty} f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

✱ L'intégrale généralisée converge uniformément sur l'intervalle  $I$  si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, T > T' > A \text{ et } x \in I \Rightarrow \left| \int_{T'}^T f(x, t) dt \right| < \varepsilon.$$

On appelle cette condition le critère de Cauchy uniforme.

---

 Définition

Soit  $f : I \times [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue.

On dit que l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dt$$

**converge normalement** sur une partie  $V$  de  $I$  s'il existe une fonction positive continue  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

1) Pour tout  $x$  de  $V$  et tout  $t$  de  $[a, +\infty[$ ,

$$|f(x, t)| \leq g(t)$$

2) L'intégrale :

$$\int_a^{+\infty} g(t) dt$$

est convergente.

\*\* Si une intégrale généralisée converge normalement, elle converge uniformément.

---

 Théorème

Soit  $f : I \times [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue.

Si l'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} f(x, t) dt$$

converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle  $I$ , alors la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, t) dt$$

est continue sur  $I$ .

---

 Théorème

Soit  $f : I \times [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue.

On suppose vérifiées les conditions suivantes :

1) Il existe  $x_0$  dans  $I$  tel que l'intégrale suivante converge :

$$\int_a^{+\infty} f(x_0, t) dt.$$

2) La fonction  $f$  admet une dérivée partielle par rapport à la première variable, continue sur  $I \times [a, +\infty[$ .

3) L'intégrale généralisée :

$$\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

converge uniformément sur tout intervalle fermé et borné de  $I$ .

Alors la fonction  $F$  définie plus haut est dérivable sur  $I$ , et :

$$F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

\*\* Bien entendu, les mêmes considérations valent pour les intégrales :

$$\int_{-\infty}^a f(x, t) dt.$$

---

## 2 ↗ Pour Voir

---

Dans cette partie, on présente des exemples simples des notions ou résultats abordés dans la partie précédente. Ils sont suivis de questions très élémentaires pour vérifier votre compréhension.

---

### 2-1 Fonctions de plusieurs variables

---

"On appelle **norme** sur  $\mathbb{R}^n$ , une application  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie :  $N(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ ;  $N(\lambda v) = |\lambda| \cdot N(v)$  pour tout réel  $\lambda$  ;  $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$  (inégalité triangulaire)."

exemple 1

L'application suivante est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$N(x, y) = \max(|x|, |y|).$$

C'est bien une fonction positive. Si  $N(x, y) = 0$ , alors  $|x| = |y| = 0$ , donc :

$$(x, y) = (0, 0).$$

La réciproque est évidente, de même que  $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|N(x, y)$ .

Enfin, l'inégalité triangulaire résulte de l'inégalité triangulaire de la valeur absolue :

$$v = (x, y), w = (x', y'), v + w = (x + x', y + y')$$

$$N(v + w) = \max(|x + x'|, |y + y'|)$$

or :

$$|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq \max(|x|, |y|) + \max(|x'|, |y'|)$$

$$|y + y'| \leq |y| + |y'| \leq \max(|x|, |y|) + \max(|x'|, |y'|)$$

donc :

$$\max(|x + x'|, |y + y'|) \leq \max(|x|, |y|) + \max(|x'|, |y'|)$$

$$N(v + w) \leq N(v) + N(w).$$



---

 exemple 2

(à traiter)

L'application :

$$N(x, y) = \max(|ax + by|, |cx + dy|)$$

où a, b, c, d sont des réels donnés, est-elle une norme sur  $\mathbb{R}^2$  ?

---

 # réponse

Tous les points se vérifient sans difficulté quels que soient a, b, c, d, sauf l'implication  $N(x, y) = 0 \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$ . En effet, pour que cette propriété soit vérifiée, il faut que le système d'équations linéaires :

$$ax + by = 0$$

$$cx + dy = 0$$

ait une unique solution (0, 0). On sait que cela n'est vrai que dans le cas où le déterminant  $ad - bc$  est différent de 0.

---

 "On utilise le plus souvent la **norme euclidienne** :

$$N(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}."$$

---

 exemple 3

Seule l'inégalité triangulaire demande une vérification un peu longue, voici le cas  $n = 2$  :

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

équivalent à :

$$(x+x')^2 + (y+y')^2 \leq x^2 + y^2 + (x')^2 + (y')^2 + 2\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

soit :

$$\begin{aligned}
 xx' + yy' &\leq \sqrt{(x)^2 + (y)^2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \\
 x^2 x'^2 + y^2 y'^2 + 2xx' yy' &\leq (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) \\
 2xx' yy' &\leq x^2 y'^2 + x'^2 y^2
 \end{aligned}$$

et la dernière inégalité est bien vérifiée puisqu'elle équivaut à :

$$(xy' - x'y)^2 \geq 0.$$

---

exemple 4

(à traiter)

Dans le cas de la norme euclidienne, peut-on avoir l'égalité :

$$N(v + w) = N(v) + N(w) ?$$

On traitera le cas  $n = 2$ .

---

# réponse

Les calculs précédents montrent que cette égalité équivaut à :

$$(xy' - x'y)^2 = 0.$$

On sait que cela signifie que les vecteurs  $(x, y)$  et  $(x', y')$  sont colinéaires, ou liés.

---

"Il en existe d'autres, qui peuvent être plus pratiques dans les calculs, et qui sont **équivalentes** à la norme euclidienne. Une norme  $N'$  est équivalente à une norme  $N$  s'il existe des réels strictement positifs  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout vecteur  $v$  :

$$\alpha.N(v) \leq N'(v) \leq \beta.N(v)."$$

---

exemple 5

La norme de l'exemple 1 est équivalente à la norme euclidienne. Vérifions-le pour  $n = 2$  :

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\max(|x|, |y|) \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Inversement :

$$x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \leq 2 \max(|x|, |y|).$$

---

exemple 6

(à traiter)

Vérifier que l'application :

$$(x, y) \rightarrow |x| + |y|$$

est une norme sur  $\mathbb{R}^2$  équivalente à la norme euclidienne.

---

# réponse

On vient de voir :

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

D'autre part, on a :

$$2(x^2 + y^2) \geq x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

$$\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x| + |y|.$$

Vérifions que l'application est bien une norme :

$$|x| + |y| \text{ est bien positif,}$$

$$\text{si } |x| + |y| = 0, \text{ alors } |x| = |y| = 0$$

$$(|\lambda x| + |\lambda y|) = |\lambda| (|x| + |y|)$$

$$|x + x'| + |y + y'| \leq |x| + |x'| + |y| + |y'|.$$

"On déduit de l'inégalité triangulaire la relation :

$$N(v - w) \geq |N(v) - N(w)|."$$

exemple 7

Dans le plan euclidien, cela exprime que la longueur d'un côté d'un triangle est supérieure à la différence des longueurs des deux autres côtés.

exemple 8

(à traiter)

Etablir la relation :

$$|x - x'| + |y - y'| \geq |x| + |y| - |x'| - |y'|$$

# réponse

En utilisant le résultat de l'exemple 6, on voit que :

$$|x - x'| + |y - y'| \geq ||x| + |y| - |x'| - |y'||$$

d'où la relation demandée.

"Comme dans le cas de  $\mathbb{R}$ , on peut définir dans  $\mathbb{R}^n$  la notion de **point adhérent à une partie U...**"

exemple 9

Choisissons une norme  $N$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Cherchons les points adhérents à la "boule ouverte" :

$$\{(x, y) \mid N(x, y) < 1\}.$$

Un examen graphique permet de supposer qu'il s'agit des points de la boule fermée :

$$\{(x, y) \mid N(x, y) \leq 1\}.$$

La boule ouverte, dont tous les points sont adhérents, est contenue dans la boule fermée. Soit maintenant un point  $a$  tel que  $N(a) = 1$ .

Soit  $r > 0$ , et  $v = (1 - r)a$ . On voit que  $N(v) = |1 - r| < 1$ , donc  $v$  appartient à la boule ouverte, et  $N(v - a) = r$ . Le point  $a$  est donc bien adhérent à la boule ouverte.

Soit maintenant  $b$  tel que  $N(b) > 1$ . Posons  $r = N(b) - 1$ , et soit  $u$  un point quelconque tel que  $N(u - b) \leq r$ . On voit que :

$$N(u) = N((u - b) - (-b)) \geq |N(u - b) - N(b)| = N(b) - N(u - b) \geq 1.$$

Il en résulte qu'il n'existe pas de point de la boule ouverte vérifiant :

$$N(u - b) \leq r.$$

Un point  $b$  tel que  $N(b) > 1$  n'est pas adhérent à la boule ouverte.

L'ensemble des points adhérents à  $\{(x, y) \mid N(x, y) < 1\}$  est :

$$\{(x, y) \mid N(x, y) \leq 1\}.$$

---

exemple 10

(à traiter)

Quels sont les points adhérents à l'ensemble des "axes" :

$$A = \{(x, y) \mid xy = 0\}.$$

---

# réponse

Choisissons la norme euclidienne.

Soit  $u$  un point n'appartenant pas à  $A$  :  $u = (\alpha, \beta)$  et  $\alpha\beta \neq 0$ . Soit :

$$r = \min(|\alpha|, |\beta|).$$

Soit  $v = (x, 0)$  un point de  $A$  :

$$N(v - u) = \sqrt{(x - \alpha)^2 + \beta^2} \geq |\beta|$$

et si  $w = (0, y)$  est un autre point de  $A$  :

$$N(w - u) = \sqrt{\alpha^2 + (y - \beta)^2} \geq |\alpha|.$$

On voit qu'il n'existe aucun point  $t$  de  $A$  vérifiant  $N(t - u) < r$ . Le point  $u$  n'est pas adhérent à  $A$ .

L'ensemble des points adhérents à  $A$  est  $A$  lui-même.

"On dit qu'une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est **ouverte** si pour tout vecteur  $v$  appartenant à  $U$ , il existe un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que l'ensemble suivant  $B(v, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - v\| < \varepsilon\}$  soit contenu dans  $U$ ."

exemple 11

Le complémentaire d'une partie ouverte est dit "fermé". Une partie est fermée si et seulement si elle est égale à l'ensemble de ses points adhérents.

En effet, soit  $U$  une partie ouverte et  $F$  son complémentaire. Soit  $u \in F$ . Cet élément appartient à  $U$ , donc il existe  $\varepsilon$  tel que l'ensemble des points vérifiant  $\|v - u\| < \varepsilon$  est contenu dans  $U$ . Cet ensemble ne contient pas d'élément de  $F$ , donc  $u$  n'est pas adhérent à  $F$ .

Réciproquement, soit  $F$  une partie égale à l'ensemble de ses points adhérents, et  $U$  son complémentaire. Soit  $u \in U$ . Ce point n'appartient pas à  $F$ , donc n'est pas adhérent à  $F$ , donc il existe  $\varepsilon$  tel que l'ensemble des points vérifiant  $\|v - u\| < \varepsilon$  ne contient aucun élément de  $F$ , donc est contenu dans  $U$ . La partie  $U$  est bien ouverte.

exemple 12

(à traiter)

Y-a-t-il des parties à la fois ouvertes et fermées dans  $\mathbb{R}^n$  ?

# réponse

Il est évident que  $\mathbb{R}^n$  est une de ces parties ouvertes et fermées. Par définition, son complémentaire, l'ensemble vide, est également ouvert et fermé. On peut montrer qu'il n'y a pas d'autre partie ayant cette propriété.

"L'ensemble décrit précédemment s'appelle la **boule ouverte** de centre  $v$  et de rayon  $\varepsilon$ ."

exemple 13

Pour la norme définie à l'exemple 1, cherchons à représenter la boule :

$$B(0, 1).$$

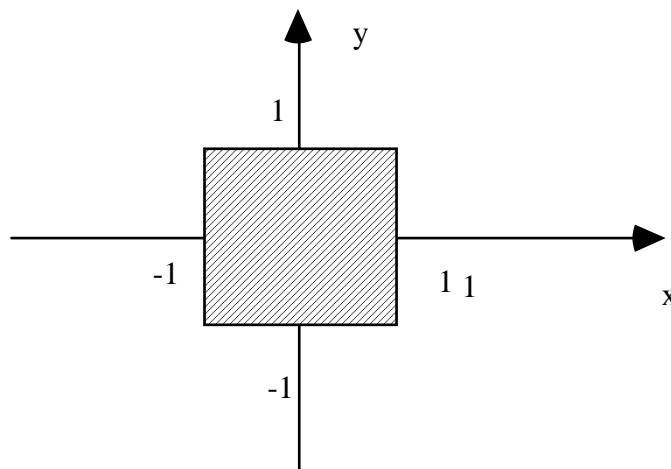
Les vecteurs  $(x, y)$  de cet ensemble vérifient :

$$\max(|x|, |y|) < 1, \text{ donc}$$

$$|x| < 1, \text{ et } |y| < 1.$$

Il s'agit donc d'un carré de côté 1 :

$$\{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\}.$$




---

exemple 14

(à traiter)

Représenter de même la boule ouverte centrée à l'origine et de rayon 1 pour la norme définie à l'exemple 6.

---

# réponse

Les vecteurs  $(x, y)$  de cette boule ouverte vérifient :

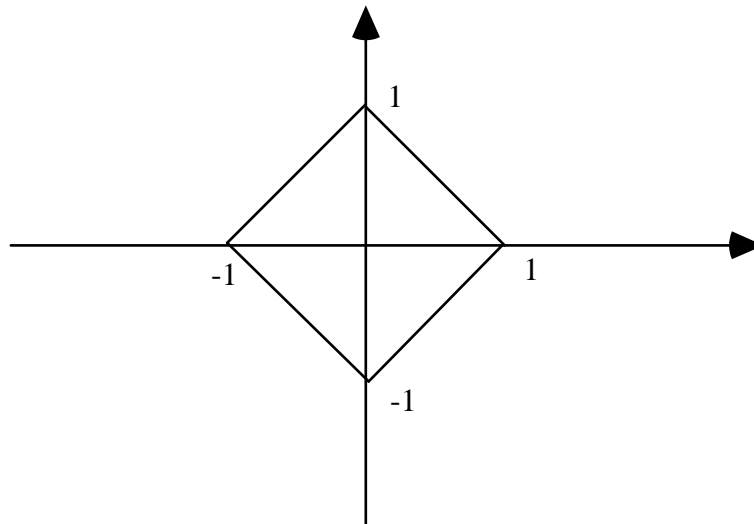
$$|x| + |y| < 1.$$

Dans le quart de plan  $x > 0, y > 0$ , cet ensemble est donné par :

$$x + y < 1.$$

C'est donc la partie située entre les axes et la droite d'équation  $x + y = 1$ .

On procède de même pour les autres quadrants, et on obtient un carré de côté  $\sqrt{2}$ .



"Une application  $f$  d'une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  est souvent appelée une **fonction vectorielle de  $n$  variables**. Elle équivaut à la donnée de  $p$  fonctions de  $n$  variables à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , appelées ses **composantes** :

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n))."$$

exemple 15

On connaît par exemple les applications linéaires :

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

Les composantes de  $f$  sont :

$$(x, y) \rightarrow x + y$$

$$(x, y) \rightarrow x - y.$$



---

exemple 16

(à traiter)

Reconnaître, géométriquement, l'application dont les composantes sont :

$$(x, y) \mapsto -y$$

$$(x, y) \mapsto x.$$

---

# réponse

Le produit scalaire d'un vecteur quelconque  $(x, y)$  et de son image  $(-y, x)$  est 0. Donc ces vecteurs sont orthogonaux. De plus ils ont la même norme. Il s'agit donc d'une rotation d'un quart de tour. Le déterminant est positif, donc il s'agit de la rotation d'un quart de tour dans le sens direct.

"Etant donné un point  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , on définit la  $i$ -ème application partielle de  $f$  en  $a$ , par l'égalité  $g_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_i, \dots, a_n)$ ."

---

exemple 17

Une application non nulle peut avoir en certains points des applications partielles toutes nulles :

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$(0, 0) \mapsto 0.$$

On voit en effet que, en  $(0, 0)$  :

$$(x, 0) \mapsto 0$$

$$(0, y) \mapsto 0.$$

---

exemple 18

(à traiter)

Ecrire les applications partielles de :

$$(x, y) \mapsto \frac{x \sin(y)}{x^2 + y^2 + 1}$$

en  $(0, \pi)$ .

---

# réponse

On trouve :

$$(x, \pi) \mapsto 0$$

$$(0, y) \mapsto 0.$$

---

"Soit  $f$  une fonction de  $n$  variables définie sur  $U \subset \mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $\mathbf{a}$  un point adhérent à  $U$ , et  $\mathbf{b}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ . On dit que  $f$  a **pour limite**  $\mathbf{b}$  en  $\mathbf{a}$ , **dans**  $U$ , si  $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, x \in U$  et  $\|x - \mathbf{a}\| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - \mathbf{b}\| \leq \varepsilon$ ."

---

exemple 19

La fonction  $f$  :

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$$

a pour limite 0 en  $(0, 0)$ .

En effet :

$$\frac{|xy|}{x^2 + y^2 + 1} \leq |xy| = |x||y| \leq x^2 + y^2.$$

Donc (en utilisant la norme euclidienne) :

$$\text{si } \|(x, y)\| \leq \alpha, \text{ alors } \|f(x, y)\| \leq \alpha^2.$$

Pour obtenir  $\|f(x, y)\| \leq \varepsilon$ , il suffit donc de choisir  $\|(x, y)\| \leq \sqrt{\varepsilon}$ .

---

exemple 20

(à traiter)

La fonction  $g$  :

$$(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

définie sur l'ouvert  $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , a-t-elle une limite en  $(0, 0)$  ?

---

# réponse

Si elle existe, soit  $b$  cette limite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, (x, y) \in U \text{ et } \|(x, y)\| \leq \alpha \Rightarrow \|g(x, y) - b\| \leq \varepsilon.$$

Si l'on choisit des points de  $U$  de la forme  $(x, 0)$ , on voit que la limite  $b$  doit valoir 0. Si on choisit des points de la forme  $(x, x)$ , on voit que  $b$  doit valoir  $\frac{1}{2}$ . Il en résulte que  $b$  n'existe pas.

---

"Si  $a$  est un point de  $U$ , et si  $f$  a une limite en  $a$  dans  $U$ , alors cette limite est  $f(a)$ . On dit alors que  $f$  est **continue** en  $a$ ."

---

exemple 21

La fonction  $f$  de l'exemple 19 est continue en  $(0, 0)$ .

---

exemple 22

(à traiter)

Peut-on donner une valeur à  $g(0, 0)$  pour que  $g$  soit continue en  $(0, 0)$

---

# réponse

Le raisonnement fait dans l'exemple 20 montre que c'est impossible.

---

"On dit que  $f$  est **différentiable** en  $u$  s'il existe une application linéaire  $L_u$  et une application  $\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  telles que si  $u + h \in U$ ,  $f(u + h) = f(u) + L_u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ ,  
 $\varepsilon(h)$  tend vers 0 si  $h$  tend vers 0."

---

exemple 23

Toute application linéaire est différentiable, et égale à sa différentielle :

$$f(u + h) = f(u) + f(h).$$

En particulier, dans le cas d'une application linéaire, la différentielle ne dépend pas du point considéré.

---

exemple 24

(à traiter)

On suppose  $n = p = 1$ . La fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie ci-dessous est-elle différentiable :

$$F(x) = x + x^2.$$

---

# réponse

Calculons  $F(x + h)$  :

$$\begin{aligned} F(x + h) &= x + h + (x + h)^2 \\ &= x + h + x^2 + 2hx + h^2, \end{aligned}$$

$$F(x + h) - F(x) = h(1 + 2x) + h^2.$$

La fonction  $F$  est bien différentiable en  $x$ , sa différentielle est :

$$L_x : h \rightarrow h(1 + 2x),$$

et la fonction  $\varepsilon$ , ici indépendante de  $x$ , est :

$$\varepsilon : h \rightarrow |h|.$$

---

"L'application linéaire  $L_u$ , si elle existe, est déterminée de manière unique par  $f$  et  $u$ , c'est la **différentielle** de  $f$  en  $u$ ."

---

exemple 25

On a vu ci-dessus deux exemples de différentielles : si  $f$  est linéaire, elle coïncide avec sa différentielle, si  $n = p = 1$ , la différentielle est la multiplication par la dérivée.

---

exemple 26

(à traiter)

Ecrire la différentielle de l'application :

$$(x, y) \rightarrow (x + xy, y + xy).$$

---

# réponse

Notons  $g$  cette application :

$$g(x+h, y+k) - g(x, y) = (x+h+xy+hy+xk+hk - x - xy, y+k+xy+hy+xk+hk - y - xy)$$

donc :

$$g(x+h, y+k) = g(x, y) + (h(1+y) + kx, hy + k(1+x)) + (hk, hk).$$

L'application :

$$(h, k) \rightarrow (h(1+y) + kx, hy + k(1+x))$$

est linéaire.

Choisissons la norme définie par  $\|(h, k)\| = \max(|h|, |k|)$ . On voit que le terme  $(hk, hk) = |h|^2|k|^2$  s'écrit bien  $\|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$ , avec  $\varepsilon$  de limite  $(0, 0)$  en  $(0, 0)$ .

La différentielle de  $g$  a donc pour matrice dans la base canonique :

$$Dg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1+y & y \\ y & 1+x \end{pmatrix}.$$

---

"Si  $f$  est différentiable en  $u$ , elle est continue en  $u$ ."

---

exemple 27

L'application étudiée à l'exemple 20 n'est pas différentiable, car elle n'est pas continue.

---

exemple 28

(à traiter)

La réciproque n'est pas vraie. Le vérifier sur l'application :

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{|xy|},$$

en  $(0, 0)$ .

---

# réponse

On vérifie d'abord que cette application est continue, c'est-à-dire tend vers 0 en  $(0, 0)$ , en utilisant la norme "du max" :  $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$  :

soit  $\varepsilon > 0$ , posons  $\alpha = \varepsilon$ , si  $\|(x, y)\| \leq \alpha$ ,  
alors  $|x| \leq \alpha$ ,  $|y| \leq \alpha$ , donc  $|xy| \leq \alpha^2$ , et  $\sqrt{|xy|} \leq \varepsilon$ .

On aurait pu également considérer comme connue la continuité de la fonction  $|\cdot|$ , de la multiplication, de la racine carrée.

Cette application n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ . Supposons que la différentielle en  $(0, 0)$  est l'application :

$$(h, k) \rightarrow ah + bk$$

on devrait avoir :

$$\frac{\sqrt{|hk|} - ah - bk}{\max(|h|, |k|)} \rightarrow 0$$

quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Si par exemple  $h = k > 0$ , on obtient :

$$\frac{\sqrt{|hk|} - ah - bk}{h} = 1 - a - b,$$

donc  $a + b = 1$ , et si  $h = 2k > 0$ , on obtient :

$$\frac{\sqrt{|hk|} - ah - bk}{h} = \sqrt{\frac{1}{2}} - a - \frac{b}{2},$$

donc  $2a + b = \sqrt{2}$ , et de même si  $h = 3k$  :

$$\frac{\sqrt{|hk|} - ah - bk}{h} = \sqrt{\frac{1}{3}} - a - \frac{b}{3},$$

donc  $3a + b = \sqrt{3}$ .

On voit facilement que ces différentes équations sont incompatibles.

"On appelle  $i$ -ème **dérivée partielle** de  $f$  en  $u$  la dérivée en  $u_i$  de la  $i$ -ème application partielle de  $f$  en  $u$ , si elle existe, c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{t \rightarrow u_i \\ t \neq u_i}} \left( \frac{f(u_1, \dots, t, \dots, u_n) - f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)}{t - u_i} \right). "$$

exemple 29

Les dérivées partielles de la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = x \sin(y) \cos(z)$$

au point  $(1, 1, 1)$  sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 1) = \sin(1) \cos(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = \cos^2(1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1) = -\sin^2(1).$$

Pour les calculer, on dérive  $f$  par rapport à  $x$ , en considérant  $y$  et  $z$  comme constants, puis par rapport à  $y$ , en considérant  $x$  et  $z$  constants ...

exemple 30

(à traiter)

Calculer, si elles existent, les dérivées partielles en  $(0, 0)$  de la fonction :

$$g(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$g(0, 0) = 0.$$

# réponse

Il faut ici former les taux d'accroissement et chercher leur limite éventuelle.

On écrit :

$$\frac{g(x,0) - g(0,0)}{x} = \frac{1}{x^2},$$

donc la dérivée partielle par rapport à  $x$  n'existe pas en  $(0, 0)$ .

Pour la dérivée par rapport à  $y$  :

$$\frac{g(0,y) - g(0,0)}{y} = 0,$$

donc cette dérivée existe et vaut 0.

---

"Dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^p$ , la différentielle a pour matrice la **matrice jacobienne** de  $f$  en  $u$ ."

---

exemple 31

Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x, y) = (x \sin(y), y \sin(x)),$$

sa matrice jacobienne en un point quelconque est :

$$\begin{pmatrix} \sin(y) & x \cos(y) \\ y \cos(x) & \sin(x) \end{pmatrix}.$$

---

exemple 32

(à traiter)

Vérifier ce résultat sur l'exemple 26.

---

# réponse

La matrice trouvée était :

$$Dg_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1+y & y \\ y & 1+x \end{pmatrix}.$$

Ses termes correspondent bien aux dérivées partielles indiquées.



"En particulier, si  $p = 1$ , le gradient de  $f$  en  $u$  s'exprime à l'aide des dérivées partielles

$$\text{grad}_u(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(u), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(u) \right).$$

exemple 33

Le gradient de  $f$  définie par  $f(x, y) = xy^2(1 - x - 2y)$  a pour composantes :

$$f'_x(x, y) = y^2(1 - x - 2y) - xy^2 = y^2(1 - 2x - 2y)$$

$$f'_y(x, y) = 2xy(1 - x - 2y) - 2xy^2 = 2xy(1 - x - 3y).$$

exemple 34

(à traiter)

Quel est le gradient de la fonction  $g$  donnée par :

$$g(x, y) = 4xy - x^4 - y^4.$$

# réponse

Les dérivées partielles sont les suivantes :

$$g'_x(x, y) = 4y - 4x^3, \quad g'_y(x, y) = 4x - 4y^3.$$

"Si le gradient de  $f$  en  $u$  est nul, on dit que  $u$  est un **point critique**, ou **stationnaire**, de  $f$ ."

exemple 35

Dans l'exemple 34, les points stationnaires vérifient :

$$4y - 4x^3 = 0, \quad 4x - 4y^3 = 0.$$

On en déduit  $y = x^3$ , puis  $x = x^9$ , donc les points stationnaires sont :

$$(0, 0), (1, 1), (-1, -1)$$

---

exemple 36

(à traiter)

Chercher les points stationnaires de l'exemple 33.

---

# réponse

Le système d'équations à résoudre est :

$$y^2(1-2x-2y) = 0$$

$$2xy(1-x-3y) = 0.$$

Si  $y = 0$ ,  $x$  est quelconque.

Si  $y \neq 0$ , le système est équivalent à :

$$(1-2x-2y) = 0$$

$$x(1-x-3y) = 0.$$

Si  $x = 0$ , alors  $y = \frac{1}{2}$ .

Si  $x \neq 0$ , le système équivaut à :

$$1-2x-2y = 0$$

$$1-x-3y = 0.$$

D'où une solution dans ce cas :

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

---

"Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_n)$  un point de  $U$ , et  $f$  une fonction à valeurs réelles définie sur  $U$ . Si chaque composante de  $f$  admet sur  $U$  des dérivées partielles continues, alors  $f$  est différentiable sur  $U$ ."

---

exemple 37

C'est la méthode la plus courante pour vérifier qu'une fonction est différentiable : calculer les dérivées partielles, montrer qu'elles sont continues.

Etudions la différentiabilité de la fonction  $h$  :

$$h(x,y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$h(0, 0) = 0.$$

En dehors de l'origine, les dérivées partielles existent et sont continues.

A l'origine, les taux d'accroissement sont nuls :

$$\frac{h(x,0) - h(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{h(0,y) - h(0,0)}{y} = 0.$$

donc les dérivées partielles sont nulles.

Il faut maintenant vérifier si les dérivées partielles calculées en dehors de l'origine tendent vers 0 en (0, 0).

Posons  $x = r\cos(\theta)$ ,  $y = r\sin(\theta)$ , on obtient respectivement :

$$r(1 - 2\cos^2(\theta) + \cos^4(\theta))$$

$$r\cos(\theta)\sin(\theta)(1 + \cos^2(\theta))$$

pour les deux dérivées partielles. Ces expressions tendent vers 0 quand la norme de (x, y) (qui vaut r) tend vers 0.

La fonction h est bien différentiable.

exemple 38

(à traiter)

Etudier la différentiabilité de l'application  $\phi$  :

$$(x, y, z) \rightarrow \frac{xy}{z}$$

sur l'ouvert  $\mathbb{R}^3 - \{(x, y, 0) \mid x, y \text{ réels}\}$ .

# réponse

Les dérivées partielles s'écrivent :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{y}{z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{x}{z}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{xy}{z^2}.$$

Elles sont toutes continues pour  $z \neq 0$ , donc  $\phi$  est bien différentiable.

---

"Si les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l}(u)$ , et  $\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_k}(u)$  existent, et sont continues, alors elles sont égales."

---

exemple 39

On le vérifie bien dans l'exemple 38 :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{z} \right) = \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{z} \right) = \frac{1}{z}.$$

---

exemple 40

(à traiter)

Faire la même vérification pour l'exemple 37.

---

"Soit  $U$  une partie ouverte de  $\mathbb{R}^2$ , et  $f$  de classe  $C^2$  sur  $U$ .

$$\begin{aligned} f(u_1 + h_1, u_2 + h_2) &= f(u_1, u_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(u_1, u_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(u_1, u_2) \\ &+ \frac{1}{2} \left( h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(u_1, u_2) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(u_1, u_2) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(u_1, u_2) \right) \\ &+ (h_1^2 + h_2^2) \mathcal{E}(h_1, h_2). \end{aligned}$$

---

exemple 41

Ecrivons la formule de Taylor pour la fonction de l'exemple 34, au point  $(1, 1)$ .

---

 exemple 42

(à traiter)

De même écrire la formule de Taylor pour la fonction de l'exemple 33 au point  $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ . A quoi doit-on s'attendre ?

---

 # réponse

Comme il s'agit d'un point stationnaire, la différentielle est nulle.

---

 "Si  $b^2 - ac < 0$ , le signe est celui de  $a$  (ou  $c$ )."

---

 exemple 43

Posons  $h(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y^2$ .

L'origine est un point critique de  $h$  :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x + 2xy^2$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y + 2yx^2.$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) = 2 + 2y^2, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y) = 4yx, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 2 + 2x^2$$

elles valent donc 2, 0, 2 en  $(0, 0)$ . Le point est donc un extremum, plus précisément il s'agit d'un minimum.

Remarquer que le résultat est évident sans calcul :  $h(x, y) \geq 0$  quel que soit  $(x, y)$ . L'origine est un minimum global.

---

 exemple 44

(à traiter)

Étudier les extrema de la fonction définie par :

$$t(x, y) = x^3 - y^3 - (x - y)^2.$$

---

# réponse

Les dérivées partielles sont :

$$t'_x = 3x^2 - 2x + 2y$$

$$t'_y = -3y^2 + 2x - 2y.$$

On trouve donc deux points critiques :

$$(0, 0) \text{ et } \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

Les dérivées partielles secondes sont :

$$t''_{xx} = 6x - 2$$

$$t''_{xy} = 2$$

$$t''_{yy} = -6y - 2.$$

A l'origine, le discriminant est 0, et à l'autre point critique, il est négatif.

La fonction  $t$  a donc un minimum en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .

Pour l'origine, la formule de Taylor ne permet pas de conclure. remarquons que si  $x \neq y$ , au voisinage de l'origine la fonction est négative ou nulle, le terme  $-(x - y)^2$  étant le terme principal, et si  $x = y$  la fonction est nulle. L'origine est donc un maximum pour  $t$ .

---

"Si  $b^2 - ac > 0$ ,  $u$  n'est pas un extremum. Dans certaines directions, c'est un "maximum", et dans d'autres un "minimum". Graphiquement, on observe un col au voisinage de  $u$  (on dit encore, de manière imagée, que c'est un point-selle)."

---

exemple 45

Le point critique de l'exemple 42 n'est pas un point extremum, puisque la formule de Taylor donne un discriminant positif.

---

exemple 46

(à traiter)

Pour la même fonction, que peut-on dire du point critique  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  ?

---

# réponse

Ce n'est pas non plus un extremum.

---

"Si  $b^2 - ac = 0$ , la forme quadratique est dégénérée, on ne peut rien conclure à partir de la formule de Taylor à l'ordre 2."

---

exemple 47

Examinons le point critique  $(0, 0)$  de la fonction de l'exemple 33.

En ce point toutes les dérivées partielles secondes sont nulles. La formule de Taylor à l'ordre 2 ne permet pas de conclure.

La fonction est :

$$xy^2(1 - x - 2y).$$

Au voisinage de  $(0, 0)$ ,  $x$  change de signe, alors que  $1 - x - 2y$  reste positif, donc  $(0, 0)$  n'est pas un extremum.

---

exemple 48

(à traiter)

Examiner le point critique  $(1, 0)$  de la fonction de l'exemple 33.

---

# réponse

En ce point toutes les dérivées partielles secondes sont nulles. La formule de Taylor à l'ordre 2 ne permet pas de conclure.

Au voisinage de  $(1, 0)$ ,  $xy^2$  ne change pas de signe.

Par contre  $(1 - x - 2y)$  change de signe : le point n'est pas un extremum.

---

 2-2 Intégrales dépendant d'un paramètre
 

---

"Soit  $f : I \rightarrow [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de deux variables continue. La fonction  $F$  est définie et continue sur  $I$ ."

---

 exemple 49

Posons :

$$f(x, t) = e^{xt}.$$

La fonction  $F$  est définie pour tout  $x$  réel par :

$$F(x) = \int_0^1 e^{xt} dt.$$

Explicitons  $F$  :

$$\text{si } x \neq 0, F(x) = \int_0^1 e^{xt} dt = \left[ \frac{e^{xt}}{x} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

$$\text{si } x = 0, F(0) = 1.$$

Cette fonction est bien continue car le quotient  $\frac{e^x - 1}{x}$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0.

---

 exemple 50

(à traiter)

Faire la même vérification pour la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :

$$F(x) = \int_0^1 x^t dt.$$



---

# réponse

On explicite cette fonction :

$$\text{si } x \neq 1, F(x) = \int_0^1 x^t dt = \left[ \frac{x^t}{\text{Log}(x)} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{x-1}{\text{Log}(x)}.$$

$$\text{Si } x = 1, F(1) = 1.$$

Cette fonction est bien continue, puisque le quotient :

$$\frac{\text{Log}(1+h)}{h}$$

tend vers 1 quand h tend vers 0.

"Supposons que f admet une dérivée partielle par rapport à la première variable, continue sur  $I \times [a, b]$ . Alors la fonction F définie dans l'énoncé précédent est dérivable sur l'intervalle I. Sa dérivée est continue, et  $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ ."

---

exemple 51

Pour la fonction de l'exemple précédent, on obtient :

$$f(x, t) = x^t$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = tx^{t-1}.$$

cette dérivée est bien continue sur  $]0, +\infty[ \times [0, 1]$ .

La dérivée de F est donc :

$$F'(x) = \int_0^1 tx^{t-1} dt.$$

Pour  $x = 1$ , la dérivée s'obtient comme limite du taux d'accroissement :

$$\frac{\frac{x-1}{\text{Log}(x)} - 1}{x-1}.$$

Posons  $x = 1 + h$  :

$$\frac{\frac{x-1}{\text{Log}(x)} - 1}{x-1} = \frac{\frac{h}{\text{Log}(1+h)} - 1}{h} = \frac{h - h + \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)}{h(h + h\varepsilon'(h))}$$

donc la limite pour  $h$  tendant vers 0 est  $\frac{1}{2}$ .

C'est bien la limite de :

$$\frac{x\text{Log}(x) - x + 1}{\text{Log}(x)^2}.$$

En effet, toujours en posant  $x = 1 + h$  :

$$\frac{x\text{Log}(x) - x + 1}{\text{Log}(x)^2} = \frac{(1+h)\left(h - \frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)\right) - h}{h^2 + h^2 \varepsilon'(h)} = \frac{\frac{h^2}{2} + h^2 \varepsilon(h)}{h^2 + h^2 \varepsilon'(h)}.$$

---

exemple 52

(à traiter)

Reprendre la fonction définie à l'exemple 49, et vérifier l'application de ce résultat.

---

# réponse

La fonction  $f$  a bien une dérivée partielle par rapport à  $x$  continue :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= e^{xt}, \\ f'_x(x, t) &= te^{xt}. \end{aligned}$$

La dérivée de  $F$  est donc :

$$F'(x) = \int_0^1 te^{xt} dt.$$

Pour  $x \neq 0$ , on obtient :

$$\frac{1 + e^x(x-1)}{x^2}.$$

La limite de cette expression quand  $x$  tend vers 0 est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{1 + e^x(x-1)}{x^2} &= \frac{1 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2 \mathcal{E}(x)\right)(x-1)}{x^2} \\ &= \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \mathcal{E}(x)}{x^2}, \end{aligned}$$

elle vaut donc  $\frac{1}{2}$ .

La dérivée en 0 est donnée par la limite en 0 de :

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + x^2 \mathcal{E}(x)}{x^2},$$

c'est donc bien  $\frac{1}{2}$ .

"On dit que l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(x,t) dt$  **converge uniformément** sur I si on a  $\forall \varepsilon > 0, \exists A, X > A$  et  $x \in ]\alpha, \beta[ \Rightarrow \left| \int_x^{+\infty} f(x,t) dt \right| < \varepsilon$ ."

exemple 53

Soit f l'application :

$$\begin{aligned} ]0, 1[ \times ]0, +\infty[ &\rightarrow \mathbf{R} \\ (x, t) &\rightarrow e^{-xt}. \end{aligned}$$

Elle est bien continue. On cherche si l'intégrale suivante converge uniformément sur  $]0, 1[$  :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt.$$

Le calcul donne :

$$\int_X^T e^{-xt} dt = \left[ \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_X^T = \frac{e^{-xT} - e^{-xX}}{x}$$

$$\int_X^{+\infty} e^{-xt} dt = \left[ \frac{e^{-xt}}{-x} \right]_X^{+\infty} = \frac{e^{-xX}}{x} \geq \frac{e^{-X}}{x}.$$

Or, pour  $X$  fixé,  $\frac{e^{-X}}{x}$  tend vers l'infini quand  $x$  tend vers 0. Donc l'intégrale ne converge pas uniformément sur  $]0, 1[$ .

---

exemple 54

(à traiter)

Reprendre la même question, mais sur  $[a, 1[$  ( $a > 0$ ).

---

# réponse

Dans ce cas, on a la majoration :

$$\int_X^{+\infty} e^{-xt} dt \leq \frac{e^{-aX}}{a}.$$

Comme  $e^{-aX}$  tend vers 0 quand  $X$  tend vers l'infini, on voit que l'intégrale converge uniformément sur  $[a, 1[$ .

"On dit que l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(x, t) dt$  **converge normalement** sur une partie  $V$  de  $I$  s'il existe une fonction positive continue  $g : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que 1) Pour tout  $x$  de  $V$  et tout  $t$  de  $[a, +\infty[$ ,  $|f(x, t)| \leq g(t)$ , 2) L'intégrale  $\int_a^{+\infty} g(t) dt$  est convergente."

---

exemple 55

Si  $x \in [\alpha, 1[$ , alors  $e^{-xt} \leq e^{-\alpha t}$ . De plus l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$$

converge. L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

converge donc normalement sur  $V = [\alpha, 1[$ , pour tout  $\alpha$  de  $]0, 1[$ .

exemple 56

(à traiter)

Étudier la convergence normale de l'intégrale suivante sur  $]0, \alpha]$ ,  $\alpha < 1$  :

$$\int_0^{+\infty} x^t dt.$$

# réponse

Comme  $t$  est positif, si  $x \leq \alpha$ , alors  $x^t \leq \alpha^t$ . L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \alpha^t dt = \left[ \frac{\alpha^t}{\text{Log}(\alpha)} \right]_{t=0}^{+\infty} = -\frac{1}{\text{Log}(\alpha)}$$

converge. On conclut que l'intégrale proposée converge normalement sur tout intervalle  $]0, \alpha]$ ,  $\alpha < 1$ .

"Si une intégrale généralisée converge normalement, elle converge uniformément."

exemple 57

On l'a vérifié directement pour le cas de l'exemple 54.

exemple 58

(à traiter)

Montrer que l'intégrale suivante converge sur  $] -\infty, -1[$ , et qu'elle converge uniformément sur  $] -\infty, a]$ , pour tout réel  $a$  négatif, strictement inférieur à  $-1$  :

$$\int_1^{+\infty} t^x dt.$$

---

# réponse

On peut calculer directement :

$$\int_1^{+\infty} t^x dt = \left[ \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{x+1}.$$

ce qui montre la convergence de l'intégrale sur  $] -\infty, -1[$ .

Si  $x \leq a < -1$ , alors pour  $t \geq 1$ ,  $t^x \leq t^a$ , et l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} t^a dt$$

---

"Si l'intégrale généralisée  $\int_a^{+\infty} f(x,t) dt$  converge uniformément sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle I, alors la fonction F définie par  $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t) dt$  est continue sur I."

---

exemple 59

La fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

est continue sur  $]0, 1[$ , puisqu'elle converge uniformément sur tout intervalle de la forme  $[\alpha, 1[$  ( $0 < \alpha$ ), d'après l'exemple 55.

---

exemple 60

(à traiter)

Examiner la continuité sur son domaine de définition de la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_1^{+\infty} t^x dt.$$

---

# réponse

Cette intégrale est normalement, donc uniformément, convergente sur tout intervalle  $]-\infty, a]$ , avec  $a < -1$ . La fonction  $G$  est donc continue sur son intervalle de définition  $]-\infty, -1[$  (exemple 58).

---

"On suppose vérifiées les conditions suivantes ... Alors la fonction  $F$  définie plus haut est dérivable sur  $I$ , et  $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ ."

---

exemple 61

Reprenons l'exemple précédent, du point de vue de la dérivabilité.

La fonction  $g : (x, t) \rightarrow t^x$  définie sur  $]-\infty, -1[ \times ]1, +\infty[$  a pour dérivée partielle par rapport à  $x$  :

$$(x, t) \rightarrow \text{Log}(t)t^x$$

qui est bien continue.

Si  $x \leq \alpha < -1$ ,  $\text{Log}(t)t^x \leq \text{Log}(t)t^\alpha$ , et enfin l'intégrale de cette fonction converge.

L'intégrale de la dérivée partielle de  $g$  par rapport à  $x$  converge donc normalement, donc uniformément, sur tout intervalle  $]-\infty, \alpha]$ .

La fonction  $G$  est donc dérivable, et sa dérivée est l'intégrale calculée ci-dessus, soit :

$$\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Bien entendu, ce résultat n'est pas surprenant puisqu'on sait que :

$$G(x) = \int_1^{+\infty} t^x dt = \left[ \frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{x+1}.$$

---

exemple 62

(à traiter)

Procéder de même pour la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt .$$

---

# réponse

La fonction  $f : (x, t) \rightarrow e^{-xt}$  définie sur  $]0, 1[ \times [0, +\infty[$ , admet une dérivée partielle par rapport à  $x$ , continue :

$$f'_x(x, t) = -te^{-xt}.$$

Si  $x \in [\alpha, 1[$ , alors  $te^{-xt} \leq te^{-\alpha t}$ . L'intégrale de cette dernière fonction converge.

Donc les conditions du théorème sont bien vérifiées.

La fonction  $F$  est dérivable, et sa dérivée est l'intégrale de la dérivée partielle de  $f$ , soit :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-xt} dt = -\frac{1}{x^2}.$$

Ici encore, la réponse était prévisible puisque :

$$F(x) = \frac{1}{x}.$$



---

## 3 ↗ Pour Comprendre et Utiliser

---



---

### 3-1 Énoncés des exercices

Chercher si une fonction de plusieurs variables (2 ou 3 en général) est continue. Calculer ses dérivées partielles, vérifier si elle est différentiable. Déterminer ses extrema.

---

exercice 1

#### Ouverts, fermés, points adhérents

On utilise la norme ( $\mathcal{E}$ ) euclidienne, ou une norme équivalente (voir les exemples).

1) Soit U l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Montrer que cet ensemble est ouvert ( $\mathcal{E}$ ) ( $\hat{\circ}$ ).

Déterminer son adhérence ( $\mathcal{E}$ ) ( $\odot$ ).

2) L'ensemble V suivant est-il ouvert, fermé ( $\mathcal{E}$ ) ( $\hat{\circ}$ ) ( $\odot$ ).

Quelle est son adhérence ( $\hat{\circ}$ )?

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y = 0 \text{ et } x \leq 0) \text{ ou } (y \neq 0)\}.$$

3) Soit E une partie fermée de  $\mathbb{R}^2$ , et  $(u_n)$  une suite de points de E, qui converge vers le point a. Démontrer que a appartient à E ( $\odot$ ).

La conclusion est-elle encore vraie si E n'est pas fermée ?

4) Soient A et B des parties non vides, fermées et bornées ( $\mathcal{A}$ ) de  $\mathbb{R}^2$ .

On pose :

$$d(A, B) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Montrer que si  $d(A, B) = 0$ , alors  $A \cap B \neq \emptyset$  ( $\hat{b}$ ) ( $\odot$ ).

La conclusion subsiste-t-elle si A, ou B, n'est pas fermé ?

exercice 2

### Limite, continuité ( $\mathcal{A}$ )

Soit U une partie de  $\mathbb{R}^2$ , et f une application de f dans R. Soit a un point appartenant à U.

#### 1) Méthodes élémentaires ( $\hat{b}$ )

1-1) On suppose que f a une limite L en a.

Montrer que les applications partielles ( $\mathcal{A}$ ) de f ont également des limites en a. Déterminer ces limites ( $\odot$ ).

1-2) On suppose que les applications partielles ont des limites différentes au point a, f a-t-elle une limite en a ( $\odot$ )?

1-3) On suppose que l'une des applications partielles de f n'a pas de limite au point a. Que peut-on en déduire pour f ( $\odot$ )?

1-4) Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application continue.

On suppose que  $g(\theta) = a$ . Si f a pour limite L en a, que peut-on dire de l'application  $h = f \circ g$  en  $\theta$  ( $\odot$ )? S'il existe une telle application g pour laquelle h n'a pas de limite en  $\theta$ , que peut-on dire de f ( $\hat{b}$ ) ( $\odot$ )?

#### 2) Exemples

Etudier le domaine de définition des fonctions suivantes, et leur limite éventuelle aux points adhérents ( $\mathcal{A}$ ) de ce domaine ( $\hat{b}$ ).

2-1)  $\frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . ( $\odot$ )

2-2)  $x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ . ( $\odot$ )

$$2-3) \frac{xy^k}{x^2 + y^2}. \text{ Discuter selon la valeur de } k \text{ entier } (\odot).$$

$$2-4) \frac{\sin(x)}{\cos(y) - \operatorname{ch}(x)}. (\odot)$$

$$2-5) xy \sin\left(\frac{x-y}{x^2 + y^2}\right). (\odot)$$

---

exercice 3

### Différentiabilité (†)

1) Etudier l'existence de dérivées partielles ( $\curvearrowright$ ) pour des fonctions de l'exercice précédent :

$$x \neq 0, f(x) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f(0) = 0.$$

$$(x, y) \neq (0, 0), g(x, y) = \frac{xy^k}{x^2 + y^2}, k \geq 2$$

$$g(0, 0) = 0.$$

prolongées aux points adhérents à leur domaine de définition.

Lorsque ces dérivées partielles existent, sont-elles continues ? Quelle conséquence pouvez-vous en tirer quant à la différentiabilité de ces fonctions ( $\odot$ ).

2) Etudier également l'existence et la continuité des dérivées partielles au point  $(0, 0)$  des fonctions données par ( $n$  naturel non nul) ( $\odot$ ) :

$$\frac{xy^{2n}}{x^{2n} + y^{2n+2}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ en } (0, 0),$$

$$\frac{xy^{2n}}{x^{2n+2} + y^{2n}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ en } (0, 0).$$

3) Dans les cas où les dérivées partielles existent mais ne sont pas continues, indiquer la valeur nécessaire de la différentielle (☺), si elle existe. Conclure à propos de la différentiabilité (☹).

---

exercice 4

### Dérivées partielles secondes

Pour les deux fonctions suivantes, calculer les dérivées partielles (☹) secondes (☺), et comparer les dérivées  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}$  :

$$xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ en } (0, 0)$$

$$(x + y)^2 \sin\left(\frac{x - y}{x + y}\right), \text{ si } (x + y) \neq 0, 0 \text{ sinon.}$$

---

exercice 5

### Opérateurs différentiels (♠) (☹)

1) Etablir les relations (☺) :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u.V) &= \langle \operatorname{grad}(u), V \rangle + u.\operatorname{div}(V), \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}(V)) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}(V)) - \Delta(V), \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) &= \Delta(u), \\ \operatorname{div}(V \wedge W) &= \langle W, \operatorname{rot}(V) \rangle - \langle V, \operatorname{rot}(W) \rangle, \\ \operatorname{rot}(u.V) &= u.\operatorname{rot}(V) + \operatorname{grad}(u) \wedge V. \end{aligned}$$

Rappelons que  $X \wedge Y$  désigne le produit vectoriel des vecteurs  $X$  et  $Y$  de  $\mathbb{R}^3$ , dont les composantes, si :

$$\begin{aligned} X &= (x_1, x_2, x_3) \\ Y &= (y_1, y_2, y_3), \end{aligned}$$

sont données par les expressions :

$$x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1.$$

2) Démontrer (☺) :

$$\forall V, \operatorname{div}(\operatorname{rot}(V)) = 0$$

$$\forall u, \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(u)) = 0.$$

L'intérêt de ces formules tient surtout au fait que, sous certaines conditions, elles ont une réciproque : si  $W$  est une fonction d'une partie de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même vérifiant certaines hypothèses, et si  $\operatorname{div}(W) = 0$ , alors il existe une fonction  $V$  telle que  $W = \operatorname{rot}(V)$ . On dit que  $W$  dérive d'un potentiel vecteur (Cf. le cours d'électromagnétisme).

De même si  $\operatorname{rot}(W) = 0$ , sous certaines conditions il existe une fonction  $u$  de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $W = \operatorname{grad}(u)$ . On dit que  $W$  dérive d'un potentiel scalaire (voir par exemple le cas de la gravitation).

3) Soit :

$$V = (y^2 + z^2, -yx, -xz).$$

Déterminer une fonction  $\phi(z)$ , dérivable, telle que :

$$\phi(1) = 1, \text{ et } \operatorname{div}(\phi(z).V) = 0.$$

Chercher alors  $u = (P, Q, 0)$ , tel que :

$$\phi(z).V = \operatorname{rot}(u).$$

---

exercice 6

### Recherche d'extremum

Chercher si les fonctions suivantes ont des points critiques (☹) (☺), puis si ceux-ci sont des extrema (☺), et, dans l'affirmative, en donner la nature (maximum, minimum) (♠).

1)  $x^3y^2(1 - x - y)$ .

2)  $x^2y^3(1 + 2y + 3x)$ .

3)  $(x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$ .

4)  $x^2 - 2xy + yz + y - z$ .

5)  $x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$ . Discuter selon les valeurs du paramètre réel  $a$ .

---

exercice 7

**Equations aux dérivées partielles** (☞) (♠)

1) On pose :

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2}}.$$

Démontrer la relation entre les dérivées partielles (☺) :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Généraliser à l'ensemble des fonctions de classe  $C^2$  positivement homogènes.

2) Soit  $g$  une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- Pour tout  $(x, y)$  on a :

$$g(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

- Il existe des fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $h$  et  $f$ , telles que pour tout  $x$  et tout  $y$  :

$$g(x, y) = f(x)h(y).$$

3) Soit  $f$  une fonction de classe  $C^2$  des variables  $(x, y)$  sur  $\mathbb{R}^2$ . On effectue le changement de variables :

$$u = x + \alpha y$$

$$v = x + \beta y$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels distincts.

3-1 Vérifier que l'application qui associe  $(u, v)$  à  $(x, y)$  est une bijection (☞) de classe  $C^\infty$  (☺). Quelle est sa réciproque ?

3-2 Soit  $g$  la fonction obtenue à partir de  $f$  par ce changement de variables. Ecrire  $g$  explicitement, puis exprimer les dérivées partielles premières et secondes de  $f$  en fonction de celles de  $g$  (☺).

3-3 Par un choix judicieux de  $\alpha$  et  $\beta$  (☺), résoudre les équations aux dérivées partielles :

$$(*) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(\*\*)  $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ . On discutera selon les valeurs des paramètres réels  $a, b, c$ , en supposant  $b^2 - ac > 0$ .

Etudier la convergence d'une intégrale à paramètre, la continuité, la dérivabilité, de la fonction qu'elle définit.

---

exercice 8

**Intégrales sur un intervalle fermé, borné (♠)**

1) On pose :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)},$$

$$J(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)},$$

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

Pour les deux premières questions, ne pas calculer explicitement les intégrales I et J.

1-1 Quels sont les domaines de définition des fonctions I et J ? Quelle relation y-a-t-il entre ces fonctions (☺) ?

1-2 Etudier la continuité de ces fonctions sur leur domaine de définition (☺), et l'existence de limites aux points adhérents aux domaines de définition, n'y appartenant pas, s'il en existe.

1-3 Calculer I(x), J(x), pour  $x^2 \neq 1$ , en déduire la valeur de K (☺).

2) On pose maintenant :

$$F_n(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(x+t^2)^n}.$$

2-1 Montrer que  $F_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et que (☺) :

$$F'_n(x) = -nF_{n+1}(x).$$

2-2 Dédurre l'expression de  $F_2(x)$ ,  $F_3(x)$ , et retrouver l'expression de  $K$ .

3) On pose, pour  $x > 1$  :

$$I(x) = \int_0^\pi \text{Log}(x + \cos(t)) dt,$$

$$J(x) = \int_0^\pi \text{Log}\left(\frac{x + \cos(t)}{x}\right) dt.$$

3-1 Montrer que  $I$  est définie, et que la fonction  $J$  est une fonction de classe  $C^1$  (☺) (☺).

3-2 Calculer  $J'(x)$ .

3-3 Expliquer pourquoi on a l'égalité :

$$J(x) = -\int_x^{+\infty} J'(s) ds.$$

3-4 En déduire l'expression de  $I(x)$ .

4) On considère les intégrales :

$$A(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt,$$

$$B(x) = \left( \int_0^x e^{-s^2} ds \right)^2.$$

4-1 Montrer que  $A$  et  $B$  sont des fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que (☺) :

$$\forall x \text{ réel, } A'(x) + B'(x) = 0.$$

4-2 Quelle est la valeur de  $A(x) + B(x)$  (☺) ?

4-3 Déterminer la limite de  $A(x)$  en  $+\infty$  (☺).



4-4 Déduire la valeur de l'intégrale (☺) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

---

exercice 9

**Intégrales sur un intervalle fermé, non borné** (♠)

Dans chacun des exemples suivants, examiner le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de la fonction de  $x$  définie par une intégrale.

1) (☺)  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2} dt.$

2) (☺)  $\int_2^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t + \sin(x)} dt.$

3) (☺)  $\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right) dt.$

4) (☺)  $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+tx} dt.$

---

exercice 10

**Autour de**  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt.$  (♠)

1) Montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

est convergente (♠) (☺). On note  $\Sigma$  sa valeur.

2) On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

2-1 Discuter la convergence de cette intégrale en fonction de  $x$  (☺).

2-2 Montrer que  $F$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et calculer sa dérivée (☺).

2-3 Déterminer la limite de  $F(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  (☺), et en déduire l'expression de  $F(x)$ .

3) On pose :

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(xt)}{t^2} dt.$$

3-1 Montrer que cette égalité définit une fonction dérivable (☺) sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

3-2 Calculer  $I'(x)$  en fonction de  $\Sigma$ , en déduire  $I(x)$ , et l'expression de l'intégrale (☺) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

4) On pose :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

4-1 Montrer que  $S$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$  (☺).

4-2 Montrer que  $S$  est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, qu'on déterminera (☺).

4-3 En étudiant  $S'$ , expliciter complètement  $S(x)$ , pour  $x \geq 0$  (☺).

4-4 Déduire la valeur de  $\Sigma$ .

exercice 11

### Quelques propriétés de la fonction Gamma

1) Déterminer pour quelles valeurs de  $x$  les intégrales suivantes sont convergentes (☺) ( $n$  est un entier naturel non nul) (☺) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

$$\int_0^{+\infty} |\text{Log}(t)|^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Lorsqu'elle converge, la première intégrale définit une fonction de  $x$  appelée la fonction Gamma, notée  $\Gamma(x)$ .

2) Montrer que la fonction  $\Gamma$  est de classe  $C^\infty$  sur son domaine de définition, et que sa dérivée n-ème est égale à l'intégrale (☺) (♠) :

$$\int_0^{+\infty} (\text{Log}(t))^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

3) Etablir les relations suivantes :

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x), \Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(QC-1) Etablir la formule :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

4) Etudier le prolongement possible de  $\Gamma$  en 0, en une fonction continue, puis sur  $] -1, 0[$ , en conservant la propriété  $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ .

5) Chercher la limite de  $\Gamma$  en  $+\infty$ .

---

### 3-2 Corrigés des exercices

---

exercice 1-C

1) Cet ensemble est la couronne circulaire située entre les cercles de centre O et de rayons 1 et 2 respectivement.

Soit  $v = (a, b)$  un point de U. On note  $r$  la norme de  $v$ .

Ce nombre vérifie l'encadrement  $1 < r < 2$ . Soit  $\rho$  la plus petite des différences  $2 - r$ ,  $r - 1$ . La boule ouverte de centre  $v$ , et de rayon  $\rho$  est contenue dans U. En effet tout point  $w$  de cette boule ouverte vérifie :

$$\begin{aligned}\|w\| &= \|w - v + v\| \leq \|w - v\| + \|v\| < \rho + r \leq 2 \\ \|w\| &\geq \|v\| - \|w - v\| > r - \rho \geq 1.\end{aligned}$$

On en déduit que U est bien un ensemble ouvert.

L'adhérence de U contient d'abord tous les éléments de U.

Si  $p$  est un point n'appartenant pas à U, on peut distinguer quatre cas :

\*  $\|p\| < 1$ . Soit  $\rho = 1 - \|p\|$ . La boule ouverte de centre  $p$  et de rayon  $\rho$  est extérieure à U. En effet, tout point  $w$  de cette boule vérifie :

$$\|w\| \leq \|w - p\| + \|p\| < \rho + \|p\| = 1.$$

Un tel point n'est donc pas un point adhérent à U.

\*\*  $\|p\| = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un point de la forme  $\lambda p$ , tel que :

$$2 > \|\lambda p\| > 1, \text{ et } \|p - \lambda p\| < \varepsilon.$$

Il suffit que le paramètre  $\lambda$  vérifie :

$$2 > \lambda > 1, (\lambda - 1) < \varepsilon.$$

Il suffit, par exemple, de choisir  $\lambda = \min(1 + 0,5 \varepsilon, 1,5)$ .

Toute boule ouverte de centre  $p$ , de rayon  $\varepsilon$ , coupe donc U, ce qui prouve que  $p$  est un point adhérent à U.

\*\*  $\|p\| = 2$ . Un raisonnement analogue au précédent montre qu'un tel point est adhérent à U.

\*\*  $\|p\| > 2$ . Dans ce cas le point n'est pas adhérent. Le raisonnement est analogue à celui du premier cas.

2) L'ensemble  $V$  est le complémentaire dans le plan de la demi-droite située sur l'axe des abscisses, et formée des points d'abscisse strictement positive. Il en résulte que  $V$  n'est pas ouvert.

En effet, toute boule ouverte de centre  $O$  contient des points de l'axe d'abscisse strictement positive. Aucune boule ouverte de centre  $O$  n'est donc contenue dans  $V$ .

Le demi-axe des abscisses complémentaire de  $V$  n'est pas ouvert.

En effet si  $(a, 0)$  est un point d'abscisse positive, toute boule ouverte centrée en ce point contient des points d'abscisse non nulle, donc aucune boule ouverte n'est incluse dans le demi-axe des abscisses.

Il en résulte que  $V$  n'est pas fermé.

Cherchons les points adhérents, n'appartenant pas à  $V$ . Ce sont des points de la forme  $(a, 0)$ , avec  $a > 0$ . Comme on l'a déjà remarqué, toute boule ouverte centrée en un tel point coupe  $V$ , donc tous ces points sont adhérents à  $V$ .

L'ensemble des points adhérents à  $V$  est donc le plan  $\mathbb{R}^2$  tout entier.

3) Ecrivons que  $a$  est la limite de la suite :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \implies \|u_n - a\| < \varepsilon.$$

Cela peut s'interpréter en disant que toute boule ouverte de centre  $a$ , et de rayon  $\varepsilon$  positif quelconque, coupe  $E$ . Le point  $a$  est donc adhérent à  $E$ .

Or si un ensemble est fermé, il contient tous ses points adhérents : en effet si  $v$  est un point du complémentaire d'un ensemble fermé  $F$ , comme ce complémentaire est ouvert, il existe une boule ouverte centrée en  $v$  contenue dans le complémentaire. Cette boule ouverte ne coupe donc pas  $F$ , ce qui montre que  $v$  n'est pas adhérent à  $F$ .

Si la partie  $E$  n'est pas fermée, la première partie du raisonnement subsiste. La limite est donc un point adhérent, mais ce n'est pas nécessairement un point de  $E$ .

On peut, pour obtenir un contre-exemple simple, considérer la suite des points  $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$  de  $E = \mathbb{R} - \{(0, 0)\}$ . Cette suite a pour limite  $(0, 0)$ , qui n'appartient pas à  $E$ .

4) Si  $d(A, B) = 0$ , cela signifie que :

$$\inf\{\|x - y\| \mid x \in A \text{ et } y \in B\} = 0,$$

donc, par définition de la borne inférieure, pour tout entier strictement positif  $n$ , il existe un point  $a_n$  de  $A$ , et un point  $b_n$  de  $B$  tels que :

$$\|a_n - b_n\| < \frac{1}{n}.$$

La suite des abscisses des points  $a_n$  est une suite bornée, donc on peut en extraire une suite convergente, d'indices  $\phi(n)$  (Théorème de Bolzano-Weierstrass).

La suite des ordonnées des points  $a_{\phi(n)}$  est également bornée, donc on peut en extraire une seconde suite convergente, d'indices  $\phi(\phi(n))$ . Les points  $a_{\phi(\phi(n))}$  forment donc une suite convergente de  $A$ . La limite, soit  $a$ , est donc un point du fermé  $A$ .

La suite extraite  $(b_{\phi(\phi(n))})$  de la suite  $(b_n)$  vérifie :

$$\|a_{\phi(\phi(n))} - b_{\phi(\phi(n))}\| < \frac{1}{\phi(\phi(n))}.$$

Il en résulte que la suite  $(b_{\phi(\phi(n))})$  a la même limite que la suite  $(a_{\phi(\phi(n))})$  (leur différence tend vers 0). Donc le point  $a$  est limite d'une suite de  $B$ , c'est un point de  $B$ . On conclut bien que  $A \leftrightarrow B \neq \emptyset$ .

*(QC-1) La conclusion subsiste-t-elle si  $A$ , ou  $B$ , n'est pas fermé ?*

---

exercice 2-C

1-1) Posons :

$$a = (\alpha, \beta).$$

Ecrivons que  $f$  a une limite valant  $L$  en  $a$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \chi, (x, y) \in U \text{ et } \|(x, y) - (\alpha, \beta)\| < \chi \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon.$$

Si  $x = \alpha$ , on obtient :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \chi, (\alpha, y) \in U \text{ et } \|(\alpha, y) - (\alpha, \beta)\| < \chi \Rightarrow |f(\alpha, y) - L| < \varepsilon,$$

et comme pour la norme euclidienne (et les autres normes usuelles vues en exemple)  $\|(0, t)\| = \|(t, 0)\| = |t|$ , on écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \chi, (\alpha, y) \in U \text{ et } |y - \beta| < \chi \Rightarrow |f(\alpha, y) - L| < \varepsilon,$$

ce qui signifie bien que l'application partielle  $y \rightarrow f(\alpha, y)$  a une limite en  $\beta$ , et que cette limite est  $L$ .

Bien entendu, on obtient le même résultat pour l'application partielle :

$$x \rightarrow f(x, \beta).$$

1-2) Si les applications partielles ont des limites différentes, alors  $f$  n'a pas de limite d'après le résultat précédent.

1-3) De même, 1-1 montre que si une des applications partielles n'a pas de limite, alors  $f$  n'a pas de limite.

1-4) Une fonction composée de deux fonctions continues est continue, donc  $h$  a pour limite  $L$  en  $\theta$ . Il en résulte que si il existe une telle application  $g$  pour laquelle  $h$  n'a pas de limite en  $\theta$ , alors  $f$  n'a pas de limite en  $a$ .

$$2-1) f(x, y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Cette expression est définie pour  $x^2 + y^2 \neq 0$ , soit en dehors de l'origine  $(0, 0)$ . Le point  $(0, 0)$  est adhérent à  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

Pour chercher quelle valeur il faudrait donner à  $f(0, 0)$  pour prolonger  $f$  en une fonction continue, il suffit de considérer une application partielle.

Par exemple :

$$f(x, 0) = \frac{x}{|x|}.$$

On voit que cette application vaut 1 si  $x > 0$ , et  $-1$  si  $x < 0$ . Elle n'a donc pas de limite en 0. Il en résulte que  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

$$2-2) f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cette expression est définie pour  $x \neq 0$ . Les points de l'axe des ordonnées sont adhérents au complémentaire de l'axe dans le plan.

Cherchons si on peut prolonger  $f(x, y)$  en  $(0, 0)$ .

L'application partielle  $x \rightarrow f(x, 0)$  est nulle donc la seule valeur possible pour la limite éventuelle en  $(0, 0)$  est 0. Or, on voit que le facteur sinus est borné, donc, comme lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ , avec  $x \neq 0$ ,  $x$  tend vers 0, l'expression  $x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)$  tend bien vers 0.

On peut prolonger  $f$  en  $(0, 0)$  en une fonction continue en posant :

$$f(0, 0) = 0.$$

Bien entendu, ce raisonnement s'étend à tout point de la forme  $(0, \alpha)$ .

$$2-3) f(x, y) = \frac{xy^k}{x^2 + y^2}.$$

Le domaine de définition est  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ . Le point  $(0, 0)$  est adhérent à  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ .

L'application partielle  $x \rightarrow f(x, 0)$  est nulle, donc tend vers 0.

La seule valeur possible pour la limite de  $f$  en  $(0, 0)$  est donc 0, si cette limite existe.

Pour  $k = 1$ , cherchons la limite de  $f(x, x)$  quand  $x$  tend vers 0 (Cf 1-4) :

$$f(x, x) = \frac{x^2}{2x^2}$$

donc  $f(x, x)$  tend vers  $\frac{1}{2}$ . D'après le résultat précédent,  $f$  n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

Pour  $k \geq 2$ , posons :

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta),$$

avec  $r > 0$ , et  $\theta \in [0, 2\pi[$ . On obtient :

$$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{r^{k+1} \cos(\theta) \sin^k(\theta)}{r^2} = r^{k-1} \cos(\theta) \sin^k(\theta).$$



Or, si  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ , alors  $r$  tend vers 0, donc, comme  $k - 1 \geq 1$ , on voit que  $f(x, y)$  tend vers 0. Dans ce cas  $f$  a pour limite 0 en  $(0, 0)$ .

$$2-4) f(x, y) = \frac{\sin(x)}{\cos(y) - \operatorname{ch}(x)}.$$

Cette expression n'est pas définie si  $\cos(y) = \operatorname{ch}(x)$ . Comme  $\cos(y) \leq 1$  et  $\operatorname{ch}(x) \geq 1$ , ces deux fonctions sont égales si et seulement si elles sont égales à 1, soit  $x = 0$ , et  $y = 2k\pi$  ( $k$  entier relatif). L'ensemble de définition est donc le plan privé des points  $(0, 2k\pi)$ .

Chacun de ces points est adhérent au domaine de définition.

L'application partielle :

$$y \rightarrow f(0, y)$$

est nulle donc tend vers 0 si  $y$  tend vers  $2k\pi$ .

Les seules limites admissibles pour  $f$  en l'un des points  $(0, 2k\pi)$  sont donc égales à 0.

L'application partielle :

$$x \rightarrow f(x, 2k\pi)$$

vaut :

$$f(x, 2k\pi) = \frac{\sin(x)}{1 - \operatorname{ch}(x)},$$

et pour  $x$  tendant vers 0 :

$$\frac{\sin(x)}{1 - \operatorname{ch}(x)} \sim \frac{x}{-\frac{x^2}{2}}$$

donc cette expression n'a pas de limite finie en 0.

Ces résultats concernant les applications partielles sont incompatibles avec l'existence d'une limite pour  $f$ .

$$2-5) f(x, y) = xy \sin\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right).$$

Cette fonction n'est pas définie si  $x = y = 0$ .

Le point  $(0, 0)$  est adhérent à  $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ , qui est le domaine de définition.

Lorsque  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ , le sinus est borné, et  $xy$  tend vers 0, donc  $f(x, y)$  tend vers 0.

On prolongera  $f$  par continuité en  $(0, 0)$  en posant  $f(0, 0) = 0$ .

---

exercice 3-C

$$1) f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right), \text{ si } x \neq 0, \text{ et } f(0, y) = 0.$$

Les expressions obtenues sont continues sur le plan privé de l'axe des ordonnées. Il en résulte que  $f$  est différentiable pour  $x \neq 0$ .

Au voisinage d'un point de la forme  $(0, a)$ , le taux d'accroissement par rapport à la première variable est :

$$\frac{x^2 \sin\left(\frac{a}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \sin\left(\frac{a}{x}\right).$$

Il tend vers 0 si  $x$  tend vers 0.

Par rapport à la seconde variable, on trouve :

$$\frac{f(0, y) - f(0, a)}{y - a} = \frac{0}{y - a} = 0.$$

La limite est encore 0.

La fonction a donc des dérivées partielles en tout point.

Etudions leur continuité.

La dérivée par rapport à  $x$  :

$$2x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) \text{ tend vers } 0 \text{ si } (x, y) \text{ tend vers } (0, 0)$$

n'a pas de limite si  $(x, y)$  tend vers  $(0, a)$ , avec  $a \neq 0$ .

La dérivée par rapport à  $y$  :

$$x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \text{ tend vers } 0 \text{ si } (x, y) \text{ tend vers } (0, a) \text{ pour tout } a.$$

En conclusion, cette fonction admet des dérivées partielles continues au point  $(0, 0)$ , elle est donc différentiable en  $(0, 0)$ . Pour les autres points de la forme  $(0, a)$  ( $a \neq 0$ ), les dérivées partielles ne sont pas continues, ce qui ne permet pas de conclure à propos de la différentiabilité.

$$** f(x, y) = \frac{xy^k}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \text{ et } f(0, 0) = 0.$$

En dehors de  $(0, 0)$ , cette fonction admet des dérivées partielles continues, elle est donc différentiable.

Cherchons s'il existe des dérivées partielles en  $(0, 0)$  :

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

donc les dérivées partielles existent et sont égales à 0

Cherchons si les dérivées partielles sont continues en  $(0, 0)$ .

La dérivée partielle par rapport à  $x$  :

$$\frac{y^k(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{r^{k+2}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))}{r^4}$$

tend vers 0 si  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$  si et seulement si  $k + 2 - 4 > 0$ , soit si et seulement si  $k > 2$ .

La dérivée partielle par rapport à  $y$  :

$$\frac{xy^{k-1}(kx^2 + (k-2)y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{r^{k+2}(k \cos^2(\theta) + (k-2) \sin^2(\theta))}{r^4}$$

tend vers 0 dans les mêmes conditions.

Il en résulte que si  $k > 2$ , cette fonction a des dérivées partielles continues en  $(0, 0)$ , donc elle est différentiable. Si  $k = 2$ , on ne peut pas conclure sans nouveau calcul.

$$2) g(x, y) = \frac{xy^{2n}}{x^{2n} + y^{2n+2}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \text{ 0 en } (0, 0).$$

Les applications partielles en  $(0, 0)$  sont nulles, donc cette fonction a des dérivées partielles en  $(0, 0)$ , qui valent 0.

En dehors de  $(0, 0)$  les dérivées partielles n'ont pas de limite en  $(0, 0)$ .

Pour la première, par exemple, si  $x = 0$  et  $y$  tend vers 0, l'expression se réduit à :

$$\frac{-y^{2n+2}}{y^{2n+4}} = -\frac{1}{y^2}$$

elle n'a pas de limite en 0.

On ne peut donc pas conclure sans nouveau calcul pour la différentiabilité de  $g$  en  $(0, 0)$ .

$$\star\star h(x, y) = \frac{xy^{2n}}{x^{2n+2} + y^{2n}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ en } (0, 0).$$

En dehors de  $(0, 0)$ , pour la première dérivée, pour  $x = 0$ , et  $y$  tendant vers 0, la dérivée est égale à 1.

Or l'application partielle  $y \rightarrow h(0, y)$  est nulle pour tout  $y \neq 0$ , donc la dérivée partielle en  $(0, 0)$  est nulle.

Les dérivées partielles de  $h$  ne sont pas toutes deux continues en  $(0, 0)$ .

On ne peut donc pas conclure sans nouveau calcul quant à la différentiabilité de  $h$ .

$$3) f(x, y) = x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right), f(0, y) = 0.$$

Il reste à examiner les points de la forme  $(0, a)$ ,  $a \neq 0$ . En ces points, les dérivées partielles existent et sont nulles. Si la fonction est différentiable, sa différentielle est donc l'application nulle.

Inversement, examinons l'expression :

$$\frac{f(x, y) - f(0, a)}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2}} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2}}$$

pour voir si elle tend vers 0 quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, a)$ .

Posons :

$$x = r \cos(t), y = a + r \sin(t)$$

on obtient :

$$\frac{x^2 \sin\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}} = \frac{r^2 \cos^2(t) \sin\left(\frac{a + r \cos(t)}{r \sin(t)}\right)}{r}$$

donc cette expression tend vers 0.

La fonction est bien différentiable partout.

$$** f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, f(0, 0) = 0.$$

Les dérivées partielles existent partout, elles sont nulles en (0, 0), mais ne sont pas continues en (0, 0).

La différentielle, si elle existe, est l'application 0.

La différentiabilité s'étudie en cherchant la limite du rapport :

$$\frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{r^3 \cos(t) \sin^2(t)}{r^3}.$$

On voit que ce rapport n'a pas de limite indépendante de t lorsque r tend vers 0, donc la fonction n'est pas différentiable à l'origine.

$$** g(x, y) = \frac{xy^{2n}}{x^{2n} + y^{2n+2}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ en } (0, 0).$$

Ici encore, la différentielle, si elle existe, en (0, 0), ne peut être que nulle. La fonction g est donc différentiable en (0, 0) si et seulement si le rapport suivant tend vers 0 en (0, 0) :

$$\frac{g(x, y) - g(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy^{2n}}{(x^{2n} + y^{2n+2})\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^{2n+1} \cos(t) \sin^{2n}(t)}{r^{2n+1} (\cos^{2n}(t) + r^2 \sin^{2n+2}(t))}.$$

Or on voit que la limite obtenue quand r tend vers 0 dépend de t, ce qui indique qu'il n'y a pas de limite quand (x, y) tend vers (0, 0).

$$** h(x, y) = \frac{xy^{2n}}{x^{2n+2} + y^{2n}}, \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), 0 \text{ en } (0, 0).$$

Les dérivées partielles sont nulles en  $(0, 0)$ . Le rapport à examiner est :

$$\frac{h(x,y) - h(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{xy^{2n}}{(x^{2n+2} + y^{2n})\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r^{2n+1} \cos(t) \sin^{2n}(t)}{r^{2n+1}(r^2 \cos^{2n+2}(t) + \sin^{2n}(t))}.$$

Comme il n'a pas de limite quand  $(x, y)$  tend vers  $(0, 0)$ , la fonction  $h$  n'est pas différentiable en  $(0, 0)$ .

---

exercice 4-C

$$** \quad xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ si } (x,y) \neq (0,0), 0 \text{ en } (0,0).$$

On peut prolonger  $p$  en une fonction continue partout en posant :

$$p(0, 0) = 0.$$

On le voit par exemple par le changement de variable déjà utilisé plus haut dans les exercices :  $x = r \cos(t)$ ,  $y = r \sin(t)$ .

En  $(0, 0)$  les dérivées partielles premières sont nulles puisque les applications partielles sont nulles.

Les applications partielles  $y \rightarrow p'_x(0, y)$ , et  $x \rightarrow p'_y(x, 0)$  valent donc respectivement  $-y$  et  $x$ .

En  $(0, 0)$ , on a donc :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}(0,0) = -1, \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x}(0,0) = 1.$$

$$** \quad q(x, y) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{x - y}{x + y}\right), \text{ si } (x + y) \neq 0, 0 \text{ sinon.}$$

Les dérivées partielles secondes en  $(0, 0)$  sont, pour  $q$  comme pour  $p$ , différentes :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}(0,0) = 2 \sin(-1) + 2 \cos(-1),$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x}(0,0) = 2 \sin(1) - 2 \cos(1).$$

(QC-1) Vérifier que les dérivées partielles secondes ne sont pas continues en  $(0, 0)$ .

---

exercice 5-C

1) Précisons les notations :

$$V = (a, b, c)$$

où  $a, b, c$  désignent des fonctions réelles de 3 variables  $(x, y, z)$  de classe  $C^2$ .

\*\* Pour la première relation, le calcul donne :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(u.(a,b,c)) &= \operatorname{div}(u.a, u.b, u.c) \\ &= \frac{\partial(ua)}{\partial x} + \frac{\partial(ub)}{\partial y} + \frac{\partial(uc)}{\partial z} \\ &= u \frac{\partial(a)}{\partial x} + a \frac{\partial(u)}{\partial x} + u \frac{\partial(b)}{\partial y} + b \frac{\partial(u)}{\partial y} + u \frac{\partial(c)}{\partial z} + c \frac{\partial(u)}{\partial z} \\ &= a \frac{\partial(u)}{\partial x} + b \frac{\partial(u)}{\partial y} + c \frac{\partial(u)}{\partial z} + u \left( \frac{\partial(a)}{\partial x} + \frac{\partial(b)}{\partial y} + \frac{\partial(c)}{\partial z} \right) \\ &= \langle \operatorname{grad}(u), V \rangle + u \operatorname{div}(V). \end{aligned}$$

\*\* Pour la seconde relation :

$$\operatorname{rot}(V) = \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right),$$

la première composante de  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(V))$  est donc :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z \partial x}$$

la première composante de  $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(V))$  est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial z}$$

et enfin la première composante de  $\Delta(V)$  est :

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}$$

ce qui montre bien la formule proposée, pour la première composante, compte tenu de l'égalité des dérivées secondes :

$$\frac{\partial^2 b}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 b}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 c}{\partial z \partial x}.$$

Les autres composantes se calculent de même, bien entendu, donc la troisième relation est vérifiée.

\*\* La troisième relation se calcule directement :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

\*\* Pour la quatrième relation, posons  $W = (a', b', c')$ .

Le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(V \wedge W) &= c' \frac{\partial b}{\partial x} + b' \frac{\partial c'}{\partial x} - b' \frac{\partial c}{\partial x} - c' \frac{\partial b'}{\partial x} + \\ & a' \frac{\partial c}{\partial y} + c' \frac{\partial a'}{\partial y} - a' \frac{\partial c'}{\partial y} - c' \frac{\partial a}{\partial y} + a' \frac{\partial b'}{\partial z} + b' \frac{\partial a}{\partial z} - a' \frac{\partial b}{\partial z} - b' \frac{\partial a'}{\partial z}. \end{aligned}$$

Comme on a les égalités :

$$\begin{aligned} \langle W, \operatorname{rot}(V) \rangle &= a' \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) + b' \left( \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) + c' \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \\ \langle V, \operatorname{rot}(W) \rangle &= a \left( \frac{\partial c'}{\partial y} - \frac{\partial b'}{\partial z} \right) + b \left( \frac{\partial a'}{\partial z} - \frac{\partial c'}{\partial x} \right) + c \left( \frac{\partial b'}{\partial x} - \frac{\partial a'}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

l'égalité proposée est bien vérifiée.

\*\* Terminons par la cinquième formule.

On écrit :



$$\begin{aligned} \text{rot}(uV) &= \left( \frac{\partial uc}{\partial y} - \frac{\partial ub}{\partial z}, \frac{\partial ua}{\partial z} - \frac{\partial uc}{\partial x}, \frac{\partial ub}{\partial x} - \frac{\partial ua}{\partial y} \right) \\ &= u \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}, \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) + \left( c \frac{\partial u}{\partial y} - b \frac{\partial u}{\partial z}, a \frac{\partial u}{\partial z} - c \frac{\partial u}{\partial x}, b \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial u}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Le premier vecteur est bien  $u \cdot \text{rot}(V)$ , et de même on reconnaît dans le second le vecteur  $\text{grad}(u) \wedge V$ .

2) Ces relations ne posent pas de difficulté particulière. Elle reposent sur la commutativité des dérivations par rapport à deux variables distinctes :

$$\begin{aligned} \text{div}(\text{rot}(V)) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 c}{\partial y \partial x} + \dots \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad}(u)) &= \text{rot} \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right), \dots \right) \\ &= (0, 0, 0). \end{aligned}$$

(QC-1) Soit  $V$  une fonction vectorielle. On suppose qu'il existe une fonction  $u$  telle que  $V$  soit colinéaire à  $\text{grad}(u)$ . Vérifier :

$$\langle V, \text{rot}(V) \rangle = 0.$$

3) On a vu plus haut que :

$$\begin{aligned} \text{div}(\phi(z) \cdot V) &= \langle \text{grad}(\phi), V \rangle + \phi(z) \cdot \text{div}(V) \\ &= -xz \phi'(z) - 2x \phi(z) \end{aligned}$$

donc pour que  $\text{div}(\phi(z) \cdot V) = 0$ , il suffit que  $\phi$  vérifie :

$$\frac{\phi'(z)}{\phi(z)} = -\frac{2}{z}.$$

Compte tenu de  $\phi(1) = 1$ , cela détermine  $\phi$  :

$$\phi(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Cherchons maintenant  $u$ .

Les équations sont les suivantes :

$$-Q'_z = \frac{y^2 + z^2}{z^2},$$

$$P'_z = -\frac{xy}{z^2},$$

$$Q'_x - P'_y = -\frac{x}{z}.$$

On trouve facilement :

$$Q = -\frac{y^2}{z} + z, \quad P_z = \frac{xy}{z}.$$

(QC-2) On pose :

$$V = (2xyz, x^2z, -x^2y).$$

Chercher  $\phi(z)$  telle que  $\phi(1) = 1$  et  $\text{rot}(\phi(z).V) = 0$ .

Trouver alors  $U$  tel que  $\phi(z).V = \text{grad}(U)$ .

exercice 6-C

1)  $f(x, y) = x^3y^2(1 - x - y)$ .

Les dérivées partielles s'annulent aux points où  $x = 0$ , ou  $y = 0$ .

Un autre point critique se trouve éventuellement à l'intersection des droites d'équations :

$$3y - 3 + 4x = 0$$

$$3y - 2 + 2x = 0.$$

Ces droites se coupent effectivement au point :

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right).$$

Il faut maintenant voir si ces points critiques sont des extrema.

Les dérivées partielles secondes s'annulent toutes pour  $x = 0$ .

On ne peut donc pas utiliser la méthode habituelle aux points  $(0, b)$ .

On observe que  $f(0, 0) = 0$ , et que au voisinage de  $(0, 0)$ , le produit  $x^3y^2$  n'a pas un signe fixe. Il en résulte que  $(0, 0)$  n'est pas un extremum.

En  $(a, 0)$  ( $a \neq 0$ ),  $f$  s'annule. Posons  $x = a + h$ ,  $h$  tendant vers 0.

Si  $a = 1$ , le signe de  $(1 + h)^3$  est  $+$  au voisinage de  $(a, 0)$ , de même que celui de  $y^2$ , mais le signe de  $1 - x - y = -h - y$  change, donc ce point n'est pas un extremum.

Si  $a \neq 1$ ,  $a > 0$ , les signes des différents facteurs sont tous fixes :

$$(a + h)^3 > 0, y^2 \geq 0, 1 - a - h - y \text{ est du signe de } 1 - a$$

un tel point est donc un maximum si  $a > 1$ , un minimum si  $a < 1$ .

Si  $a < 0$ , les signes des différents facteurs sont :

$$(a + h)^3 < 0, y^2 \geq 0, 1 - a - h - y \text{ est du signe de } 1 - a,$$

un tel point est donc un maximum.

En  $(0, b)$ ,  $b \neq 0$ ,  $f$  s'annule. Posons  $y = b + k$ ,  $k$  tendant vers 0.

Le signe de  $x^3$  n'est pas fixe au voisinage de  $(0, b)$ , alors que celui du facteur  $(b + k)^2$  est fixe, ainsi que celui de  $(1 - x - b - k)$  si  $b \neq 1$ . Ces points ne sont pas des extrema.

De même, si  $b = 1$ ,  $x^3(-x - k)$  a un signe variable.

Pour le point  $A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ .

Les dérivées partielles secondes ne s'annulent pas toutes.

On doit donc examiner la valeur du discriminant : il est négatif d'après le calcul précédent, donc il s'agit bien d'un extremum. D'après le signe du

terme en  $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ , qui est négatif, on voit qu'il s'agit d'un maximum, de valeur :

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}.$$

2)  $f(x, y) = x^2y^3(1 + 2y + 3x)$ .

Les points critiques sont les points des deux axes de coordonnées, et un point exceptionnel :

$$B = \left(\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}\right).$$

Les dérivées secondes s'annulent toutes pour  $y = 0$ .

Étudions le signe de  $f(x, y)$  au voisinage des axes. La méthode est analogue à celle utilisée pour le cas précédent.

Pour l'origine,  $x^2$  a un signe fixe, et  $y^3$  change de signe, donc l'origine n'est pas un extremum.

Au voisinage d'un point de la forme  $(a, 0)$ ,  $y^3$  change de signe,  $1 + 2y + 3x$  a le signe de  $1 + 3a$  si  $1 + 3a \neq 0$ , donc dans ce cas, la fonction n'a pas d'extremum. Si  $1 + 3a = 0$ , le dernier facteur change également de signe donc il n'y a pas d'extremum.

Pour un point de la forme  $(0, b)$ ,  $b \neq 0$ ,  $y^3$  a un signe fixe, et  $1 + 2y + 3x$  a le signe de  $1 + 2b$  si  $1 + 2b \neq 0$ . Dans ce cas, si  $b > 0$ , la fonction a un minimum en  $(0, b)$ , si  $b < 0$  et  $1 + 2b < 0$ , la fonction a un minimum, sinon la fonction a un maximum. Enfin, si  $1 + 2b = 0$ , la fonction n'a pas d'extremum.

3)  $f(x, y) = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$ .

Les dérivées partielles s'annulent simultanément en  $(0, 0)$  d'abord.

Si  $x$  n'est pas 0, alors il faut que  $-1 + x^2 - y^2 = 0$ .

Si de plus  $y \neq 0$ , alors  $1 + x^2 - y^2 = 0$ , ce qui est impossible.

Il en résulte que si  $x \neq 0$ , alors  $y = 0$  et  $-1 + x^2 - y^2 = 0$ , d'où  $x = 1$ , ou  $x = -1$ , d'où les points  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

On trouve, de la même façon les points  $(0, 1)$ ,  $(0, -1)$ .

En résumé, il y a cinq points critiques :

$$(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0).$$

Calculons les dérivées partielles secondes :

Pour  $(0, 0)$ , le discriminant est positif, ce point n'est donc pas un extremum.

Pour  $(1, 0)$  : Il s'agit d'un extremum. Ici un maximum.

Pour  $(-1, 0)$  : Il s'agit d'un extremum. Ici un maximum.

Pour  $(0, 1)$  : Il s'agit d'un extremum. Ici un minimum.

Pour  $(0, -1)$  : Il s'agit d'un extremum. Ici un minimum.

$$4) f(x, y, z) = x^2 - 2xy + yz + y - z.$$

Il y a un seul point critique, en  $(1, 1, 1)$ .

L'existence, et la nature, d'un extremum en  $(1, 1, 1)$  dépend du signe de la forme quadratique de la formule de Taylor, ou encore, par un changement de variables évident :

$$X^2 - 2XY + YZ.$$

Pour étudier ce signe, on écrit cette forme quadratique comme combinaison de carrés, par la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned} X^2 - 2XY + YZ &= (X - Y)^2 - Y^2 + YZ \\ &= (X - Y)^2 - \left(Y - \frac{1}{2}Z\right)^2 + \frac{1}{4}Z^2. \end{aligned}$$

Le signe n'est pas fixe, puisque la signature n'est pas  $(3, 0)$ , ni  $(0, 3)$ .

La fonction n'a pas d'extremum.

$$5) f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy.$$

On voit que  $(0, 0)$  est toujours un point critique.

Par ailleurs, si  $a + 1 < 0$ , il y a deux autres points critiques, solutions de l'équation  $z^2 + 1 + a = 0$ , soit :

$$\left(\sqrt{-a-1}, \sqrt{-a-1}\right), \left(-\sqrt{-a-1}, -\sqrt{-a-1}\right).$$

Si  $1 - a < 0$ , il y a deux points critiques, en :

$$(\sqrt{a-1}, -\sqrt{a-1}), (-\sqrt{a-1}, \sqrt{a-1})$$

En résumé, on a le tableau suivant de points critiques :

$a < -1$	$-1 \leq a \leq 1$	$1 < a$
3 points	1 point	3 points

\* Point (0, 0).

La fonction s'écrit :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2axy + x^2y^2.$$

La forme quadratique  $x^2 + y^2 + 2axy$  est positive si  $a^2 - 1 \leq 0$ . Son signe n'est pas indépendant de  $(x, y)$  si  $a^2 - 1 > 0$ .

En conclusion, (0, 0) est un minimum si  $-1 \leq a \leq 1$ , et n'est pas un extremum si  $a > 1$  ou  $a < -1$ .

\* cas  $a < -1$ . Les points à examiner sont :

$$(\sqrt{-a-1}, \sqrt{-a-1}), (-\sqrt{-a-1}, -\sqrt{-a-1}).$$

La formule de Taylor permet d'étudier la nature de ces points critiques.

Pour le premier point le discriminant est  $16 + 16a$ , qui est ici négatif.

On en déduit que la forme quadratique a un signe fixe, qui est ici celui de  $-a$ , donc positif. Le point est donc un minimum.

Le cas de l'autre point conduit aux mêmes calculs : c'est aussi un minimum.

\* cas  $a > 1$ .

On vérifie de même qu'on obtient deux minima.

---

exercice 7-C

$$1) f(x, y) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 + xy + y^2}}.$$

C'est une simple vérification, mais les calculs doivent être menés avec soin, pour aboutir à la relation annoncée.

Plus généralement, une fonction positivement homogène vérifie, pour tout  $\lambda$  positif :

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y).$$

En dérivant par rapport à  $\lambda$ , on obtient :

$$xf'_x(\lambda x, \lambda y) + yf'_y(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

d'où pour  $\lambda = 1$ , la formule d'Euler :

$$xf'_x + yf'_y = f.$$

Dérivons membre à membre par rapport à  $x$ , il vient :

$$yf''_{yx} + xf''_{x^2} = 0$$

$$xf''_{xy} + yf''_{y^2} = 0.$$

D'où :

$$(f''_{yx})^2 = f''_{x^2} f''_{y^2}.$$

2) Supposons d'abord qu'il existe des fonctions comme dans l'énoncé, telles que  $g(x, y) = f(x)h(y)$ . Calculons les dérivées partielles :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = f'(x)h(y), \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x)h'(y), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = f'(x)h'(y),$$

d'où l'égalité, immédiatement :

$$g(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Réciproquement, supposons :

$$g(x, y) \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Sur un domaine où la fonction  $g$  ne s'annule pas, cette relation équivaut à :

$$\frac{\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)}{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)} = \frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{g(x, y)}$$

donc :

$$\text{Log}\left(\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right|\right) = \text{Log}(g(x, y)) + K$$

où  $K$  est une constante, pour la variable  $y$ , c'est-à-dire une fonction de  $x$  seulement :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \pm e^{K(x)} g(x, y)$$

donc :

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{g(x, y)} = C(x)$$

donc il existe des fonctions  $A(x)$  (primitive de  $C(x)$ ) et  $B(y)$  telles que :

$$\begin{aligned} \text{Log}(|g(x, y)|) &= A(x) + B(y) \\ g(x, y) &= \pm e^{A(x)} e^{B(y)} = f(x)h(y). \end{aligned}$$

3-1) Il suffit de vérifier qu'on peut résoudre le système d'équations :

$$\begin{aligned} u &= x + \alpha y \\ v &= x + \beta y \end{aligned}$$

ce qui est évident :

$$\begin{aligned} \frac{u - v}{\alpha - \beta} &= y \\ \frac{-\beta u + \alpha v}{\alpha - \beta} &= x. \end{aligned}$$

Par ailleurs, les applications linéaires sont de classe  $C^\infty$ .



3-2) On pose donc :

$$g(x + \alpha y, x + \beta y) = f(x, y)$$

d'où les dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + \alpha y, x + \beta y) + \frac{\partial g}{\partial v}(x + \alpha y, x + \beta y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha \frac{\partial g}{\partial u}(x + \alpha y, x + \beta y) + \beta \frac{\partial g}{\partial v}(x + \alpha y, x + \beta y).$$

et les dérivées partielles secondes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x + \alpha y, x + \beta y) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x + \alpha y, x + \beta y) \\ &\quad + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x + \alpha y, x + \beta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \alpha \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x + \alpha y, x + \beta y) + (\beta + \alpha) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x + \alpha y, x + \beta y) \\ &\quad + \beta \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x + \alpha y, x + \beta y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \alpha^2 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x + \alpha y, x + \beta y) + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x + \alpha y, x + \beta y) \\ &\quad + \beta^2 \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x + \alpha y, x + \beta y). \end{aligned}$$

3-3) L'équation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

est équivalente à :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Remplaçons par les expressions précédentes, en choisissant :

$$\alpha = 1, \beta = -1.$$

L'équation précédente est équivalente à :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

Donc on écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial u} = K(u)$$

$$g(u, v) = A(u) + B(v).$$

Il en résulte qu'une fonction vérifie l'équation proposée si et seulement si il existe des fonctions A et B telles que :

$$f(x, y) = A(x + y) + B(x - y).$$

$$** a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Si on remplace les dérivées partielles par leur expression, on obtient trois termes, dont les coefficients sont respectivement :

$$a + 2b\alpha + c\alpha^2, 2a + 2b(\beta + \alpha) + 2c\alpha\beta, a + 2b\beta + c\beta^2$$

pour les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ .

\*\* Supposons, d'abord,  $c \neq 0$ . Choisissons pour  $\alpha$  et  $\beta$  les deux racines réelles distinctes de l'équation :

$$cX^2 + 2bX + a = 0.$$

Il en résulte que :

$$a + 2b\alpha + c\alpha^2 = a + 2b\beta + c\beta^2 = 0$$

$$2a + 2b(\beta + \alpha) + 2c\alpha\beta = 2a - \frac{4b^2}{c} + 2a = 4\frac{ac - b^2}{c} \neq 0$$

et l'équation proposée équivaut à :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0.$$

Il en résulte que  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$  est une fonction de  $u$  seulement, soit  $A(u)$ , donc  $g(u, v)$  est somme d'une fonction de  $u$  et d'une fonction de  $v$ .  
En conclusion, il existe des fonctions d'une variable, soient  $p$  et  $q$  telles que l'égalité soit vraie :

$$f(x, y) = p(x + \alpha y) + q(x + \beta y)$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les réels déterminés plus haut.

✱ Si  $c = 0$ , et  $a \neq 0$ , on inversera les rôles de  $x$  et  $y$  et on obtient une réponse analogue.

✱ Si  $c = 0 = a, b \neq 0$ , on obtient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Dans ce cas, il est inutile de faire un changement de variable, il existe des fonctions d'une variable, soient  $h$  et  $k$  telles que :

$$f(x, y) = h(x) + k(y).$$

---

exercice 8-C

$$1-1) I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)},$$

$$J(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}.$$

Si  $x \neq 0$ , l'expression :

$$\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

est continue sur  $[0, 1]$  donc  $I(x)$  est bien définie.

Pour  $x = 0$ , cette expression devient :

$$\frac{1}{(1+t^2)^2}$$

elle est positive et équivalente en 0 à :

$$\frac{1}{t^2}$$

donc non intégrable sur  $]0, 1]$ .  $I$  n'est pas définie en 0.

Pour  $J(x)$ , l'expression :

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

est continue sur  $[0, 1]$  quel que soit  $x$ , donc  $J$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $x \neq 0$ , posons :

$$x' = \frac{1}{x}.$$

On obtient :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)\left(\left(\frac{1}{x'}\right)^2 + t^2\right)} dt = x'^2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+x'^2 t^2)}$$

$$x^2 I(x) = J\left(\frac{1}{x}\right).$$

1-2) La fonction de deux variables :

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}$$

est continue en tout point où elle est définie, en particulier en tout point où  $x$  n'est pas nul. Il en résulte que  $I$  est continue sur son domaine de définition  $\mathbb{R} - \{0\}$ . Cette fonction est croissante sur  $]-\infty, 0[$ , et décroissante sur  $]0, +\infty[$  :

$$|x'| \leq |x| \Rightarrow x'^2 \leq x^2 \Rightarrow \frac{1}{(x^2+t^2)} \leq \frac{1}{(x'^2+t^2)} \Rightarrow I(x) \leq I(x').$$

On a, pour  $x \neq 0$  :

$$I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \geq \int_0^1 \frac{dt}{2(x^2+t^2)} = \frac{1}{2x} \left[ \text{Arc tan} \left( \frac{t}{x} \right) \right]_0^1$$

$$I(x) \geq \frac{1}{2x} \text{Arc tan} \left( \frac{1}{x} \right)$$

et pour  $x$  tendant vers 0,  $x > 0$  par exemple,  $\text{Arc tan} \left( \frac{1}{x} \right)$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ ,  
 donc  $\frac{1}{2x} \text{Arc tan} \left( \frac{1}{x} \right)$  tend vers  $+\infty$ . La fonction  $I$  tend vers  $+\infty$  en 0.

La fonction de deux variables :

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}$$

est continue en tout point de  $\mathbb{R}^2$ , donc  $J$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $J$  est croissante sur  $]-\infty, 0]$ , et décroissante sur  $[0, +\infty[$  :

$$|x'| \leq |x| \Rightarrow x'^2 \leq x^2 \Rightarrow \frac{1}{(1+x'^2t^2)} \leq \frac{1}{(1+x^2t^2)} \Rightarrow J(x) \leq J(x').$$

Comme elle est minorée, elle admet une limite finie en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . On observe d'abord que pour tout  $x$  :

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq 1$$

donc :

$$\int_0^\varepsilon \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \varepsilon.$$

Pour  $t \geq \varepsilon$ ,  $(1+t^2)(1+x^2t^2) \geq x^2\varepsilon^2$ , donc si  $x \neq 0$  :

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{1-\varepsilon}{(x\varepsilon)^2}$$

$$J(x) \leq \varepsilon + \frac{1-\varepsilon}{(x\varepsilon)^2}.$$

Soit  $A > 0$ , tel que  $A^2\varepsilon = (1 - \varepsilon)$ , pour  $x \geq A$ , on voit que  $J(x) \leq 2\varepsilon$ .  
Il en résulte que  $J$  tend vers 0 en  $+\infty$ , et de même en  $-\infty$  ( $J$  est paire).

(QC-1) Etudier la limite de  $I$  en  $+\infty$ .

1-3 On suppose ici  $x \neq 1$ . Les intégrales à calculer sont intégrales de fractions rationnelles, qu'il faut décomposer en éléments simples :

$$\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{x^2+t^2},$$

et en réduisant au même dénominateur le second membre :

$$\frac{at+b}{1+t^2} + \frac{ct+d}{x^2+t^2} = \frac{(at+b)(x^2+t^2) + (ct+d)(1+t^2)}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

d'où, en identifiant :

$$a + c = 0$$

$$b + d = 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$bx^2 + d = 1.$$

On trouve facilement  $a = c = 0$ , et  $b = -d = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

On en déduit  $I(x)$ .

Pour  $J(x)$ , on peut procéder de même, ou utiliser la relation entre  $J$  et  $I$ .

Les fonctions  $I$  et  $J$  sont continues en 1, donc  $K = I(1) = J(1)$  est la limite des expressions précédentes quand  $x$  tend vers 1.

$$2) F_n(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(x+t^2)^n}.$$

2-1 Si  $x > 0$ ,  $x + t^2 > 0$  quel que soit  $t$ , donc la fonction :

$$t \mapsto \frac{1}{(x+t^2)^n}$$

est intégrable sur  $[0, 1]$ , pour tout  $x > 0$ .

La fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(x + t^2)^n}$$

est continue sur  $]0, +\infty[ \times [0, 1]$ .

La fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{-n}{(x + t^2)^{n+1}}$$

est également continue sur  $]0, +\infty[ \times [0, 1]$ .

Il en résulte que  $F_n$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et sa dérivée est :

$$F'_n(x) = \int_0^1 \frac{-n}{(x + t^2)^{n+1}} dt.$$

On vérifie bien la relation :

$$F'_n(x) = -nF_{n+1}(x).$$

En particulier, si  $n = 1$  :

$$F'_1(x) = -F_2(x).$$

On peut calculer  $F_1$  :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^1 \frac{dt}{(x + t^2)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left[ \text{Arc tan} \left( \frac{t}{\sqrt{x}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \text{Arc tan} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

On déduit l'expression de  $F_2$  :

$$\begin{aligned} F'_1(x) &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) + \frac{1}{(\sqrt{x})} \cdot \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \right) \cdot \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{x} \right)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \text{Arctan} \left( \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x}. \end{aligned}$$

d'où :

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \operatorname{Arc} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + x)}.$$

La valeur de K est  $F_2(1)$  :

$$K = \frac{1}{2} \operatorname{Arc} \tan(1) + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

3-1) Comme  $x > 1$ ,  $x + \cos(t) > 0$  quel que soit  $x$ , sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .

La fonction  $t \rightarrow \operatorname{Log}(x + \cos(t))$  est continue sur  $[0, \pi]$ , donc intégrable.

Dans les mêmes conditions,  $t \rightarrow \operatorname{Log}(x + \cos(t)) - \operatorname{Log}(x)$  est continue sur  $[0, \pi]$ , donc J est définie pour tout  $x > 1$ .

La fonction  $(x, t) \rightarrow \operatorname{Log}(x + \cos(t)) - \operatorname{Log}(x)$  est une fonction de deux variables continue sur  $]1, +\infty[ \rightarrow [0, \pi]$ . Il en résulte que J est continue.

La dérivée partielle de  $\operatorname{Log}(x + \cos(t)) - \operatorname{Log}(x)$  par rapport à  $x$  est :

$$\frac{1}{x + \cos(t)} - \frac{1}{x} = \frac{-\cos(t)}{x(x + \cos(t))}.$$

C'est également une fonction continue de  $(x, t)$ .

3-2) On en déduit que J est dérivable, et que :

$$J'(x) = \int_0^\pi \frac{-\cos(t)}{x(x + \cos(t))} dt.$$

3-3) On a l'égalité, pour tout a et tout b :

$$J(b) - J(a) = \int_a^b J'(s) ds.$$

Fixons  $x = a$ , si J a une limite finie L en  $+\infty$ , alors  $\int_x^{+\infty} J'(s) ds$  existe et :

$$L - J(x) = \int_x^{+\infty} J'(s) ds.$$

Pour prouver l'égalité proposée, il suffit de montrer que  $L = 0$ .

On écrit :



$$J(x) = \int_0^{\pi} \text{Log}\left(1 + \frac{\cos(t)}{x}\right) dt$$

$$\text{Log}\left(1 + \frac{\cos(t)}{x}\right) \leq \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$J(x) \leq \int_0^{\pi} \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) dt = \pi \cdot \text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et comme  $J(x)$  est positif, et que  $\text{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers l'infini, on conclut que  $L = 0$ .

4-1) La fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

est continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , donc  $A$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}$ .

La dérivée partielle :

$$(x, t) \mapsto -2xe^{-x^2(1+t^2)}$$

est également continue sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ , donc  $A$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

La fonction  $B$  est le carré d'une primitive, elle est donc dérivable :

$$B(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2} ds.$$

La somme  $A'(x) + B'(x)$  s'écrit :

$$\int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2} ds.$$

Dans  $B'$ , on peut faire le changement de variable  $s = tx$ , on obtient :

$$\int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt + 2x \int_0^1 e^{-x^2-t^2x^2} ds = 0.$$

4-2) La somme  $A(x) + B(x)$  est donc constante. Si on l'évalue pour  $x = 0$ , on trouve :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt + 0 = \frac{\pi}{4}.$$

4-3) On a les majorations :

$$\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2(1+t^2)} \leq e^{-x^2}$$

$$A(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt = e^{-x^2}.$$

Si  $x$  tend vers  $+\infty$ ,  $e^{-x^2}$  tend vers 0, donc  $A(x)$  tend vers 0 ( $A(x)$  est positif).

4-4) Comme la somme  $A(x) + B(x)$  est constante, il en résulte que  $B(x)$  a également une limite :  $\lim(B(x)) = \frac{\pi}{4}$ .

On en déduit immédiatement, puisque  $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$  est positive :

$$\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

---

exercice 9-C

$$1) F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2} dt.$$

La fonction  $(x, t) \mapsto \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2}$  est continue. Elle a une dérivée partielle par rapport à  $x$  continue :

$$-2xt \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2}.$$

On a la majoration, pour tout  $x$  réel, sur  $[0, +\infty[$  :

$$\frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

et l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$$

converge (elle vaut  $\frac{\pi}{2}$ ). L'intégrale définissant F est donc normalement convergente sur R. La fonction F est donc continue sur R.

Pour  $x = 0$ , la dérivée partielle est nulle.

Pour  $x \neq 0$ , la fonction  $-2xt \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2}$  est continue en 0, il n'y a pas de problème d'intégration en cette borne. Examinons la borne  $+\infty$ . On a un équivalent :

$$\left| 2xt \frac{e^{-x^2 t}}{1+t^2} \right| \sim 2|x| \frac{e^{-x^2 t}}{t}.$$

Pour  $x \neq 0$ , on a la majoration, pour t assez grand :

$$2|x| \frac{e^{-x^2 t}}{t} \leq \frac{2|x|}{t^2}$$

donc l'intégrale converge bien pour tout x.

Cette convergence est uniforme sur tout intervalle fermé borné  $[a, b]$  car :

$$2|x| \frac{e^{-x^2 t}}{t} \leq \frac{2|x|}{t^2} \leq 2 \frac{\max(|a|, |b|)}{t^2}.$$

On peut en déduire que F est dérivable sur tout segment fermé borné, donc en tout point de R.

$$2) G(x) = \int_2^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t + \sin(x)} dt.$$

La fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{\cos(t)}{t + \sin(x)}$$

est définie et continue sur  $\mathbb{R} \times [2, +\infty[$ .

On procède à une intégration par partie :

$$\int_2^T \frac{\cos(t)}{t + \sin(x)} dt = \left[ \frac{\sin(t)}{t + \sin(x)} \right]_2^T + \int_2^T \frac{\sin(t)}{(t + \sin(x))^2} dt,$$

et comme  $\left[ \frac{\sin(t)}{t + \sin(x)} \right]_2^T$  a une limite finie quand T tend vers  $+\infty$ , la convergence de l'intégrale définissant G équivaut à celle de l'intégrale :

$$\int_2^T \frac{\sin(t)}{(t + \sin(x))^2} dt.$$

On a la majoration :

$$\left| \frac{\sin(t)}{(t + \sin(x))^2} \right| \leq \frac{1}{(t + \sin(x))^2}$$

et à l'infini on a une équivalence :

$$\frac{1}{(t + \sin(x))^2} \sim \frac{1}{t^2}$$

ce qui montre que l'intégrale converge.

La fonction G est définie pour tout x.

Pour l'étude de la continuité et de la dérivabilité de G, posons :

$$G_1(x) = \int_2^{+\infty} \frac{\sin(t)}{(t + \sin(x))^2} dt.$$

On a l'égalité :

$$G(x) = G_1(x) - \frac{\sin(2)}{2 + \sin(x)}.$$

Il suffit donc d'étudier la continuité et la dérivabilité de  $G_1$ .

Comme  $t \geq 2$ , on voit que  $\frac{t}{2} + \sin(x) \geq 0$ , donc  $t + \sin(x) \geq \frac{t}{2}$ .

On en déduit :

$$\int_2^{+\infty} \left| \frac{\sin(t)}{(t + \sin(x))^2} \right| dt \leq \int_2^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} dt = \int_2^{+\infty} \frac{4}{t^2} dt$$

donc l'intégrale définissant  $G_1$  est uniformément convergente sur  $\mathbb{R}$ , et la fonction  $G_1$  est donc continue.

La dérivée partielle de :

$$(x, t) \mapsto \frac{\cos(t)}{t + \sin(x)}$$

par rapport à  $x$  est :

$$(x, t) \mapsto -\frac{\cos(t) \cos(x)}{(t + \sin(x))^2}.$$

L'intégrale de cette fonction sur  $[2, +\infty[$  converge normalement puisque :

$$\left| \frac{\cos(t) \cos(x)}{(t + \sin(x))^2} \right| \leq \frac{4}{t^2}.$$

Il en résulte que  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$$3) H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right) dt.$$

On voit d'abord qu'il faut supposer  $x \neq 0$ .

Pour que la fonction à intégrer tende vers 0 il est nécessaire que  $x$  soit positif.

Cherchons si l'intégrale converge sur  $]0, +\infty[$ .

On a la majoration, pour  $x \geq a > 0$  :

$$\left| e^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right) \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \left[ -\frac{e^{-at}}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

Donc l'intégrale converge pour tout  $x > 0$ , et normalement sur  $[a, +\infty[$ , pour tout réel  $a > 0$ .

Comme de plus la fonction :

$$(x, t) \mapsto e^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right)$$

est continue sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$ , on peut conclure que  $H$  est continue en tout point de son domaine de définition  $]0, +\infty[$ .

La dérivée partielle par rapport à  $x$  est :

$$(x, t) \mapsto -te^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right) - \frac{t}{x^2} e^{-xt} \cos\left(\frac{t}{x}\right).$$

Elle est continue par rapport à  $(x, t)$ .

On a la majoration, pour  $x \geq a > 0$  :

$$\left| te^{-xt} \sin\left(\frac{t}{x}\right) + \frac{t}{x^2} e^{-xt} \cos\left(\frac{t}{x}\right) \right| \leq te^{-xt} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \leq te^{-at} \left(1 + \frac{1}{a^2}\right).$$

L'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} te^{-at} dt = \left[ -\frac{t}{a} e^{-at} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \frac{1}{a^2}.$$

On obtient donc la convergence normale sur  $[a, +\infty[$  de l'intégrale de la dérivée partielle par rapport à  $x$ .

La fonction  $H$  est donc dérivable en tout point de  $]0, +\infty[$ .

$$4) I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+tx} dt.$$

Pour que  $1 + tx$  soit positif pour tout  $t$  positif, il faut et il suffit que  $x$  soit positif ou nul.

Étudions la convergence de l'intégrale sur  $[0, +\infty[$ .

On a la majoration :

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+tx} dt &\leq \int_1^{+\infty} \sqrt{t+tx} e^{-t^2} dt \\ &\leq \sqrt{1+x} \int_1^{+\infty} t e^{-t^2} dt \\ &\leq \sqrt{1+x} \left[ -\frac{e^{-t^2}}{2} \right]_1^{+\infty}. \end{aligned}$$

donc l'intégrale converge normalement sur  $[0, +\infty[$ .

Comme de plus la fonction :

$$(x, t) \mapsto e^{-t^2} \sqrt{1+tx}$$

est continue, on peut conclure que  $I$  est continue.

La dérivée partielle par rapport à  $x$  est :

$$(x, t) \mapsto e^{-t^2} \frac{t}{2\sqrt{1+tx}}.$$

On a la majoration :

$$e^{-t^2} \frac{t}{2\sqrt{1+tx}} \leq t e^{-t^2}$$

donc l'intégrale de cette dérivée partielle converge normalement sur l'intervalle de définition  $[0, +\infty[$ . La fonction  $I$  est donc dérivable sur cet intervalle.

exercice 10-C

1) On a utilisé déjà dans un précédent exercice l'intégration par parties :

$$\int_1^T \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[ \frac{\cos(t)}{t} \right]_1^T + \int_1^T \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Comme l'intégrale figurant au second membre converge absolument, on voit que la première intégrale converge aussi.

Pour la borne 0, il n'y a pas de problème puisque la fonction  $\frac{\sin(t)}{t}$  peut être prolongée par continuité en 0.

2-1) Comme ci-dessus, on remarque d'abord qu'il n'y a pas de problème de convergence en 0. Pour que la fonction à intégrer tende vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , il est nécessaire que  $x$  soit positif.

On étudie donc la convergence sur  $[0, +\infty[$ .

Pour  $x = 0$ , l'intégrale converge (question 1).

Pour  $x \geq a > 0$ , on écrit, pour  $t \geq 1$  :

$$\left| e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq \frac{e^{-at}}{t}$$

$$\int_1^{+\infty} \left| e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \right| dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$$

et  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$  converge (comparaison usuelle).

L'intégrale étudiée est donc normalement convergente sur tout intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  ( $a > 0$ ). De plus la fonction de deux variables :

$$(x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t}$$

est continue, donc on peut conclure que  $F$  est définie sur  $[0, +\infty[$ , et continue sur  $]0, +\infty[$ .

2-2) La dérivée partielle par rapport à  $x$  est :

$$(x, t) \mapsto -e^{-xt} \sin(t).$$

C'est une fonction continue.

Lorsque  $T$  tend vers  $+\infty$ , l'intégrale tend vers  $\frac{1}{1+x^2}$ . On conclut :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'intégrale converge donc pour tout  $x > 0$ .

Cette convergence est normale sur  $[a, +\infty[$  ( $a > 0$ ) :



$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-at} dt = \left[ \frac{e^{-at}}{-a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

On en conclut que la fonction est dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et que :

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = \frac{-1}{1+x^2}.$$

2-3) Ceci montre qu'il existe une constante K telle que pour  $x > 0$  :

$$F(x) = K - \text{Arctan}(x).$$

On a la majoration :

$$\left| \int_0^T e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \int_0^T e^{-xt} dt = \left[ -\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^T = -\frac{e^{-xT}}{x} + \frac{1}{x}$$

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{x}$$

donc  $F(x)$  tend vers 0 si  $x$  tend vers  $+\infty$ .

On obtient donc  $K = \frac{\pi}{2}$ .

Enfin, pour  $x > 0$  :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \text{Arc tan}(x).$$

3-1) L'intégrale est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  (Rappelons qu'il n'y a pas de problème de convergence en 0), donc I est continue.

La dérivée partielle par rapport à x de :

$$(x, t) \mapsto \frac{\sin^2(xt)}{t^2}$$

est la fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{\sin(2xt)}{t}$$

qui est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  (prolongée en  $(x, 0)$  par  $2x$ ).

Etudions la convergence de :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} dt$$

pour  $x > 0$ .

On peut intégrer par parties :

$$\int_1^T \frac{\sin(2xt)}{t} dt = \left[ \frac{\cos(2xt)}{2x} \right]_1^T + \frac{1}{2x} \int_1^T \frac{\cos(2xt)}{t^2} dt.$$

L'intégrale  $\int_1^T \frac{\cos(2xt)}{t^2} dt$  est bien convergente, d'où :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} dt = -\frac{\cos(2x)}{2x} + \frac{1}{2x} \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{t^2} dt.$$

L'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{t^2} dt$  converge normalement, donc  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} dt$  converge uniformément sur tout intervalle fermé borné.

3-2) L'expression de  $I'(x)$  résulte de la question précédente :

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2xt)}{t} dt.$$

Par le changement de variable  $u = 2tx$ , on obtient une nouvelle expression de  $I'(x)$  :

$$I'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \Sigma.$$

L'expression de  $I(x)$  est donc de la forme :

$$I(x) = \frac{\pi}{2} x + K.$$

Comme  $I(0) = 0$ ,  $K = 0$ , et on déduit, pour  $x = 1$  :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt = \Sigma.$$

4-1) La fonction :

$$(x, t) \mapsto \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$$

$$(x, 0) \mapsto x$$

est continue.

Pour  $t \neq 0$ , la dérivée partielle première par rapport à  $x$  est :

$$\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)}$$

et en  $(x, 0)$ , on obtient :

$$1$$

donc la dérivée partielle première existe et est continue.

La dérivée partielle seconde est :

$$-t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)}$$

elle est bien continue.

L'intégrale définissant  $S$  converge pour tout  $x$  : en effet, il n'y a pas de problème en 0, et à l'infini l'intégrale converge absolument :

$$\left| \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} \right| \leq \frac{1}{t(1+t^2)} \sim \frac{1}{t^3}.$$

L'intégrale de la dérivée partielle :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)} dt$$

est normalement convergente sur  $\mathbb{R}$ . On peut donc déduire que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

L'intégrale de la dérivée partielle seconde est :

$$\int_0^{+\infty} -t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)} dt.$$

Procédons à une intégration par parties, pour  $x > 0$  :

$$\int_0^T t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)} dt = \left[ -\frac{t \cos(xt)}{x(1+t^2)} \right]_0^T + \frac{1}{x} \int_0^T \cos(xt) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

La seconde intégrale est absolument convergente, et même normalement convergente sur  $\mathbb{R}$  puisque :

$$\left| \cos(xt) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right| \leq \left| \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right| \sim \frac{1}{t^2}.$$

L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} -t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)} dt$$

est donc convergente pour tout  $x > 0$ , et :

$$\int_0^{+\infty} t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \cos(xt) \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} dt.$$

De plus pour tout  $b > a > 0$ , elle est uniformément convergente sur l'intervalle  $[a, b]$ .

On peut en déduire que  $S$  est deux fois dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

4-2) On a obtenu à la question précédente les égalités, pour tout  $x \geq 0$  :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} dt$$

$$S'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)} dt$$

et pour  $x > 0$  :

$$S''(x) = \int_0^{+\infty} -t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)} dt.$$

On obtient pour  $x > 0$  :

$$\begin{aligned} S(x) - S''(x) &= \int_0^{+\infty} \left( \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)} + t \frac{\sin(xt)}{(1+t^2)} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sin(xt) \left( \frac{1}{t(1+t^2)} + \frac{t}{(1+t^2)} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du \\ S(x) - S''(x) &= \Sigma. \end{aligned}$$

Rappelons que  $\Sigma$  désigne la valeur de l'intégrale convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du.$$

4-3) Les solutions de cette équation différentielle sont pour  $x > 0$  :

$$f(x) = K + Ce^x + De^{-x}$$

et comme  $S$  est continue en  $0$ , cette égalité est encore vraie en  $0$ .

La dérivée est :

$$S'(x) = Ce^x - De^{-x}.$$

Cherchons les valeurs de  $C$  et  $D$  correspondant à  $S$ .

On sait que  $S'$ , comme  $Ce^x - De^{-x}$ , est continue sur  $\mathbb{R}$ , donc :

$$S'(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2}$$

et on a l'égalité :

$$C - D = \frac{\pi}{2}.$$

De plus  $S'(x)$  tend vers  $0$  en  $+\infty$ , donc  $C = 0$ , d'où :

$$D = -\frac{\pi}{2}.$$

On déduit enfin :

$$S(x) = \Sigma - \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$

4-4) Sachant que  $S(0) = 0$ , on obtient la valeur de  $\Sigma$  :

$$\Sigma = \frac{\pi}{2}.$$

exercice 11-C

$$1) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Pour la borne 0, seul le facteur  $t^{x-1}$  peut poser problème. Pour que l'intégrale converge en cette borne, il faut et il suffit que  $x > 0$ .

Pour la borne  $+\infty$ , comme pour  $t$  assez grand on a  $e^{-t} < t^{-x-1}$ , alors :

$$e^{-t} t^{x-1} < t^{-2}$$

donc l'intégrale converge.

En résumé, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  converge pour  $x > 0$ .

$$\int_0^{+\infty} |\text{Log}(t)|^n e^{-t} t^{x-1} dt.$$

En 0, la fonction à intégrer est équivalente à  $|\text{Log}(t)|^n t^{x-1}$ , avec  $n \geq 1$ . On sait qu'elle converge si et seulement si  $x > 0$  (Intégrales de Bertrand).

Pour la borne  $+\infty$ , l'analyse est la même que précédemment, la convergence de l'intégrale n'introduit pas de condition sur  $x$ .

2) La fonction  $\Gamma$  est donc définie sur  $]0, +\infty[$ .

Les dérivées partielles successives par rapport à  $x$  de :

$$(x, t) \mapsto e^{-t} t^{x-1} = e^{-t+(x-1)\text{Log}(t)}$$

sont bien de la forme :

$$(x, t) \mapsto (\text{Log}(t))^n e^{-t+(x-1)\text{Log}(t)}$$

et on a vu à la première question que l'intégrale de ces fonctions sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  converge absolument pour tout  $x > 0$ .

Pour montrer que l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} (\text{Log}(t))^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

est, pour tout  $n$ , la dérivée de la fonction  $\Gamma$  sur  $]0, +\infty[$ , il suffit de montrer que chacune de ces intégrales converge uniformément sur tout intervalle de la forme  $[a, b]$ , avec  $b > a > 0$ .

Etudions donc cette intégrale pour  $b \geq x \geq a > 0$  :

$$t^{x-1} \leq t^{b-1}$$

$$\int_0^{+\infty} |\text{Log}(t)|^n e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_0^{+\infty} |\text{Log}(t)|^n e^{-t} t^{b-1} dt$$

donc, comme cette dernière intégrale est convergente, on voit que :

$$\int_0^{+\infty} (\text{Log}(t))^n e^{-t} t^{x-1} dt$$

est normalement convergente sur  $[a, b]$ .

3) On écrit :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= \left[ -e^{-t} t^x \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

Si  $n$  est un entier naturel non nul, on obtient :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

et par récurrence :

$$\Gamma(n+1) = n!\Gamma(1).$$

Or on peut calculer  $\Gamma(1)$  :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[ -e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1.$$

On obtient bien  $\Gamma(n+1) = n!$

$$** \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Dans l'intégrale définissant  $\Gamma$ , on fait un changement de variable :

$$u = \sqrt{t},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^{2x-1} du.$$

Pour  $x = \frac{1}{2}$ , on obtient :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

(QC-1) Démontrer l'égalité :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

4) On peut prolonger  $\Gamma$  en 0 (en une fonction continue) si et seulement si  $\Gamma(x)$  a une limite finie quand  $x$  tend vers 0.

Or, on a :

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$$

donc quand  $x$  tend vers 0, positif,  $\Gamma(x)$  tend vers  $+\infty$ . On ne peut pas prolonger  $\Gamma$  en 0.

Si  $x \in ]-1, 0[$ , alors  $x + 1 \in ]0, 1[$ , donc  $\Gamma(x + 1)$  est défini. On peut donc poser, pour prolonger  $\Gamma$  :

$$\text{si } x \in ]-1, 0[, \Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}.$$

5) D'après la formule  $\Gamma(n + 1) = n!$ ,  $\Gamma(x)$  ne peut pas avoir de limite finie en  $+\infty$ . On écrit :



$$\int_0^T e^{-t} t^{x-1} dt \geq e^{-T} \int_0^T t^{x-1} dt = e^{-T} \left[ \frac{t^x}{x} \right]_0^T \\ \geq e^{-T} T^x$$

donc, la fonction intégrée étant positive, pour tout  $T$  positif l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\Gamma(x) \geq e^{-T} \frac{T^x}{x}$$

on déduit que  $\Gamma(x)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

*(QC-2) Dédurre que la dérivée  $\Gamma(x)$  s'annule au moins une fois, puis, en étudiant la dérivée seconde, qu'elle s'annule une seule fois. Dessiner l'allure du graphe de  $\Gamma$ .*

---

### 3-3 Corrigés des questions complémentaires

---

exercice 1-QC

1) Il est clair que non. Soit, par exemple, dans  $\mathbb{R}$ ,  $A = \{0\}$ ,  $B = \mathbb{R} - \{0\}$ . L'intersection est vide. Or la suite  $(2^{-n})$  appartient à  $B$ , et tend vers 0.

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un élément  $b$  de  $B$ , et un élément  $a$  de  $A$  ( $a = 0$  !) tels que  $|b - a| < \varepsilon$ . La borne inférieure de ces normes est donc 0. Autrement dit  $d(A, B) = 0$  et  $A \cap B = \emptyset$ .

exercice 4-QC

Cette dérivée n'a pas de limite en  $(0, 0)$ .

exercice 5-QC

1) Posons :

$$V = \lambda \operatorname{grad}(u).$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(V) &= \operatorname{rot}(\lambda \operatorname{grad}(u)) \\ &= \lambda \operatorname{rot}(\operatorname{grad}(u)) + \operatorname{grad}(u) \wedge \operatorname{grad}(\lambda). \end{aligned}$$

Le produit scalaire avec  $V$  s'écrit donc :

$$\langle \operatorname{rot}(V), V \rangle = \lambda \langle \operatorname{grad}(u) \wedge \operatorname{grad}(\lambda), \operatorname{grad}(u) \rangle = 0.$$

2) On a vu la formule :

$$\operatorname{rot}(\phi(z).V) = \phi(z).\operatorname{rot}(V) + \operatorname{grad}(\phi(z)) \wedge V.$$

La condition  $\operatorname{rot}(\phi(z).V) = 0$  conduit donc à une équation différentielle dont la solution vérifiant  $\phi(1) = 1$  est :

$$\phi(z) = \frac{1}{z^2}.$$

On obtient alors :

$$\phi(z).V = \left( \frac{2xy}{z}, \frac{x^2}{z}, -\frac{x^2y}{z^2} \right).$$

On voit facilement que :

$$\phi(z).V = \text{grad}\left(\frac{x^2 y}{z}\right).$$

---

exercice 8-QC

La fonction I est décroissante sur  $[0, +\infty[$ , minorée par 0, donc elle admet une limite en  $+\infty$ .

Rappelons que :

$$I(x) = \frac{1}{x^2} J\left(\frac{1}{x}\right),$$

et J est continue en 0, donc I(x) tend vers 0 en  $+\infty$ .

---

exercice 11-QC

1) On procède par récurrence. Supposons que :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi}.$$

On a la relation :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2} + 1\right) &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(2n)!}{2^{2n} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+1)(2n)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{2(n+1)2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2} (n+1)!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

La formule est donc bien vérifiée pour  $n + 1$ .

Comme elle est vraie pour  $n = 0$  (avec la convention usuelle  $0! = 1$ ), cette formule est bien démontrée pour tout  $n$  entier.

2) La fonction  $\Gamma$  tend vers  $+\infty$  en 0 et en  $+\infty$ . Il existe donc un point (au moins) où la dérivée est nulle.

Comme la dérivée seconde est positive :

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\text{Log}(t))^2 e^{-t} t^{x-1} dt,$$

la dérivée première est croissante, donc elle ne s'annule qu'une seule fois.

---

## 4 ↗ Pour Chercher

---



---

### 4-1 Indications pour les exercices (☺)

---

exercice 1-I

1) Dessiner  $U$ . Etant donné un point  $(a, b)$  de  $U$ , montrer qu'on peut dessiner un disque ouvert, de centre  $(a, b)$ , entièrement contenu dans  $U$ . On pourra s'aider d'un dessin.

Pour l'adhérence, "voir" quels sont les points n'appartenant pas à  $U$  et "très proches" de  $U$ . Démontrer qu'un disque ouvert centré en un de ces points coupe toujours  $U$  (dessin).

Se souvenir que les points de  $U$  sont adhérents à  $U$ .

Pour finir, vérifier que les points que vous considérez comme "non proches" sont effectivement non adhérents : on peut dessiner un disque ouvert centré en un de ces points qui ne rencontre pas  $U$ .

2) La méthode est la même. Représenter  $V$ .

Traiter soigneusement le cas de l'origine.

3) La formulation de la convergence d'une suite de points du plan est analogue à celle de la convergence d'une suite de réels, la norme de la différence remplaçant la valeur absolue. Interpréter cette hypothèse avec la notion de disque (ou boule) ouvert.

4) Si :

$$\inf\{\|x - y\| \mid x \in A \text{ et } y \in B\} = 0,$$

alors pour tout entier positif  $n$ , il existe un point  $a_n$  de  $A$ , et un point  $b_n$  de  $B$  tels que :

$$\|a_n - b_n\| < \frac{1}{n}.$$

Utiliser alors le théorème de Bolzano Weierstrass (applicable aux coordonnées de  $a_n, b_n$ ).

---

exercice 2-I

1-1) Ecrire formellement que  $f$  a une limite en  $a$ , puis particulariser au cas où une coordonnée reste fixe.

1-2) Contraposée.

1-3) Contraposée.

1-4) Composée de deux fonctions continues.

2-1) Un point exclu :  $(0, 0)$ . Utiliser 1) pour explorer l'existence d'une limite en ce point.

2-2) Etudier le cas de  $(0, 0)$ , puis le cas général.

2-3) Un point exclu :  $(0, 0)$ .

2-4) Penser aux valeurs de  $\cos(y)$  et  $\operatorname{ch}(x)$ . Pour les limites éventuelles, utiliser les applications partielles pour voir si une limite peut exister.

2-5) Il faut  $x \neq -y$ . Séparer le cas de  $(0, 0)$ .

---

exercice 3-I

1) (M) Dans chaque cas, étudier séparément les points du domaine de définition primitif et les points où l'on a pu prolonger la fonction. Les premiers se traitent en général par les résultats de différentiabilité des fonctions usuelles, et les seconds par des calculs de taux d'accroissement. Si les dérivées partielles ne sont pas continues, voir le problème à la question 3).

2) Prolonger si nécessaire les fonctions.

3) Les dérivées partielles peuvent indiquer ce que sera la différentielle si elle existe.

---

exercice 4-I

Prolonger par continuité revient à chercher si la fonction a une limite. On pensera, le cas échéant, à utiliser le changement de variable :

$$x = r \cos(t), y = r \sin(t).$$

Calculer les dérivées partielles en séparant le cas de  $(0, 0)$ .

---

exercice 5-I

Exercice de calcul.

Penser à l'égalité des dérivées partielles secondes.

---

exercice 6-I

Pour les extrema, calculer les dérivées partielles secondes.

Si elles sont toutes nulles, traiter directement. Sinon, écrire la forme quadratique donnée par la formule de Taylor, et étudier son signe.

---

exercice 7-I

1) Calculer soigneusement.

3) Il s'agit d'applications linéaires.

Pour 3-2, il faut dériver une fonction composée.

Pour 3-3, simplifier au mieux l'expression obtenue en remplaçant les dérivées partielles par les expressions calculées à la question précédente.

---

exercice 8-I

1-1) Les fonctions à intégrer sont-elles bien continues pour tout  $x$ , comme fonction de  $t$  ?

1-2) Les fonctions à intégrer (fonctions de 2 variables) sont-elles continues ?

1-3) Décomposer en éléments simples

2-1) Appliquer les théorèmes généraux.

3) Idem.

4-1) Faire un changement de variable dans  $B'$ .

4-2) Calculer  $A(0) + B(0)$ .

4-3) Majorer  $A(x)$  (par exemple par  $e^{-x^2}$ ).

4-4) Utiliser 4-2.

---

exercice 9-I

1) Etablir la convergence normale.

Pour la dérivée, établir la convergence uniforme en se restreignant à un intervalle de la forme  $[a, b]$ .

2) Faire d'abord une intégration par parties, pour remplacer l'intégrale par une autre plus facile à étudier.

Utiliser la convergence normale.

3) Par un argument élémentaire montrer que  $x$  doit être positif pour que l'intégrale converge.

Etudier ensuite la continuité et la dérivabilité sur  $]0, +\infty[$ , en se restreignant à des intervalle de la forme  $[a, +\infty[$  ( $a > 0$ ).

4) Pour que la fonction à intégrer soit définie, il faut et il suffit que  $x \geq 0$ .  
Etudier ensuite la convergence normale sur  $[0, +\infty[$ .

---

exercice 10-I

1) Transformer l'intégrale par intégration par parties.

2) Noter qu'il n'y a pas de problème de convergence en 0.

2-1) Par un argument élémentaire, montrer qu'on doit supposer  $x \geq 0$ .

Etudier la convergence normale sur  $[a, +\infty[$ .

2-2) Idem.

2-3) Pour la limite, majorer  $F(x)$ .

2-4) Utiliser la continuité de  $F$ .

3) Etablir la convergence normale pour la continuité.

Pour la dérivabilité, intégrer par parties.

Pour  $I'(x)$ , faire un changement de variables.

4) Penser qu'il n'y a pas de problème en 0.

4-1) Calculer les dérivées partielles et vérifier qu'elles sont continues.



Pour la dérivée première, la convergence est normale sur  $\mathbb{R}$ .

Pour la dérivée seconde, faire une intégration par parties.

4-2) Combiner les expressions intégrales de  $S$  et de ses dérivées.

4-3) Intégrer l'équation différentielle.

Préciser les constantes à partir de  $S'(x)$ .

---

exercice 11-I

1) Les deux bornes sont à étudier pour la convergence.

Penser aux intégrales de Bertrand, et aux croissances comparées des exponentielles et des puissances.

2) On peut se restreindre à des intervalles  $[a, b]$ ,  $b > a > 0$ .

3) Pour la première, faire une intégration par parties. Ensuite appliquer le résultat à  $x$  entier.

Pour la troisième faire un changement de variable.

4) Utiliser 3.

5) Minorer l'intégrale de 0 à  $T$  par une expression en  $x$ .

---

## 4-2 Méthodes (8)

Mode d'emploi de cette partie : vous trouverez d'abord une liste de méthodes de résolution des types de questions présentées dans ce volume ; par commodité, on a précisé ensuite à propos de chaque exercice où une méthode a été indiquée par (8) le (ou les) numéro de la méthode concernée. S'agissant d'un discours sur les mathématiques, et non d'un discours mathématique, on trouvera naturel qu'il utilise les abus de langage usuels, les raccourcis allusifs, et de façon générale qu'il se rapproche d'un discours oral qu'il pourrait être tenu devant les étudiants.

- 1- **Vérifier qu'un sous-ensemble est ouvert.** Soit  $U$  une partie du plan. Pour vérifier que  $U$  est un ouvert, faire d'abord un dessin. Pour un point quelconque, voir si on peut dessiner un disque centré en ce point et contenu dans  $U$ . S'intéresser aux points qui seraient sur un "bord" (au sens intuitif).
- 2- **Vérifier qu'un sous-ensemble est fermé.** Voir si son complémentaire est ouvert.
- 3- **Chercher les points adhérents.** Soit  $U$  une partie du plan (par exemple). Ne pas oublier que les points de  $U$  sont adhérents. Pour d'autres points : faire un dessin, rechercher les "points frontière", vérifier que tout disque centré en un tel point coupe  $U$ .
- 4- **Montrer qu'un sous-ensemble n'est pas fermé.** Trouver un point adhérent qui n'appartient pas au sous-ensemble. Essayer la limite d'une suite convergente de points du sous-ensemble, qui n'appartient pas au sous-ensemble.
- 5- **Trouver une suite convergente.** Penser au théorème de Bolzano-Weierstrass qui permet d'extraire une suite convergente d'une suite bornée.

- 6- **Obtenir une condition nécessaire pour la limite d'une fonction.** On peut particulariser la manière de se rapprocher du point visé : le long d'un axe, d'une droite particulière...
- 7- **Montrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point.** Chercher à obtenir des conditions nécessaires incompatibles.
- 8- **Chercher la limite d'une fonction.** Dans le cas d'une fonction de deux variables (par exemple) au voisinage de  $(a, b)$ , on peut d'abord chercher des conditions nécessaires sur la valeur de la limite (éventuelle). On peut aussi faire le changement de variable "polaire", en posant  $x = a + r\cos(\theta)$ ,  $y = b + r\sin(\theta)$ . Etudier l'expression obtenue quand  $r$  tend vers 0. Si elle a une limite indépendante de  $\theta$ , cette limite est la limite de  $f$  en  $(a, b)$ .
- 9- **Etudier la différentiabilité.** Cas d'une fonction  $f$  de deux variables (par exemple). Pour la plupart des points, un simple calcul suffit pour établir que les dérivées partielles existent et sont continues :  $f$  y est différentiable. Pour quelques points, une au moins des dérivées partielles n'existe pas :  $f$  n'y est pas différentiable. Pour d'autres, les dérivées partielles existent mais ne sont pas continues (ou on ne peut pas le démontrer). On connaît alors la valeur de la différentielle éventuelle. Revenir à la définition :
- $$\frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - hf'_x(a, b) - kf'_y(a, b)}{\|(h, k)\|}$$
- tend vers 0 quand  $(h, k)$  tend vers  $(0, 0)$ .
- 10- **Calculer avec les opérateurs différentiels.** Se rappeler que pour une fonction de classe  $C^2$ , l'ordre des dérivations est indifférent.
- 11- **Chercher les extrema.** Il s'agit des extrema locaux. D'abord, déterminer les points critiques. Ecrire la partie quadratique de la formule de Taylor. Si elle n'est pas nulle, étudier son signe. Si le signe est fixe on est bien en un extremum.

- 12- **Etudier certaines équations aux dérivées partielles.** Il s'agit des cas élémentaires. Certains changements de variables peuvent simplifier ces équations ( $u = x + y$ ,  $v = x - y$ , ...) et conduire à des intégrations faciles.
- 13- **Etudier les intégrales dépendant d'un paramètre.**(Cas d'un intervalle d'intégration fermé, borné). Il s'agit essentiellement d'étudier la continuité de la fonction de deux variables à intégrer, ou d'une de ses dérivées partielles.
- 14- **Etudier les intégrales dépendant d'un paramètre.**(Cas d'un intervalle d'intégration non borné). Il faut étudier de plus les problèmes de convergence : convergence simple pour le domaine de définition, convergence uniforme pour la continuité, la dérivabilité.

Les méthodes dans les exercices :

ex. 1 : 1, 2, 3, 4, 5	ex. 2 : 6, 7, 8	ex. 3 : 9
ex. 5 : 10	ex. 6 : 11	ex. 7 : 12
ex. 8 : 13	ex. 9 : 14	ex. 10 : 14
ex. 11 : 14	ex. 12 :	

---

### 4-3 Lexique ( )

**Adhérent** : Un point  $a$  est adhérent à une partie  $A$  si pour tout  $r > 0$ , il existe un  $x$  de  $A$  vérifiant  $N(a - x) < r$ .

**Adhérence** : C'est l'ensemble des points adhérents à une partie de  $\mathbb{R}^n$ .

**Application partielle** : Soit  $a = (\alpha, \beta)$  un point et  $f$  une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . On associe à  $a$  deux applications partielles :

$$x \rightarrow f(x, \beta), \text{ et } y \rightarrow f(\alpha, y).$$

**Bornée** : Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  est bornée s'il existe des réels  $a, b, c, d$  tels que :  $A \subset [a, b] \times [c, d]$ .

**Boule ouverte** : Si  $N$  est une norme, la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points  $y$  tels que  $N(y - x) < r$ .

**Critique** : Un point critique est un point où toutes les dérivées partielles sont nulles.

**Dérivée partielle** : C'est la dérivée d'une application partielle.

**Divergence** : Si  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est une fonction vectorielle de classe  $C^2$ , sa **divergence** est :

$$\operatorname{div}(V) = \left( \frac{\partial V_x}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial V_y}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial V_z}{\partial z}(x, y, z) \right),$$

**Euclidienne** : La norme euclidienne est définie par :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

**Euler** : La relation d'Euler est vérifiée par les fonctions homogènes :

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = f(x, y).$$

**Fermé** : Un ensemble est fermé si son complémentaire est ouvert.

**Gradient** : si  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^2$ , on définit le **gradient** de  $u$  par

$$\text{grad}(u) = \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

**Homogène** : Une fonction homogène vérifie pour tout  $x$ , tout  $y$  (cas de deux variables) :  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$ . Si cette relation n'est vraie que pour  $\lambda > 0$ , on dit que  $f$  est positivement homogène.

**Laplacien** : Le laplacien de  $u$  est :

$$\Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

**Norme** : C'est une application  $N$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , positive, telle que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

$$N(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = 0$$

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x) \text{ pour tout réel } \lambda$$

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

**Ouvert** : Un ensemble  $U$  est ouvert si pour tout point  $x$  de  $U$  il existe une boule ouverte de centre  $x$  contenue dans  $U$ .

**Rotationnel** :

$$\text{rot}(V) = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right).$$