Série de TD N°01

Méthode de DICHOTOMIE (Bissection)

Exercice 01 :(Séparation graphique des racines & Existence et unicité de la solution.)

Soient les fonctions suivantes : $F_1(x) = x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6};\ F_2(x) = x\,e^x - \frac{1}{2};\ F_3(x) = \cos(2x) - x.$

1. Combien l'équation $F_1(x) = 0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que :
   - **a.** il existe un unique $\alpha_1 \in [0.9, 2]$, tel que $F_1(\alpha_1) = 0.$
   - **b.** il existe un unique $\alpha_2 \in [0,1]$, tel que $F_2(\alpha_2) = 0.$
   - **c.** il existe un unique $\alpha_3 \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right]$, tel que $F_3(\alpha_3) = 0.$

Exercice 02 : Reprenons l'exercice 1, et soit à résoudre l'équation : $F_1(x) = 0,\ \ x \in [0.9, 2].$

1. On souhaite calculer une valeur approchée de α_1, par la méthode de dichotomie (bissection) avec une précision de 10^{-3}, combien d'itérations n sont nécessaires au maximum ?
2. Calculer une valeur approchée de α_1, par la méthode de dichotomie avec une précision de 10^{-1} (*prendre cinq chiffres après la virgule*).

Exercice 03 :

Soit l'équation non linéaire $f(x) = x^2 - 2 = 0$. En utilisant la méthode de Bissection :

1- Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une racine dans le chiffre est millième dans l'intervalle $I = \left[\frac{6}{5}; \frac{3}{2}\right]$.

2- Quelle précision obtiendra-t-on après 5 itérations (sans les faire).

Exercice supplémentaire :

Soit l'équation non linéaire suivante : $f(x) = x^3 + x^2 - x = 0$.

1- Séparer graphiquement les racines de la fonction f .

2- Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour approcher les racines par laméthode de Bissection pour une précision de $\varepsilon_n = 10^{-3}$.

3- Pour une précision $\varepsilon_n = 10^{-2}$ calculer la racine de l'équation dans l'intervalle $I = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$

Solution de la série de TD N°01

Méthode de DICHOTOMIE (Bissection)

Solution de l'exercice 01 : (Séparation graphique des racines & Existence et unicité de la solution)

Soient les fonctions suivantes : $F_1(x) = x^3 - \frac{11}{6}x^2 + x - \frac{1}{6}$; $F_2(x) = x\, e^x - \frac{1}{2}$; $F_3(x) = \cos(2x) - x.$

1. Combien l'équation $F_1(x) = 0$ admet-elle de solutions sur $\mathbb{R}$?

1.1. Le domaine de définition de F_1 $D_{F_1} =]-\infty, +\infty[$.

1.2. Calcul des limites

$$\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} F_1(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

1.3. Signe de la dérivée

La fonction F_1 est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée F_1' telle que : $F_1'(x) = 3x^2 - \frac{11}{3}x + 1$.

Résolvons l'équation de deuxième degré suivante : $F_1'(x) = 0.$

On a : $\Delta = \left(\frac{11}{3}\right)^2 - 4\times3\times1 = \frac{13}{9} > 0$

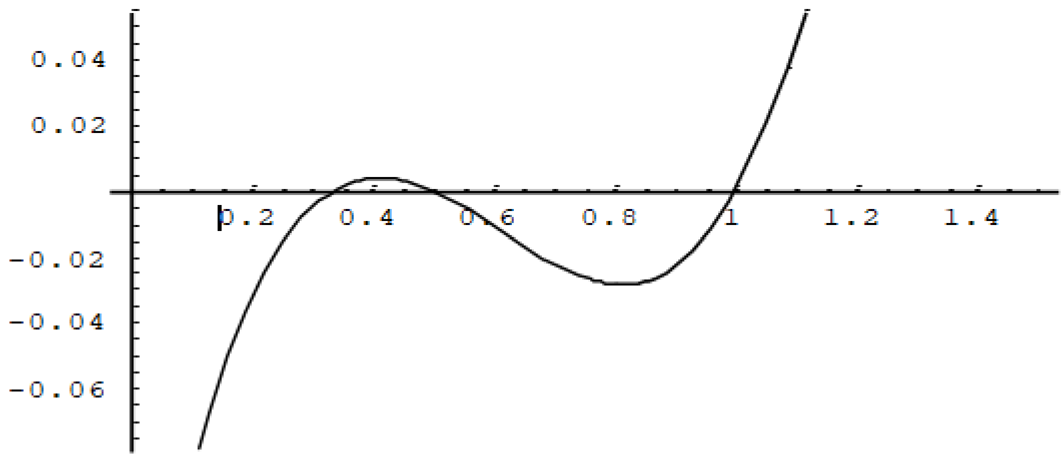
L'équation $F_1'(x) = 0.$ admet deux solutions x_1 et x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\frac{11}{3} - \sqrt{\Delta}}{3\times2} = \dfrac{11-\sqrt{13}}{18} \approx 0.41 \\ x_2 = \dfrac{\frac{11}{3} + \sqrt{\Delta}}{3\times2} = \dfrac{11+\sqrt{13}}{18} \approx 0.81 \end{cases}$$

1.4. Tableau de variation de F_1

x	$-\infty$	$x_1 \approx 0.41$	$x_2 \approx 0.81$	$+\infty$
$F_1'(x)$	+	-	+	
$F_1(x)$	$-\infty$ ↗	$F_1(x_1) = 0.004$ ↘	$F_1(x_2) = -0.028$ ↗	$+\infty$

Courbe de la fonction F_1



A partir de tableau de variation et de graphe de la fonction F_1 et par une application de théorème des valeurs intermédiaires on peut déduire que la fonction F_1 admet trois racines sur $\mathbb{R}$.

Première racine $c_1 \in]-\infty, x_1[$

La fonction F_1 est **continue** sur $]-\infty, x_1]$……(1)

$\lim_{x\to-\infty} F_1(x) = -\infty$ *et* $F_1(x_1) = 0.004$ donc $\lim_{x\to-\infty} F_1(x)\times F_1(x_1) < 0$ ……………..(2)

De (1) et (2) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c_1 \in]-\infty, x_1[$ *tel que* $F_1(c_1) = 0$ ….(*)

F_1 **est croissante sur** $]-\infty, x_1]$ …….(**)

De (*) et (**), $\exists! c_1 \in]-\infty, x_1[$ tel que $F_1(c_1) = 0$

Deuxième racine $c_2 \in]x_1, x_2[$

La fonction F_1 est **continue** sur $[x_1, x_2]$ ……(1)

$F_1(x_1) = 0.004$ *et* $F_1(x_2) = -0.028$ donc $F_1(x_1)\times F_1(x_2) < 0$ ……………..(2)

De (1) et (2) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c_2 \in]x_1, x_2[$ *tel que* $F_1(c_2) = 0$ ….(*)

F_1 **est décroissante sur** $[x_1, x_2]$ …….(**)

De (*) et (**), $\exists! c_2 \in]x_1, x_2[$ tel que $F_1(c_2) = 0$

Troisième racine $c_3 \in]x_2, +\infty[$

La fonction F_1 est **continue** sur $[x_2, +\infty[$ ……(1)

$\lim_{x\to+\infty} F_1(x) = +\infty$ *et* $F_1(x_2) = -0.028$ donc $\lim_{x\to+\infty} F_1(x)\times F_1(x_2) < 0$ ……………..(2)

De (1) et (2) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c_3 \in]x_2, +\infty[$ *tel que* $F_1(c_3) = 0$ ….(*)

F_1 **est croissante sur** $[x_2, +\infty[$ …….(**)

De (*) et (**), $\exists! c_3 \in]x_2, +\infty[$ tel que $F_1(c_3) = 0$

2. Montrons que :

2.a. il existe un unique $\alpha_1 \in [0.9,2]$, tel que $F_1(\alpha_1) = 0$.

(1) La fonction F_1 est continue sur $[0.9,2]$.

(2) $F_1(0.9) = -0.02266$ et $F_1(2) = 2.5$ donc $F_1(0.9)\, F_1(2) < 0$.

De (1) *et* (2) *et d'après le théorème des valeurs intermédiaires* $\exists \alpha_1 \in \left]0.9, 2\right[$ *tel que* $F_1(\alpha_1) = 0$..(*)

$[0.9, 2] \subset [x_2, +\infty[\Rightarrow$ F_1 **est croissante sur** $[0.9,2]$ ....(**)

De (*) et (**), $\exists! \alpha_1 \in \left]0.9, 2\right[$ tel que $F_1(\alpha_1) = 0$.

2.b. il existe un unique $\alpha_2 \in [0,1]$, tel que $F_2(\alpha_2) = 0$.

Soit $F_2(x) = xe^x - \dfrac{1}{2}$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(1) La fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

(2) $F_2(0) = -0.5$ et $F_2(1) = 2.21$ donc $F_2(0) \times F_2(1) < 0$.

De (1) et (2) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
$\exists \alpha_2 \in \left]0,1\right[$ tel que $F_2(\alpha_2) = 0$ ....(*)
$F_2'(x) = (1+x)\, e^x > 0, \ \forall x \in [0,1]$ $\Longrightarrow$ F_2 **est croissante sur** $[0,1]$..........(**)
De (*) et (**), $\exists! \alpha_2 \in \left]0,1\right[$ tel que $F_2(\alpha_2) = 0$.

2.b) il existe un unique $\alpha_3 \in \left[0, \dfrac{\pi}{5}\right]$, tel que $F_3(\alpha_3) = 0$.

Soit la fonction $F_3(x) = \cos(2x) - x$ définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(1) La fonction F_3 est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{5}\right]$

(2) $F_3(0) = 1$ et $F_3(\dfrac{\pi}{5}) = -0.319$ donc $F_3(0) \times F_3(\dfrac{\pi}{5}) < 0$

De (1) et (2) et d'après le théorème des valeurs intermédiaires,
$\exists \alpha_3 \in \left]0, \dfrac{\pi}{5}\right[$ tel que $F_3(\alpha_3) = 0$ ....(*)

$F_3'(x) = -(1 + 2\sin(2x))$.

$$0 \le x \le \frac{\pi}{5} \Rightarrow 0 \le \sin(2x) \le 0.951057$$
$$\Rightarrow 0 \le 2\sin(2x) \le 1.90211$$
$$\Rightarrow 1 \le 1 + 2\sin(2x) \le 2.90211$$
$$\Rightarrow -2.90211 \le -(1+\sin(2x)) \le -1$$

$F_3'(x) < 0, \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{5}\right] \Rightarrow F_3$ est décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{5}\right]$ ....(**)

De (*) et (**), $\exists! \alpha_3 \in \left]0, \dfrac{\pi}{5}\right[$ tel que $F_3(\alpha_3) = 0$

<u>Exercice n°2.</u> (Méthode de Dichotomie)

Reprenons l'exercice 1, et soit à résoudre l'équation : $F_1(x) = 0, x \in [0.9, 2]$.

1. On souhaite calculer une valeur approchée de α_1, par la méthode de dichotomie (bissection) avec une précision de 10^{-3}, combien d'itérations n sont nécessaires au maximum ?

A l'étape n de l'algorithme de dichotomie, on a $\Delta_n = \dfrac{|b-a|}{2^n}$:

$$\frac{|b_0 - a_0|}{2^n} \leq \varepsilon_n \Leftrightarrow \frac{|2-0.9|}{2^n} \leq 10^{-3}$$

$$\Rightarrow 2^n \geq \frac{1.1}{10^{-3}}$$

$$\Rightarrow \ln(2^n) \geq \ln(\frac{1.1}{10^{-3}})$$

$$\Rightarrow n\ln(2) \geq \ln(\frac{1.1}{10^{-3}})$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{1.1}{10^{-3}})}{\ln(2)} = 10.1033$$

Donc il faut réaliser **11** itérations au maximum pour atteindre la précision de 10^{-3}

2. Calculer une valeur approchée de α_1, par la méthode de dichotomie avec une précision de 10^{-1} (*prendre cinq chiffres après la virgule*).

- **Première itération :**

$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{0.9+2}{2} = 1.45$, $F_1(x_1) = 0.47737 \neq 0$ donc x_1 n'est pas une racine de F_1 .

$\Delta_1 = \frac{|b-a|}{2^1} = 0.55 > 10^{-1}$

$F_1(a) = -0.02266$ et $F_1(x_1) = 0.47737 \Rightarrow F_1(a)F_1(x_1) < 0$

D'après le T.V.I, la racine est dans l'intervalle $]0.9, 1.45[$.

- Deuxième itération :

$x_2 = \frac{a+x_1}{2} = \frac{0.9+1.45}{2} = 1.175$, $F_1(x_2) = 0.09942 \neq 0$ donc x_2 n'est pas une racine de F_1 .

$\Delta_2 = \frac{|x_1-a|}{2^2} = 0.275 > 10^{-1}$

$F_1(a) = -0.02266$ et $F_1(x_2) = 0.09942 \Rightarrow F_1(a)F_1(x_2) < 0$

Donc la racine est dans l'intervalle $]0.9, 1.175[$, de la même manière nous allons calculer les autres itérations.

n	a_n	b_n	$F_1(a_n)$	$F_1(\mathrm{b}_n)$	x_n	$F_1(x_n)$	$\Delta_n = \frac{\lvert b-a\rvert}{2^n}$	$\frac{\lvert b-a\rvert}{2^n} \leq 10^{-1}$
1	0.9	2	−0.02266	2.5	1.45	0.47737	0.55	Non
2	0.9	1.45	−0.02266	0.47737	1.175	0.09942	0.275	Non
3	0.9	1.175	−0.02266	0.09942	1.0375	0.01419	0.1375	Non
4	0.9	1.0375	−0.02266	0.01419	0.96875	−0.00930	0.06875	Oui

une valeur approchée de α_1 est $x_4 = 0.96875$ telle que $F_1(x_4) = -0.0093 \approx 0$.

Exercice 03 :

$$f(x) = x^2 - 2 = 0$$

1. **Le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une racine dont le chiffre est millième dans l'intervalle $\left[\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right]$**

Vérification de l'existence d'une racine dans l'intervalle $\left[\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right]$.

f est continue sur l'intervalle $\left[\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right]$ …………(1)

$f(\frac{6}{5}) = -0.56$ et $f(\frac{3}{2}) = 0.25$ donc $f(\frac{6}{5}) \times f(\frac{3}{2}) < 0$ ……………(2)

De (1) et (2) et d'après le T.V.I, $\exists \alpha \in \left]\frac{6}{5}, \frac{3}{2}\right[$, $f(\alpha) = 0$

Une racine de chiffre millième veut dire une précision $\varepsilon_n = 10^{-3}$

$$n = \frac{\ln(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon_n})}{\ln 2} = \frac{\ln(\frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right|}{10^{-3}})}{\ln 2} = 8.23$$, donc n=9 itérations.

2. **La précision qu'on obtiendra après 5 itérations (ε_5)**

$$n = 5 = \frac{\ln(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon_5})}{\ln 2} \Rightarrow 5\ln 2 = \ln(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon_5})$$

$$\Rightarrow \ln 2^5 = \ln(\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon_5})$$

$$\Rightarrow 2^5 = (\frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon_5})$$

$$\Rightarrow \varepsilon_5 = \frac{|b_0 - a_0|}{2^5} = \frac{\left|\frac{3}{2} - \frac{6}{5}\right|}{2^5} = 0.009375 = 9.375 \times 10^{-3}$$