1. Chapitre 1. Résolution numérique d'une équation non linéaire

1.1. Introduction à l'analyse numérique

Les cours classiques de mathématiques (algèbre, analyse...etc.) nous familiarisent avec des théories et des techniques, qui permettent de résoudre de manière analytique un certain nombre de problèmes. Pour l'intégration d'une fonction par exemple, nous faisons recours aux techniques d'intégration (par partie ou par changement de variables) de fonctions, qui conduisent aux mêmes résultats précis et uniques.

Contrairement à ces méthodes, les méthodes numériques, face à un problème mathématique donné, elles offrent un ensemble d'algorithmes de résolution du problème. Ces algorithmes dépendent de certains paramètres, qui influent sur **la précision des résultats**. Par exemple, on peut remplacer une fonction au voisinage d'un point par son développement limite au voisinage de ce point. Le résultat final de cette approximation et son degré de précision dépend du choix que l'ont fait.

Une partie importante de l'analyse numérique consiste à contenir les effets des erreurs introduites et qui proviennent principalement de trois sources :

- **Erreurs de modélisation** : habituellement la modélisation des phénomènes (physiques, mécaniques, économiques,...etc.) parait plus compliquée alors on fait recours aux hypothèses et aux simplifications ;
- **Erreurs de présentation sur ordinateur** : au niveau de l'ordinateur les erreurs naissent lors de la représentation des nombres en langage machine.
- **Erreurs de troncature** : le développement de Taylor par exemple est un outil très important pour développer des méthodes numériques mais la troncature (négligence des termes à droite de la série) constitue une source d'erreur.

1.2. Notions d'erreur absolue et d'erreur relative

Dans cette section nous donnerons les définitions des erreurs : **absolue** et **relative**, et un ensemble de remarques relatives à ces notions.

Définition 1.1

Soit x, un nombre, et x^*, une approximation de ce nombre. L'erreur absolue Δ_x de l'approximation de x par x^*, est définie par:

$$\Delta_x = |x - x^*|$$

Remarques

- L'erreur absolue donne une approximation quantitative de l'erreur commise.
- Pratiquement on ne connaît pas x mais x^*donc il est impossible de calculer Δ_x mais on dispose d'une borne supérieure telle que : $|x - x^*| < \Delta_x$, alors $x^* - \Delta_x < x < x^* + \Delta_x$.

Exemple

Soit π et $\frac{22}{7}$ une approximation de π. L'erreur absolue de cette approximation est :

$$\Delta_x = \left|\pi - \frac{22}{7}\right| = 0{,}00126448926734961868021375957764$$

> ***Définition 1.2***
>
> Soit x, un nombre, et x^*, une approximation de ce nombre. L'erreur relative $E_r(x)$ de l'approximation de x par x^*, est définie par:
>
> $$E_r(x) = \frac{|x - x^*|}{|x|}$$

Remarque

L'erreur relative donne le degré d'**importance** de l'erreur commise.

Exemples

- Soit π et $\frac{22}{7}$ une approximation de π. L'erreur relative de cette approximation est :

$$E_r(x) = \frac{\left|\pi - \frac{22}{7}\right|}{|\pi|} = 4{,}02499434770681975840798341518885 \times 10^{-4}$$

- Si on fait usage d'un chronomètre dont la précision est de l'ordre du dixième de seconde, l'erreur absolue est bornée par 0,1 secondes. Mais est-ce une erreur **importante** ?
  - Dans le contexte d'un marathon d'une durée de 2h et 20 min, l'erreur relative liée au chronométrage est très faible: $\frac{0{,}1}{2\times(60\times60)+20\times(60)} = 0{,}0000119$ et ne devrait pas avoir des conséquence sur le classement des coureurs.
  - Par contre, s'il s'agit d'une course d'une durée de 10 secondes, l'erreur relative est beaucoup plus importante : $\frac{0{,}1}{10} = 0.001$. Avec une telle erreur, on ne pourra pas peut être faire la différence entre la premier et le dernier coureur.

1.3. Existence et unicité de la solution d'une équation non linéaire

Nous avons appris au lycée comment déterminer les racines de polynôme d'ordre 2. Certains ont également vu comment calculer les racines d'un polynôme d'ordre 3 et 4. Pour les polynômes d'ordre supérieur ou égal à 5, le mathématicien Galois a démontré que les formes explicites des racines de ces polynômes n'existent pas.

Le problème de recherche de racines d'un polynôme d'ordre supérieur ou égal à 5 est l'une des classes de problème de résolution d'équations non linéaire auxquels nous n'avons pas de formes générales des solutions.

Comme exemples de ces problèmes on peut citer :

- $x - e^{-x} = 0;$
- $\sin(x) - x = 0;$
- $x - x^{0.8} + 3 = 0;$

Formellement le problème de résolution d'équation non linéaire s'écrit :

$$F(x) = 0, \qquad x \in [a, b] \subset \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

avec F une fonction non linéaire définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

La résolution du problème (1.1) consiste en la recherche de $\alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$.

Le problème (1.1) admet-il une solution (existence de α) ? la solution est-elle unique (unicité de) ?

Théorème 1.1. ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soit F une fonction **continue** sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Si $\boldsymbol{F(a) \times F(b) \leq 0}$, alors

$$\exists\ \alpha \in [a, b] \text{ tel que } F(\alpha) = 0.$$

Le théorème 1.1 donnent des conditions nécessaires pour l'existence de solutions au problème (1.1), pour l'unicité de la solution (c.-à-d. $\exists!\ \alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$), il faut vérifier si **$\boldsymbol{F}$ est monotone sur $\boldsymbol{[a, b]}$**. Autrement dit :

$$\begin{cases} F \text{ une fonction continue sur } [a, b] \subset \mathbb{R} \\ F(a) \times F(b) \leq 0 \\ F \text{ est monotone sur } [a, b] \end{cases} \Longrightarrow \exists!\ \boldsymbol{\alpha \in [a, b]} \textbf{ tel que } \boldsymbol{F(\alpha) = 0}.$$

Pour le problème de résolution d'équations non linéaire on peut étudier les questions d'existence et d'unicité de solutions, mais nous n'avons pas d'outils mathématiques, qui permettent de déterminer les solutions de façon exacte.

Face à ces problèmes, on fait souvent recours aux méthodes numériques (bissection, point fixe, Newton-Raphson), qui consistent en la recherche des approximations de la solution de problème c.-à-d. recherche de $\alpha^* \in [a, b]$ tel que $\alpha^* \simeq \alpha$ et $F(\alpha^*) \simeq 0$.

Exemple

$$F(x) = x^3 - x - 3 = 0, \qquad x \in [1,3] \tag{1.2}$$

Pour montrer que qu'il existe un unique $\alpha \in [1,3]$ tel que $F(\alpha) = 0$ nous appliquons le théorème des valeurs intermédiaires, on a :

i) La fonction F est **continue** sur $[1,3]$.

ii) $F(1) = -3$ et $F(3) = 21$ donc $\boldsymbol{F(1) \times F(3) < 0}$.

De i) et ii) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\exists\ \alpha \in [1,3]$, tel que $F(\alpha) = 0$ $(*)$

La fonction $F(x)$ est un polynôme d'ordre 3, définie continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$F'(x) = 3\,x^2 - 1,\ x \in]-\infty, +\infty[.$$

On peut vérifier facilement que :

- $F'(x) = 0 \Longrightarrow 3\,x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}} \vee x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
- $F'(x) \le 0,$ si $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et ;
- $F'(x) \ge 0,$ si $x \in]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

Donc $F'(x) \ge 0, \forall x \in [1,3]$ $(**)$

De $(*)$ et $(**)$: $\exists!\ \alpha \in [1,3]$ tel que $F(\alpha) = 0$

1.4. Méthode de dichotomie (bissection)

La méthode de dichotomie, ou méthode de la bissection (bisection method en anglais), repose sur le théorème des valeurs intermédiaires (Théorème 1.1).

Considérons le problème (1.1), et supposons que F est continue et monotone sur $[a, b]$, et $F(a) \times F(b) \le 0$, alors $\exists\ !\ \alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$.

La méthode de bissection consiste à déterminer une suite d'intervalles : $I_n = [a_n, b_n]$, $n = 1,2, \dots$ contenant α (solution du problème (1.1)) telle que la longueur de I_n soit la moitié de la longueur de I_{n-1}.

On procède de cette façons, on divise l'intervalle $[a, b]$ en deux intervalle $[a, x_1]$ et $[x_1, b]$ égaux en longueur car nous posons $x_1 = \frac{a+b}{2}$.

La racine α appartient à l'un des deux intervalles, pour savoir lequel, il suffit d'utiliser les conditions suivantes :

- Si $F(a)\,F(x_1) \le 0$, alors $\alpha \in [a, x_1]$;
- Si $F(x_1)\,F(b) \le 0$, alors $\alpha \in [x_1, b]$;

Notons par $I_2 = [a_2, b_2]$ le nouvel intervalle contenant la racine α.

Nous répétons le même processus, jusqu'à à ce que le **critère d'arrêt** soit vérifier.

1.4.1. Erreur absolue et convergence dans la méthode de bissection

En faisant n itérations par la méthode de dichotomie on obtient une suite d'approximations de α : $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, $n = 1,2,3 \ldots$, qui vérifient cette inégalité :

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

Pour une tolérance ε donnée, arrêter à la nième itération lorsque $|x_n - \alpha| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon$.

Le nombre d'itérations n est calculé comme suit :

On a : $a_n - b_n = \frac{b-a}{2^n}$, alors il suffit de prendre n tel que $\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(b-a)-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$.

1.4.2. Algorithme de la méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie ne permet pas, en général, d'obtenir la solution exacte du problème (1.1) en un nombre fini d'itérations. Donnons à titre indicatif, quelques-uns des critères d'arrêts les plus utiliser comme condition d'arrêt :

- **Critère 1.** $\left|\frac{b-a}{2^n}\right| < \varepsilon$ (ε donné)
- **Critère 2.** $|F(x_n)| < t$ (t donné)
- **Critère 3.** $|x_{n+1} - x_n| < \eta$ (η donné)

Considérons le *critère d'arrêt 1*. L'algorithme de la méthode de dichotomie :

Données : ε et F

Initialisation : $a_1 = a$;$b_1 = b$; $I_1 = [a_1, b_1]$; $n = 1$;

Tant que $\left|\frac{b_n-a_n}{2}\right| > \varepsilon$, **alors**

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

Si $F(a_n) \times F(x_n) \leq 0$, alors

$a_{n+1} = a_n$

$b_{n+1} = x_n$

Sinon

$a_{n+1} = x_n$

$b_{n+1} = b_n$

Fin si

$n = n + 1$;

Fin tant que

1.4.3. Exemple

Reprenons l'exemple précèdent :

$$F(x) = x^3 - x - 3 = 0, \qquad x \in [1,3] \tag{1.2}$$

Quel est le nombre d'itération nécessaire à la méthode de dichotomie déterminer la solution de (1.2) *avec une précision de* 10^{-3} *?*

A l'étape n de l'algorithme de dichotomie l'erreur $\Delta_n = |\alpha - x_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$.

$$\frac{b-a}{2^n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \frac{3-1}{2^n} \leq 10^{-3} \Rightarrow 2^n \geq \frac{2}{10^{-3}} \Rightarrow n\ln(2) \geq \ln(2000) \Rightarrow n \geq \frac{\ln(2000)}{\ln(2)} = 10.9658.$$

Donc il faut réaliser ***11*** *itérations pour atteindre la précision de* 10^{-3}.

Calculer une valeur de approché de $\boldsymbol{\alpha}$ *avec une précision de* $\mathbf{10^{-3}}$.

Itération	Borne inférieur de l'intervalle contenant la solution	Borne supérieure de l'intervalle contenant la solution.	Valeur approchée de la solution.				Erreur	Condition d'arrêt
$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{a_n}$	$\boldsymbol{b_n}$	$\boldsymbol{x_n = \frac{a_n+b_n}{2}}$	$\boldsymbol{F(a_n)}$	$\boldsymbol{F(b_n)}$	$\boldsymbol{F(x_n)}$	$\Delta_n = \frac{b_n - a_n}{2}$	$\boldsymbol{\Delta_n \leq 10^{-3}}$
1	1	3	**2**	**-3**	**21**	**3**	**1**	Non
2	1	2	1.5	-3	3	-1.125	0.5	Non
3	1.5	2	1.75	-1.125	3	0.6093	0.25	Non
4	1.5	1.75	1.625	-1.125	0.6093	-0.3339	0.125	Non
5	1.625	1.75	1.6875	-0.3339	0.6093	0.1179	0.0625	Non
6	1.625	1.6875	1.65625	-0.3339	0.1179	-0.1128	0.03125	Non
7	1.65625	1.6875	1.67188	-0.1128	0.1179	0.0012	0.015625	Non
8	1.65625	1.67188	1.66407	-0.1128	0.0012	-0.0560	0.0078123	Non
9	1.66407	1.67188	1.66798	-0.0560	0.0012	-0.0274	0.00390625	Non
10	1.66798	1.67188	1.66993	-0.0274	0.0012	-0.0130	0.001953125	Non
11	1.66993	1.67188	**1.6709**	-0.0130	0.0012	-0.0058	0.0009765625	**Oui**

1.5. Méthode de point fixe

La méthode de bissection est fiable pour la détermination de solutions approchées du problème (1.1), mais elle est lente dans le sens où il nécessaire d'effectuer plusieurs itérations pour atteindre une précisions donnée, comparée à la méthode de point fixe et la méthode de Newton.

Avant d'exposer le principe de la méthode de point fixe, nous rappelons la définition du point fixe d'une fonction réelle.

Définition 1.3 ***Point fixe d'une fonction***

Un point fixe d'une fonction $g(x)$ est une valeur de x qui reste invariante pour cette fonction, c'est-à-dire tout solution de $g(x) = x$ est un point fixe de la fonction g.

La méthode de point fixe permet de passer de la recherche de la solution du problème (1.1) à la recherche du point fixe de la fonction $g(x), x \in [a, b]$. En effet, les deux problèmes sont équivalents :

$$F(x) = 0, x \in [a, b] \Leftrightarrow g(x) = x, x \in [a, b]$$

Ainsi on procède de la manière suivante :

- **Séparation des racines réelles.** Consiste à partager le domaine $[a, b]$ en sous intervalles, contenants une solution unique de l'équation $F(x) = 0$. Nous supposons qu'il $\exists!\ \alpha \in [a, b]$ tel que $F(\alpha) = 0$.
- **Écrire $F(x) = 0$ sous forme $g(x) = x$**, ou g est définie et continue sur $[a, b]$.
- **Sélectionner par un moyen quelconque une solution de départ $x_0 \in [a, b]$.**

$x_1 = g(x_0)$ (Approximation de α à l'itération 1)

$x_2 = g(x_1)$ (Approximation de α à l'itération 2)

$\vdots$

$x_n = g(x_{n-1})$ (Approximation de α à l'itération n)

1.5.1. Conditions de convergence de la méthode de point fixe

On peut choisir g de plusieurs manières, mais le choix de g doit se faire de façon à assurer la convergence de la suite $x_n = \big(g(x_{n-1})\big)_{n=1,2,\dots,}$ vers α c.-à-d $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Le théorème suivant donne les conditions de convergence de la suite x_n.

Théorème 1.2. ***Convergence de la méthode de point fixe***

Soit g une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, soit $x_0 \in [a, b]$ et soit la suite $x_n = g(x_{n-1})$, $n = 1,2, \dots$

Si les conditions suivantes sont satisfaites :

Condition 1. **g est stable sur $[a, b]$** : $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$

Condition 2. **g est contractante sur $[a, b]$** : $\exists k \in [0,1[$ tel que $|g'(x)| < k, \forall x \in [a, b]$

On peut prendre $k = \max\limits_{x\in[a,b]} |g'(x)|$

alors g a un seul point critique α dans $[a, b]$ et la suite $x_n = g(x_{n-1}), n = 1,2,\dots$ converge vers α solution de (1.1) quel que soit $x_0 \in [a, b]$.

1.5.2. Erreur absolue de la méthode de point fixe

La formule suivante donne une majoration de l'erreur de la méthode de point fixe à l'étape $n \geq 1$:

$$\Delta_n = |\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|,$$

avec $k = \max_{x \in [a,b]} |g'(x)|$.

Pour une tolérance ε donnée, arrêter à la nième itération lorsque :

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{k^n}{1-k} \leq \frac{\varepsilon}{|x_1 - x_0|}$$

$$\Longrightarrow k^n \leq \frac{\varepsilon\,(1-k)}{|x_1 - x_0|}$$

$$\Longrightarrow n\ln(k) \leq \ln\left(\frac{\varepsilon\,(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)$$

$$\Longrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{\varepsilon\,(1-k)}{|x_1 - x_0|}\right)}{\ln(k)}$$

Ce passage est justifié par :

$\ln(k) \leq 0, \forall\, k \in [0,1]$

1.5.3. Exemple

Notre objectif est de résoudre l'équation $\boldsymbol{F(x) = e^x - x - 2 = 0, x \in [1,3]}$ par la méthode de point fixe.

Montrons que : $\boldsymbol{F(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^x - 2 = g_1(x)}$

$$\boldsymbol{F(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(x+2) = g_2(x)}$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = e^x - 2 = g_1(x)$$

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow e^x = x + 2$$
$$\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(x+2)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(x+2) = g_2(x)\,.$$

Ce passage est justifié par :

$x + 2 > 0, \forall\, x \in [1,3]$

et

$e^x > 0, \forall\, x \in [1,3]$

Vérifier si les conditions de stabilité et de contraction sont satisfaites pour $\boldsymbol{g_1(x)}$.

Stabilité de $\boldsymbol{g_1}$ ***sur*** $[1,3]$

- $g_1(x)$ est définie, continue et dérivable sur $[1,3]$.
- $g_1'(x) = e^x > 0, \forall\, x \in [1,3]$, par conséquent g_1 est croissante sur $[1,3]$.
- La fonction g_1 atteint son maximum au point $x = 3$, qui est $g_1(3) = 18.0855 \notin [1,3]$.
- La fonction g_1 atteint son minimum au point $x = 1$, qui est $g_2(1) = 0.71828 \notin [1,3]$.

Alors $\boldsymbol{g_1([1,3]) \not\subset [1,3]}$, donc g_1 *n'est pas stable sur* $[1,3]$.

Contraction de g_2 sur $[1,3]$

- $g_1(x)$ est définie, continue et dérivable sur $[1,3]$.
- $g_1'(x) = e^x > 0$, est définie, continue et dérivable sur $[1,3]$, alors $|g_1'(x)| = g_1'(x)$, $\forall\, x \in [1,3]$.
- $g_1''(x) = e^x > 0$, $\forall\, x \in [1,3]$, par conséquent $|g_1'(x)|$ est croissante sur $[1,3]$, elle atteint son maximum au point $x = 3$ c.-à-d. $\max\limits_{x\in[1,3]} |g_1'(x)| = |g_1'(3)| = g_1'(3) = 20.0855 \notin [0,1[$.

  Alors pour tous $x \in [1,3]$, $|g_1'(x)| \leq 20.0855 \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, donc g_1 *n'est pas contractante.*

Vérifier si les conditions de stabilité et de contraction sont satisfaites pour $g_2(x)$.

Stabilité de g_2 sur $[1,3]$

- $g_2(x)$ est définie, continue et dérivable sur $[1,3]$.
- $g_2'(x) = \frac{1}{x+2} > 0, \forall\, x \in [1,3]$, par conséquent g_2 est croissante sur $[1,3]$.
- La fonction g_2 atteint son maximum au point $x = 3$, qui est $g_2(3) = \ln(5) = 1.6094$.
- La fonction g atteint son minimum au point $x = 1$, qui est $g_2(1) = \ln(3) = 1.0986$.

  Alors pour tous $x \in [1,3], g_2(x) \in [\mathbf{1.0986}, \mathbf{1.6094}] \subset [\mathbf{1}, \mathbf{3}]$, donc g_2 *est stable sur* $[1,3]$.

Contraction de g_2 sur $[1,3]$

- $g_2(x)$ est définie, continue et dérivable sur $[1,3]$.
- $g_2'(x) = \frac{1}{x+2} > 0$, est définie, continue et dérivable sur $[1,3]$, alors $|g_2'(x)| = g_2'(x), \forall\, x \in [1,3]$.
- $g_2''(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0, \forall\, x \in [1,3]$, par conséquent $|g_2'(x)|$ est décroissante sur $[1,3]$, elle atteint son maximum au point $x = 1$ c.-à-d. $\max\limits_{x\in[1,3]} |g_2'(x)| = |g_2'(1)| = g_2'(1) = \frac{1}{3}$.

  Alors pour tous $x \in [1,3]$, $|g_2'(x)| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}[$, donc g_2 *est contractante.*

Pour $x_0 = 1.5$ déterminons le nombre d'itération maximales nécessaires pour déterminer la solution de $F(x) = 0$ par la méthode du point fixe avec une précision de 10^{-5}.

La majoration de l'erreur E_n à l'étape n est donnée par :

$$\Delta_n \leq |x_1 - x_0| \frac{M^n}{(1-M)}, \qquad M = \max_{x\in[1,3]} |g_2'(x)| = \frac{1}{3}.$$

$$\Delta_n = |x_1 - x_0| \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}$$

On a : $x_0 = 1.5$, alors $x_1 = g_2(1.5) = \ln(3{,}5)$ donc

$$E_n = |\ln(3{,}5) - 1.5| \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)}$$

$$E_n \le \epsilon \Leftrightarrow |\ln(3{,}5) - 1.5| \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)} \le 10^{-5}$$

$$\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right) 10^{-5}}{|\ln(3{,}5) - 1.5|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln\left(\frac{\left(1 - \frac{1}{3}\right) 10^{-5}}{|\ln(3{,}5) - 1.5|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln\left(\frac{\frac{2}{3}\, 10^{-5}}{|\ln(3{,}5) - 1.5|}\right)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} = 9.5766$$

Donc il faut réaliser 10 itérations pour atteindre la précision de 10^{-5}.

Pour $x_0 = 1.5$ calculons les cinq premiers itérés (solution approchée de $F(x) = 0$ par la méthode de point fixe.

$x_0 = 1.5;$

$x_1 = g_2(x_0) = \ln(x_0 + 2) = 1.2528\,;$

$x_2 = g_2(x_1) = \ln(x_1 + 2) = 1.1795;$

$x_3 = g_2(x_2) = \ln(x_2 + 2) = 1.1567;$

$x_4 = g_2(x_3) = \ln(x_3 + 2) = 1.1495;$

$x_5 = g_2(x_4) = \ln(x_4 + 2) = 1.1473.$

1.6. Méthode de Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson est l'une des méthodes itératives les plus utilisées pour la résolution des problèmes de type (1.1). Cette méthode exige une valeur initiale x_0. La disposition d'une telle valeur permet de remplacer l'arc de la courbe représentative de F par sa tangente au point x_0.

L'équation de la tangente de la fonction F au point $x_0$est donnée par :

$$y_1(x) = F'(x_0)(x - x_0) + F(x_0)$$

L'abscisse de point x_1 est l'intersection de la tangente de la fonction F au point x_0 avec l'axe des abscisses $(y_2(x) = 0)$.

$$y_1(x_1) = y_2(x_1) \Longrightarrow F'(x_0)(x_1 - x_0) + F(x_0) = 0$$
$$\Longrightarrow F'(x_0)(x_1 - x_0) = -F(x_0)$$
$$\Longrightarrow (x_1 - x_0) = -\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$
$$\Longrightarrow x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

La suite de Newton-Raphson s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \text{ donnée} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, n = 1,2, \ldots \end{cases}$$

1.6.1. Conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson

Nous allons donner sous forme d'un théorème les critères de convergences de la méthode de Newton Raphson :

Théorème 1.3. ***Convergence de la méthode de Newton***

Soit F une fonction de classe C^2 sur $[a, b]$, soit $x_0 \in [a, b]$ et soit la suite $x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, n = 1,2, \ldots,$ Si trois conditions suivantes sont satisfaites :

- *Condition 1.* **F' et F'' gardent des signes constants sur** $[a, b]$
- *Condition 2.* **$F(a)F(b) < 0$**
- *Condition 3.* **$F(x_0)\, F''(x_0) \geq$**

alors la suite $x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}$, $n = 1,2, \ldots$ converge vers α.

1.6.2. Exemple

Exercice 3.

Soit l'équation non linéaire suivante $F(x) = x - 1 + \sin(2x) = 0$.

1. ***Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $F(\alpha) = 0$.***

Pour montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $F(\alpha) = 0$ nous appliquons le théorème des valeurs intermédiaires : on a

L'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ est donné en Radian.

a. La fonction F est **continue** sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

b. La fonction F est **croissante** sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, car :

$F'(x) = 1 + 2\cos(2\, x)$ et on a :

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1$$

$$\Rightarrow \cos(1) \leq \cos(2x) \leq \cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\cos(1) \leq 2\cos(2x) \leq 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + 2\cos(1) \leq 1 + \cos(2x) \leq 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 0.1677 \leq F'(x) \leq 2.0806$$

$$\Rightarrow F'(x) > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

Nous utilisons deux résultats importants dans cette démonstration :

- $\cos(x) > 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- La fonction $\cos(x)$ est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

c. $F\left(\frac{1}{4}\right) = -0.2706$ et $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.3415$ donc $\boldsymbol{F\left(\frac{1}{4}\right) \times F\left(\frac{1}{2}\right) < 0}$.

De a, b et c et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique $\alpha \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ *tel que* $F(\alpha) = 0$

2. *Pour $x_0 = \frac{1}{4}$, écrire la suite de Newton-Raphson.*

La suite de Newton pour $x_0 = \frac{1}{4}$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}, \qquad n = 1,2,3, \dots \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{4} \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{x_{n-1} - 1 + \sin(2\,x_{n-1})}{1 + 2\cos(x_{n-1})}, \qquad n = 1,2,3, \dots \end{cases}$$

3. *Vérifier la satisfaction des conditions d'application de la méthode de Newton-Raphson (avec $x_0 = \frac{1}{4}$).*

C1.

$F\left(\frac{1}{4}\right) = -0.2706$ et $F\left(\frac{1}{2}\right) = 0.3415$ donc $\boldsymbol{F\left(\frac{1}{4}\right) \times F\left(\frac{1}{2}\right) < 0}$.

C2.

- $\boldsymbol{F'(x) = 1 + 2\cos(2\,x) > 0}$, $\forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ (Voir la démonstration question 1).
- $F''(x) = -4\,sin(2x), \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, *on a :*

$$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2x \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{1}{2}\right) \leq \sin(2x) \leq \sin(1)$$

$$\Rightarrow -4\sin(1) \leq -4\sin(2x) \leq -4\,\sin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -3.3659 \leq F'(x) \leq -1.9177$$

$$\Longrightarrow F''(x) < 0,\ \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$$

Donc F' et F'' gardent des signes constants sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Nous utilisons deux résultats importants dans cette démonstration :

- $\sin(x) > 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- La fonction $\sin(x)$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

C3.

Pour $x_0 = \frac{1}{4}$, on a $F(x_0)\ F''(x_0) = 0.5189 > 0$

Les conditions d'application de la méthode de Newton- Raphson sont vérifiées.

4. Calculer les quatre premiers itérés par la méthode de Newton-Raphson.

$x_0 = \frac{1}{4}$;

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} = 0.348206$$

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} = 0.35228$$

$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_2)} = 0.352288$$

$$x_4 = x_3 - \frac{F(x_3)}{F'(x_3)} = 0.352288$$