TD3 – Différentiabilité des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Montrer d'après la definition que la fonction :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle.

Solution. La fonction f est différentiable au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - h_1\partial_x f(x_0, y_0) - h_2\partial_y f(x_0, y_0)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

Dès que :

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = x_0^2 + h_1^2 + 2x_0h_1 + y_0^2 + h_2^2 + 2y_0h_2,$$
$$\nabla f(x_0, y_0) = (2x_0, 2y_0),$$

la limite se réduit à :

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0.$$

Cela suffit pour prouver que f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = xe^{xy}.$$

Est-elle différentiable au point $(1, 0)$? Si oui, linéariser f au voisinage de $(1, 0)$ et approcher la valeur $f(1.1, -0.1)$.

Solution. La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^2$ car composition de fonctions dérivables. Les dérivées partielles :

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)) = (e^{xy} + xye^{xy}, x^2e^{xy})$$

sont elles-mêmes dérivables dans $\mathbb{R}^2$ car composition de fonctions dérivables. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donc elle est différentiable dans $\mathbb{R}^2$. En particulier elle est différentiable au point $(1, 0)$. Dès que la fonction est différentiable, elle admet une linéarisation au voisinage de $(1, 0)$:

$$f(x, y) = f(1, 0) + (x - 1)\partial_x f(1, 0) + y\partial_y f(1, 0) + o(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}),$$

$$f(x, y) = 1 + (x - 1) + y + o(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}) = x + y + o(\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}).$$

Cette linéarisation est valide localement, au voisinage du point $(1, 0)$, et pas dans tout $\mathbb{R}^2$! Pour approcher la valuer $f(1.1, -0.1)$ on calcule :

$$f(1.1, -0.1) \approx 1.1 - 0.1 \approx 1$$

e on sait que l'erreur d'approximation est un petit o de $\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$. Plus x, y sont proches (en terms de distance !) du point $(1, 0)$ plus l'approximation est précise. Calculer avec une calculatrice la valeur exacte de $f(1.1, -0.1)$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 - y^3.$$

Dire si le graphe de f :

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } z = f(x, y)\}$$

admet un plan tangent au point $(0, 1, -1)$ et, le cas échant, donner l'équation du plan.

Solution. Dire que le graphe $\mathcal{G}_f$ admet un plan tangent au point $(0, 1, -1)$ est équivalent à dire que f est différentiable au point $(0, 1)$. Clairement la fonction f est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et donc différentiable dans $\mathbb{R}^2$. L'èquation du plan tangent est :

$$t(x, y) = f(0, 1) + \partial_x f(0, 1)x + \partial_y f(0, 1)(y - 1) = -1 - 3(y - 1) = 2 - 3y$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2+y^2} & \text{si}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Est-elle continue dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle dérivable dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Solution.

- **Continuité**. La fonction est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour étudier la continuité au point $(0, 0)$ on utilise les cordonnées polaires de centre $(0, 0)$:

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On veut montrer que :

$$\lim_{r \to 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 0$$

et que cette limite ne dépend pas de l'angle θ. En pratique il faut trouver une fonction $g(r)$ de la seule variable r telle que

$$0 \leq |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq |g(r)|$$

et $g(r) \to 0$ si $r \to 0$. Rappel : ne pas mettre la valuer absolue dans la majoration conduit à des résultats faux.

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \cos^2 \theta r^3 \sin^3 \theta}{r^2 (cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r^3 \cos^2 \theta \sin^3 \theta$$

Dès que $|\cos^2 \theta \sin^3 \theta| \leq 1$ on a :

$$0 \leq |f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq |r^3|$$

et $r^3 \to 0$ si $r \to 0$. Donc

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0).$$

Cela prouve que la fonction est continue dans $\mathbb{R}^2$.

- **Dérivabilité**. On se demande si la fonction f est dérivable. Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Si $(x,y)=(0,0)$ on est obligé de passer par la définition de dérivée partielle.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

Cela prouve que f est dérivable au point $(0,0)$ et $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$.

- **Classe C^1**. On se demande si les dérivées partielles de f :

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

sont fonctions continues dans $\mathbb{R}^2$. Elles sont continues dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour étudier la continuité au point $(0,0)$ on calcule les limites :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y)$$

à l'aide des cordonnées polaires de centre $(0,0)$.

$$\partial_x f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{2r\cos\theta r^5\sin^5\theta}{r^4(cos^2\theta+\sin^2\theta)^2} = 2r^2\cos\theta\sin^5\theta.$$

Dès que $|\cos\theta\sin^5\theta| \leq 1$ on a :

$$0 \leq |\partial_x f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq 2|r^2|$$

et $2r^2 \to 0$ si $r \to 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(0,0).$$

Même chose pour $\partial_y f$:

$$\partial_y f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta(3r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)}{r^4(cos^2\theta+\sin^2\theta)^2} = \cos^2\theta\sin^2\theta(3r^2\cos^2\theta + r^2\sin\theta)$$

Dès que $|\cos^2\theta\sin^2\theta| \leq 1$ et que $|a+b| \leq |a|+|b|$ pour tout $a,b\in\mathbb{R}$ on a :

$$0 \leq |\partial_y f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq 3|r^2\cos^2\theta| + |r^2\sin^2\theta| \leq 4|r^2|$$

et $4r^2 \to 0$ si $r \to 0$. Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0 = \partial_y f(0,0).$$

Cela prouve que $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

- **Différentiabilité**. La fonction est de classe C^1 donc elle est différentiable dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

— Est-elle continue dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle dérivable dans $\mathbb{R}^2$?
— Est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

Solution.

- **Continuité**. La fonction est continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour étudier la continuité au point $(0,0)$ on considère la restriction de f à la droite $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{1}{2x}$$

qui ne tend pas vers $0 = f(0,0)$ lorsque $x \to 0$. Donc la fonction n'est pas continue au point $(0,0)$.

- **Dérivabilité**. On se demande si la fonction admet toutes les dérivées partielles. Si $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Donc f est dérivable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Si $(x,y) = (0,0)$ on est obligé de passer par la définition de dérivée partielle.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \infty$$

La dérivée partielle par rapport à x existe dans $\mathbb{R}^2$ et la dérivée partielle par rapport à y existe dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Donc f est dérivable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

- **Différentiabilité**. La fonction est de classe C^1 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car les dérivées partielles sont quotient de fonctions continues. Donc elle est différentiable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle ne peut pas être différentiable au point $(0,0)$ car pas continue.

Exercice 6. Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) et à la profondeur x (mesuré en pieds) peut être modélisé par

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

ou $\omega = \frac{2\pi}{365}$ et $\lambda > 0$ et $T_1 \neq 0$.

a) Calculer $\partial_x T$ et $\partial_t T$.

b) Montrer que T vérifie l'équation de la chaleur $\partial_t T = k\partial_{xx} T$ pour un certain $k \in \mathbb{R}$.

Solution. Dès que $\lambda, \omega, T_1, T_0$ sont constantes on a :

a)

$$\partial_x T = -\lambda T_1 e^{-\lambda x}\Big(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x)\Big)$$
$$\partial_t T = \omega T_1 e^{-\lambda x} \cos(\omega t - \lambda x)$$

b)

$$\partial_{xx}T = \frac{\partial^2 T}{\partial^2 x} = 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$$
$$\frac{\partial_{xx}T}{\partial_t T} = \frac{2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)}{\omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)} = \frac{2\lambda^2}{\omega}$$

Donc la fonction T vérifie l'equation de la chaleur avec $k = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = x^3 y + x^2 - y^2 - x^4 + z^5.$$

Après vérification de la validité du théorème de Schwarz, calculer la matrice hessienne de f.

Solution. La fonction admet 3 dérivées d'ordre 1 par rapport à ses 3 variables :

$$\nabla f(x, y, z) = (\partial_x f(x, y, z), \partial_y f(x, y, z), \partial_z f(x, y, z)) = (3x^2 y + 2x - 4x^3, x^3 - 2y, 5z^4)$$

La fonction admet $9 = 3^2$ dérivées d'ordre 2 :

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6xy + 2 - 12x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = -2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 z} = 20z^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 3x^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$

Toutes les dérivées croisées sont égales. En fait le théorème de Schwarz dit que si f est de classe C^2 dans $\mathbb{R}^3$ alors la dérivation à l'ordre 2 ne depend pas de l'ordre dans lequel elle se fait. Sous les hypothèses du théorème de Schwartz la matrice hessienne est symétrique car $H_{i,j} f = \partial_{x_i, x_j} f = \partial_{x_j, x_i} f = H_{j,i} f$.

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \tag{0}$$

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6xy + 2 - 12x^2 & 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 20z^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

Ecrire le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage du point $(0,0)$.

Solution. La fonction f est de classe C^2 au voisinage de $(0,0)$ et son développement de Taylor d'ordre 2 est donné par :

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot (x,y) + \frac{1}{2}(x,y)^T H_f(0,0)(x,y) + o(x^2+y^2)$$

Dès que :

$$\nabla f(x,y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$$

et $\nabla f(0,0) = (0,0)$, la partie d'ordre 1 du développement est nulle.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

La partie d'ordre 2 est donnée par :

$$(x,y)^T H_f(0,0)(x,y) = (x,y)^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (x,y) = (x,y)^T (yx) = 2xy$$

Donc :

$$f(x,y) = xy + o(x^2+y^2).$$