

# Notes de cours du chapitre II

## Premier principe de la thermodynamique

### Introduction

On appelle transformation thermodynamique le passage d'un état d'équilibre initial à un état d'équilibre final. On identifie souvent les transformations par une variable d'état qui reste constante.

Une transformation à température constante est appelé isotherme.

Une transformation à pression constante est appelé isobare.

Une transformation à volume constant est appelé isochore.

Une transformation adiabatique est une transformation au cours de laquelle il n'y a aucun échange de chaleur.

Un système **fermé** subissant une transformations thermodynamique échange de l'énergie sous forme de chaleur  $Q$  et de travail  $W$  avec le milieu extérieur. La convention de signe des énergies échangées (chaleur, travail...) est comme suit :

- Les énergies ( $Q, W$ ) reçues par le système sont comptées  $> 0$  et affectées du signe  $+$ .
- Les énergies ( $Q, W$ ) cédées par le système sont comptées  $< 0$  et affectées du signe  $-$ .

### 1 Chaleur $Q$

la chaleur est une forme d'énergie qui se transfère d'un objet à un autre en raison d'une différence de température entre les deux objets. La chaleur est donc liée au mouvement désordonné des molécules d'un objet, qui peut être transféré à un autre objet en contact avec lui.

La chaleur est mesurée en unités d'énergie, telles que les joules ou les calories (1 calorie = 4.18 Joule). Lorsqu'un objet reçoit de la chaleur, sa température peut augmenter, ce qui peut entraîner des changements physiques ou chimiques dans l'objet, tels que l'expansion, la fusion ou l'évaporation.

En thermodynamique, la chaleur peut être divisée en deux types : la chaleur sensible et la chaleur latente.

## 1.1 Chaleur sensible

La chaleur sensible est la quantité de chaleur nécessaire pour changer la température d'un corps sans changer son état physique.

La quantité de chaleur sensible  $\delta Q$  échangée par un corps qui passe d'une température  $T$  à une température  $T + dT$  est :

$$\delta Q = mC dT,$$

où  $m$  représente la masse corps (en kg) et  $C$  est la capacité calorifique massique du corps (en  $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$ ).

Si la température du corps passe d'une température  $T_A$  à une température  $T_B$ , la chaleur échangée est

$$Q = \int_{T_A}^{T_B} \delta Q = \int_{T_A}^{T_B} mC dT = mC(T_B - T_A)$$

Pour un gaz, la masse est remplacée par la quantité de matière (nombre de moles =  $n$ ) et la capacité calorifique massique est alors remplacée par la capacité calorifique molaire  $c_P$  ou  $c_V$  (en  $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ ). Les relations précédentes deviennent alors :

$$\delta Q = nC_P dT, \quad (\text{si } P=\text{cste})$$

ou

$$Q = nC_V dT, \quad (\text{si } V=\text{cste})$$

**Attention!** Il ne faut pas confondre la capacité calorifique d'un corps et sa capacité calorifique massique ou molaire. La capacité calorifique massique (ou molaire) est la chaleur nécessaire pour élever de 1 degré la température d'une unité de masse (ou de quantité de matière) du corps alors que la capacité calorifique est la chaleur nécessaire pour élever de 1 degré la température de la totalité du corps.

Pour un corps solide :

$$Q = m \underbrace{\underbrace{C}_{\text{capacité calorifique massique}}}_{\text{capacité calorifique}} \Delta T$$

Pour un corps gazeux :

$$Q = n \underbrace{C}_{\substack{\text{capacité calorifique molaire} \\ \text{capacité calorifique}}} \Delta T$$

### Exemple

Une pomme de terre de masse 100 g, ayant une température initiale de 25°C est placée dans un four dont la température atteint 85°C. On donne  $c_{\text{pomme}} = 5.10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ . Déterminer la quantité de chaleur reçue par la pomme.

Réponse :

La chaleur  $Q$  reçue par la pomme est

$$Q = mC\Delta T = 0.1 \times 5 \times 10^3(85 - 25) = 30000 \text{ Joules}$$

## 1.2 Chaleur latente de changement d'état physique d'un corps

La chaleur latente est la quantité de chaleur nécessaire pour changer l'état physique d'un corps (par exemple, faire fondre de la glace en eau liquide). La chaleur latente est absorbée ou libérée pendant le changement d'état physique, sans changer la température de la substance. Les formules pour calculer la chaleur latente sont les suivantes :

$$\underbrace{L}_{\text{Chaleur latente massique spécifique}} = \frac{Q}{\underbrace{m}_{\text{masse du corps}}} \quad \text{pour un corps solide, en J/kg}$$

$$\underbrace{L}_{\text{Chaleur latente molaire spécifique}} = \frac{Q}{\underbrace{n}_{\text{nombre de mole}}} \quad \text{pour un corps gazeux, en J/mol}$$

où  $Q$  représente la chaleur latente échangée.

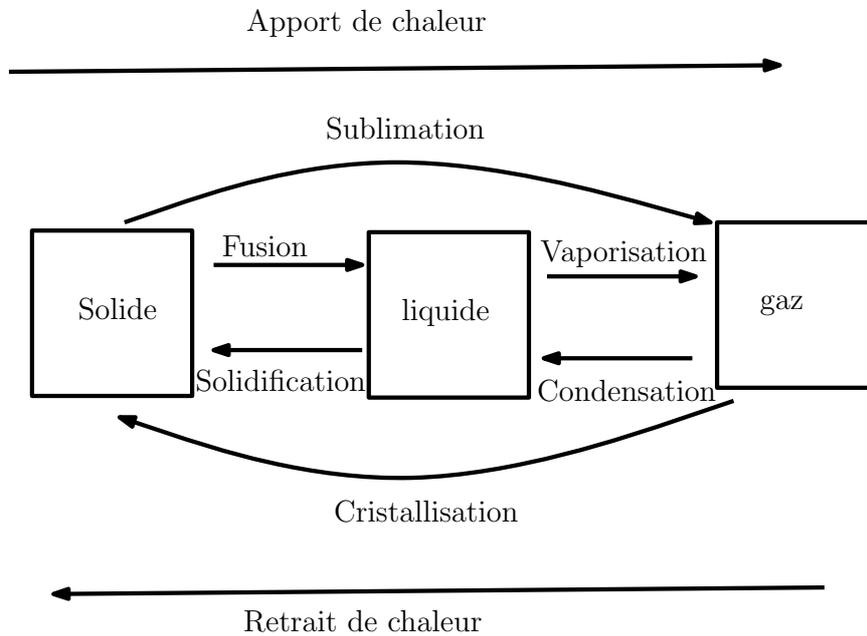
### Les différents changement d'état d'un corps

Il existe différentes valeurs de la chaleur latente pour différents types de changements d'état, tels que la fusion, la vaporisation ou la sublimation, qui sont spécifiques à chaque corps. Généralement, lorsqu'on apporte de la chaleur à un corps, il peut passer successivement de l'état solide à l'état liquide, et ensuite un peu plus tard de l'état liquide à l'état gazeux.

Inversement, lorsqu'on retire de la chaleur à ce corps, il peut passer successivement de l'état gazeux à l'état liquide, et ensuite de l'état liquide à l'état solide.

Dans certains cas plus rares, un corps peut aussi passer directement de l'état solide à l'état gazeux, et vice versa.

Les noms des différents changements d'état possibles sont résumé dans la figure ci-dessous :



Un système adiabatiquement isolé du milieu extérieur, et qui est composé de  $N$  sous-système vérifie l'équation suivante :

$$\sum_i^N Q_i = 0, \quad Q_i = \text{chaleur échangé par le sous-système } i$$

### Exemple

Un calorimètre parfaitement calorifugé contient initialement une masse d'eau  $m_1=1\text{kg}$  à une température  $T_1=10\text{ }^\circ\text{C}$  et une masse  $m_2=2\text{ kg}$  d'eau à une température  $T_2=60\text{ }^\circ\text{C}$  (on néglige  $C_{cal}$ ).

Calculer la température finale  $T_{eq}$  (la température d'équilibre)

Donnée :  $C_{eau} = 4185\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$

$$m_1 \Rightarrow Q_1 = m_1 C_1 (T_{eq} - T_1)$$

$$m_2 \Rightarrow Q_2 = m_2 C_2 (T_{eq} - T_2)$$

$$\sum_i Q_i = 0, \rightarrow Q_1 + Q_2 = 0 \quad \text{transf adiabatique}$$

$\Rightarrow$

$$m_1 C_{eau} (T_{eq} - T_1) + m_2 C_{eau} (T_{eq} - T_2) = 0 \rightarrow T_{eq} = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$$

$\Rightarrow$

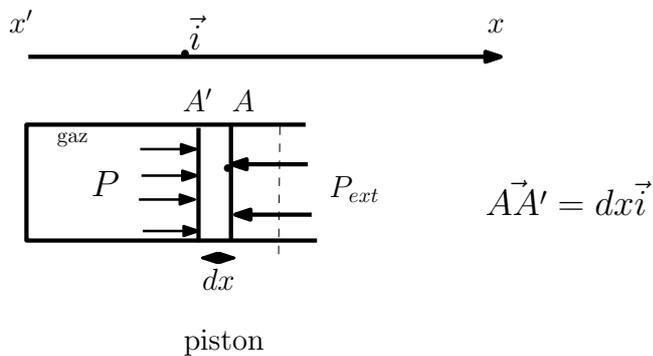
$$T_{eq} = \frac{1 \times (10 + 273) + 2 \times (60 + 273)}{1 + 2} = 316.33K = 43.33C$$

## 2 Travail $W$

Le travail est une forme d'énergie qui est échangée de façon ordonnée.

### 2.1 Travail des forces de pression

#### Travail élémentaire d'une force de pression



Un système fermé est composé d'un gaz contenu dans un récipient cylindrique muni d'un piston mobile de surface  $S$ .

Le système est soumis à la force de pression  $\vec{F} = -P_{ext}\vec{i}$  qui provoque le déplacement élémentaire du piston  $\vec{AA'} = dx\vec{i}$ .

Le travail élémentaire de force de pression est

$$\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{AA'} = -P_{ext} \underbrace{S dx}_{dV}$$

$$\delta W = -P_{ext} dV$$

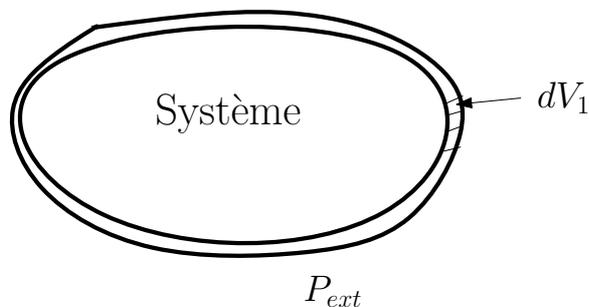
Le travail élémentaire  $\delta W$  se présente donc comme une quantité algébrique.

- $\delta W > 0$  : Le gaz se comprime ( $dV < 0$ ,  $V$  diminue), le gaz reçoit du travail du milieu extérieur.
- $\delta W < 0$  : Le gaz se détend ( $dV > 0$ ,  $V$  augmente), le gaz fournit du travail au milieu extérieur.
- $\delta W = 0 \Rightarrow dV = 0$  : le piston est à l'équilibre.

### Remarque

L'expression  $\delta W = -P_{ext} dV$  peut se généraliser dans le cas d'un gaz délimité par une surface  $S$  quelconque subissant une pression extérieure uniforme. En effet, en effectuant un découpage du volume  $dV$  en cylindre élémentaire, il vient

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 + \dots + \delta W_{n-1} + \delta W_n = -P_{ext} dV_1 - P_{ext} dV_2 + \dots - P_{ext} dV_{n-1} - P_{ext} dV_n = -P_{ext} dV$$



### Travail fini d'une force de pression

Le volume occupé par le gaz, évolue de  $V_1$  à  $V_2$  au cours d'une transformation, le travail correspondant reçu pour le gaz est :

$$W = \int_1^2 \delta W = - \int_1^2 P_{ext} dV$$

## Cas simples

Transformation à  $P_{ext}$  constante  $\Rightarrow W = -P_{ext}(V_2 - V_1)$ .

Transformation isochore  $\Rightarrow W = 0$ .

## 2.2 Travail $W$ de quelques transformations

On va déterminer le travail  $W$  reçu par un gaz parfait lorsque ce dernier subit les transformations suivantes :

- Transformation isotherme réversible.
- Transformation isotherme irréversible.
- Transformation adiabatique.

Le gaz parfait subit une transformation passant de l'état A ( $P_1, V_1, T_1, n$ ) à l'état B ( $P_2, V_2, T_2, n$ ).

### a- Transformation isotherme réversible

La transformation est réversible  $\Rightarrow$  La transformation est quasi-statique  $\Rightarrow$  A chaque instant, il y a équilibre entre le gaz et le milieu extérieur  $\Rightarrow P_{ext} = P$ .

$$\delta W = -P_{ext}dV = -PdV$$

Le gaz est parfait  $\Rightarrow PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V}$

$\Rightarrow$

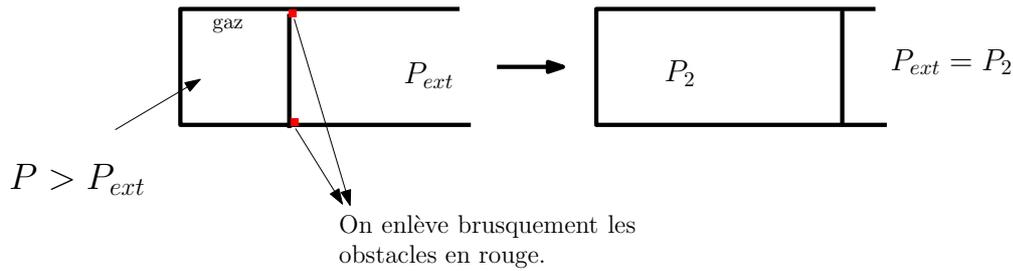
$$\delta W = -\frac{nRT}{V}dV$$

$$W = -\int_1^2 PdV = nRT \int_1^2 \frac{dV}{V} = -nRT \left[ \ln V \right]_1^2 = -nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

soit

$$W = P_1 V_1 \ln \left( \frac{V_1}{V_2} \right) = nRT \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right), \quad (P_1 V_1 = P_2 V_2) = nRT$$

- Si le gaz subit une compression  $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} > 1 \Rightarrow W > 0 \rightarrow$  le gaz reçoit du travail.
- Si le gaz subit une détente  $\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} < 1 \Rightarrow W < 0 \Rightarrow$  le gaz fournit du travail.



### b- Transformation isotherme irréversible

La transformation est irréversible  $\Rightarrow$  l'évolution du gaz n'est pas quasi-statique, aussi  $P_{ext} \neq P$  sauf dans l'état initial A ou final B où l'équilibre est réalisé.

$$\delta W = -P_{ext}dV$$

La pression extérieur  $P_{ext}$  est constante au cours de la transformation, d'où

$$W = -P_{ext} \int_{V_1}^{V_2} dV = -P_{ext} (V_2 - V_1) = -P_{ext} \Delta V$$

L'état final est un état d'équilibre, c'est à dire  $P_{ext} = P_2 \Rightarrow$

$$W = -P_2 (V_2 - V_1)$$

### Remarque

Le travail fourni maximal est échangé lors d'une transformation réversible.  $\rightarrow |W_{rév}| \gg |W_{irrév}|$

### c- Transformation adiabatique réversible

Une transformation adiabatique quasi-statique est caractérisée par  $\delta Q = 0$ .

On démontre que :

$$\delta Q = 0 \Rightarrow PV^\gamma = Cte, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

$PV^\gamma = Cte$  est appelé la loi de Laplace. Cette Loi sera démontré, à partir du premier principe de la thermodynamique dans le prochain paragraphe.

$$\delta W = -PdV \Rightarrow \delta W = -PV^\gamma \frac{dV}{V^\gamma}$$

⇒

$$W = -PV^\gamma \int_1^2 \frac{dV}{V^\gamma}, \quad \text{on utilise} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

⇒

$$W = \left[ -PV^\gamma \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_1^2 = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma-1} = \frac{\Delta(PV)}{\gamma-1}$$

### Expression de $W$ en fonction de la température

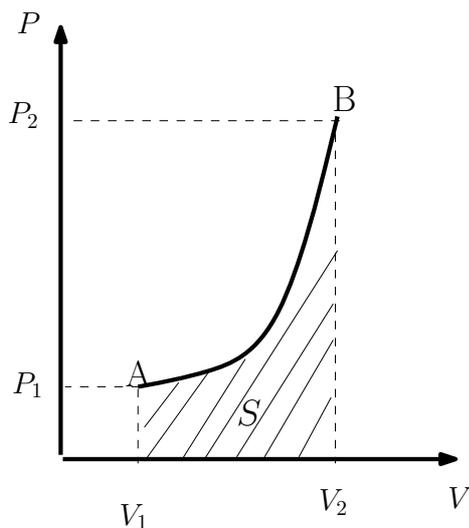
$$P_1V_1 = nRT_1 \quad \text{et} \quad P_2V_2 = nRT_2 \Rightarrow W = nR \frac{T_2 - T_1}{\gamma - 1}$$

- Lorsque la température diminue ( $T_2 < T_1$ )  $\Rightarrow W < 0 \Rightarrow$  le gaz se détend.
- Lorsque la température augmente ( $T_2 > T_1$ )  $\Rightarrow W > 0 \Rightarrow$  le gaz se comprime.

### Visualisation graphique de travail d'une force de pression

On utilise généralement un diagramme  $(P, V)$ , appelé de Clapeyron, pour représenter une transformation thermodynamique subit par un système.

→ Le diagramme de Clapeyron correspond à la courbe  $P = f(V)$ .



$$W = - \int_A^B P dV = -S$$

⇒ Le travail apparaît comme l'opposé de l'aire sous la courbe  $P = f(V)$ .

### 3 Énergie interne U d'un système

Un système thermodynamique comprend toujours un très grand nombre de particules dont l'énergie totale  $E_T$  est la somme des énergies cinétiques et potentielle d'origine intérieures et extérieures

$$E_T = E_{ci} + E_{pi} + E_{ce} + E_{pe}$$

$E_{ci}$  représente l'énergie cinétique microscopique interne, qui est associée aux mouvements aléatoires des molécules.

$E_{pi}$  représente l'énergie potentielle interne, qui est associée aux forces d'interaction entre les molécules.

$E_{ce}$  représente l'énergie cinétique d'entraînement

$E_{pe}$  représente l'énergie potentielle extérieure.

L'énergie interne  $U$  du système est relative à la seule énergie d'origine microscopique.

$$U = E_{ci} + E_{pi}$$

L'énergie interne  $U$  caractérise donc le contenu au niveau énergétique du système thermodynamique.

## 4 Le premier principe de la thermodynamique

### 4.1 Énoncé du premier principe

Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie interne est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, sous forme de chaleur et sous forme de travail.

⇒ Pour un système subissant une évolution entre les états A et B, la variation de l'énergie interne est :

$$U_B - U_A = \Delta U = W + Q$$

$W$  représente le travail des forces de pression qui s'exercent au niveau de la surface délimitant le système et  $Q =$  la chaleur échangée par le système.

Le signe de  $Q$  et  $W$  dépend du sens de transfert d'énergie. Si la chaleur est transférée du système vers l'extérieur alors  $Q < 0$ . De même, si le système effectue un travail sur l'extérieur alors  $W < 0$ .

## 4.2 Expression différentielles du premier principe

Pour un système subissant une évolution élémentaire entre deux états très voisins, la variation de l'énergie interne est infinitésimale, le premier principe s'écrit :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

## 4.3 Enthalpie $H$

L'enthalpie  $H$  est définie comme la somme d'énergie interne  $U$  du système et du produit de la pression  $P$  et du volume  $V$  du système, soit :

$$H = U + PV$$

L'enthalpie  $H$  est une fonction d'état extensive. (unité : joule)

### Expression du premier principe à partir de l'enthalpie :

$$H = U + PV \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} dH &= dU + d(PV) \\ &= \underbrace{dU}_{\delta W + \delta Q} + PdV + VdP \\ &= \underbrace{\delta W}_{-PdV} + \delta Q + PdV + VdP \\ &= \delta Q + VdP \end{aligned}$$

Le premier principe s'écrit alors à partir de l'enthalpie pour une transformation infinitésimale comme suit

$$dH = \delta Q + VdP$$

## 5 Application du premier principe aux transformations thermodynamiques des gaz parfaits

### Lois de Joule

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température. C'est la première loi de Joule.  $\Rightarrow U = U(T)$

L'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de la température. C'est la deuxième loi de Joule.  $\Rightarrow H = H(T)$

Les formules différentielles des lois de Joule pour  $n$  mole s'écrivent :

$$dU = nC_V dT, \quad dH = nC_P dT$$

### Relation de Mayer

$$H = U + PV$$

$\Rightarrow$

$$dH = dU + d(PV), \quad PV = nRT$$

$\Rightarrow$

$$nC_P dT = nC_V dT + nR dT \rightarrow C_P - C_V = R \quad \text{Relation de Mayer}$$

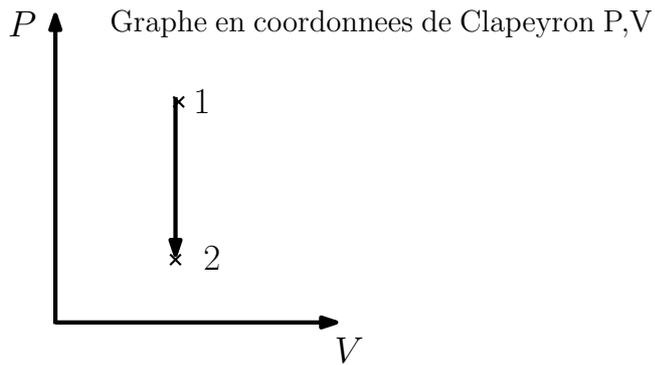
On introduit souvent le coefficient  $\gamma = C_P/C_V$ , il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \\ C_V = \frac{R}{\gamma - 1} \\ C_P \text{ est toujours plus grand que } C_V. \end{array} \right. ,$$

### a- Transformations isochore

Relation entre les paramètres d'état

$$V = Cte \Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{nR}{V} = Cste$$



### Travail $W$

$$V = Cte \Rightarrow dV = 0$$

$$\delta W = -P \underbrace{dV}_{=0} \Rightarrow \delta W \Rightarrow W_{12} = 0$$

### Chaleur $Q$

$$dU = \delta W + \delta Q = -PdV + \delta Q_{12} = 0 \Rightarrow Q_{12} = \int_1^2 dU = \int_1^2 nC_V dT = nC_V(T_2 - T_1)$$

– Remarque : Au cours d'une transformation isochore, la chaleur reçue par le gaz est mesurée par sa variation d'énergie interne.

$$\rightarrow Q_V = \Delta U = U_2 - U_1$$

### $\Delta U$ et $\Delta H$

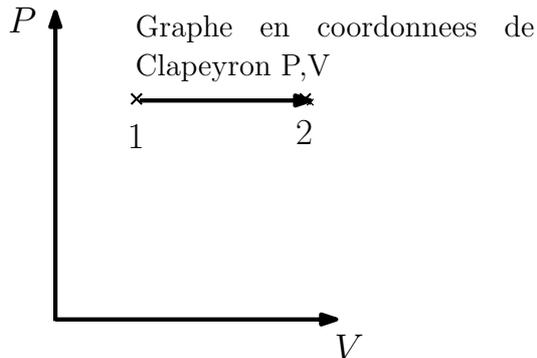
$$dU = nC_V dT \Rightarrow \int_1^2 dU = \int_1^2 nC_V dT \Rightarrow \Delta U_{1 \rightarrow 2} = nC_V \Delta T = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$dH = nC_P dT \Rightarrow \int_1^2 dH = \int_1^2 nC_P dT \Rightarrow \Delta H_{1 \rightarrow 2} = nC_P \Delta T = nC_P(T_2 - T_1)$$

## b- Transformations isobare.

Relation entre les paramètres d'état

$$P = Cte \Rightarrow \frac{V}{T} = \frac{nR}{P} = Cste$$



**Travail  $W$**

$$\delta W = -PdV \Rightarrow W = \int_1^2 -PdV$$

$\Rightarrow$

$$W_{12} = -P_1\Delta V = -P_1(V_2 - V_1)$$

**Chaleur  $Q$**

En utilisant le premier principe en fonction de l'enthalpie pour une transformation infinitésimale  $\Rightarrow$

$$dH = \delta Q + \underbrace{VdP}_{=0} \Rightarrow Q_{12} = \int_1^2 dH = nC_P(T_2 - T_1)$$

- Remarque : Au cours d'une transformation isobare, la chaleur reçue par le gaz est mesurée par sa variation d'enthalpie.

$$\rightarrow Q_P = \Delta H = H_2 - H_1$$

$\Delta U$  et  $\Delta H$

$$\Delta U = nC_V\Delta T = nC_P\Delta T = nC_P(T_2 - T_1)$$

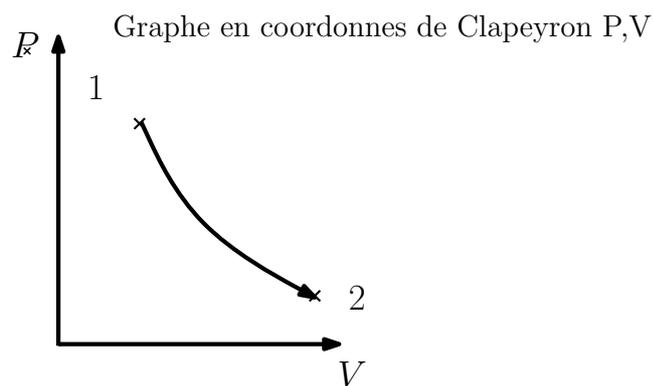
$$\Delta U = nC_V\Delta T = nC_V\Delta T = nC_V(T_2 - T_1)$$

### c- Transformations isotherme

Relation entre les paramètres d'état

$$PV = nRT \Rightarrow PV = Cste$$

En diagramme PV, la courbe  $P = \frac{Cste}{V}$  est une hyperbole.



Travail  $W$

$$\delta W = -PdV = -nRT\frac{dV}{V} \Rightarrow W = - \int_{V_1}^{V_2} nRT\frac{dV}{V} = -nRT \left[ \ln(V) \right]_{V_1}^{V_2}$$

$\Rightarrow$

$$W_{12} = -nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = nRT \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

## Chaleur $Q$

$$\underbrace{dU}_{=0} = \delta W + \delta Q \Rightarrow \delta Q = -\delta W \Rightarrow Q_{12} = -W_{12}$$

$$\Rightarrow Q_{12} = nRT \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -nRT \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

## $\Delta U$ et $\Delta H$

$$\Delta U = 0 \quad \text{et} \quad \Delta H = 0$$

## d- Transformation adiabatique ( $Q = 0$ )

### Relation entre les paramètres d'état

$$PV^\gamma = cste \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

### Démonstration

Une transformation adiabatique quasi-statique est caractérisé par  $\delta Q = 0$ .

$$dU = \underbrace{\delta Q}_{=0} + \delta W \Rightarrow nC_V dT + PdV = 0$$

$\Rightarrow$

$$n \underbrace{C_V}_{R/(\gamma-1)} dT + nRT \frac{dV}{V} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{nR}{\gamma-1} dT + nRT \frac{dV}{V} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{dT}{T} + (\gamma-1) \frac{dV}{V} = 0$$

⇒

$$\int \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \int \frac{dV}{V} = Cste$$

$$\int \ln(T) + \ln(V^{\gamma-1}) = Cste$$

$$\ln(TV^{\gamma-1}) = Cste$$

⇒

$$TV^{\gamma-1} = Cste$$

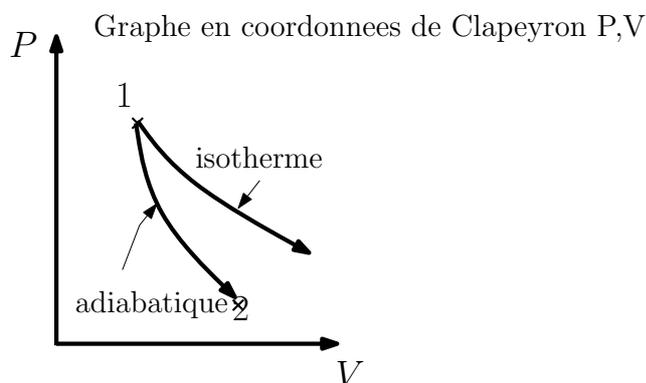
Ce résultat est connu sous le nom de la loi de Laplace en coordonnées  $(T, V)$ . Elle peut être transformée en variable  $(P, V)$  ou  $(P, T)$  en utilisant  $\frac{PV}{T} = nR$ , d'où :

$$PV^\gamma = Cte$$

ou

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = Cte$$

En coordonnées  $P, V$ , la courbe  $P = Cst/V^\gamma$  a une forme d'hyperbole que l'on peut comparer à une isotherme. Cependant, en un même point la pente en valeurs absolue de l'adiabatique est toujours plus élevée que la pente de l'isotherme.



## Travail $W$

$$W_{12} = \frac{\Delta(PV)}{\gamma - 1} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma - 1}$$

## Chaleur $Q$

$$Q_{12} = 0$$

## $\Delta U$ et $\Delta H$

$$\Delta U = nC_V\Delta T = \frac{nR}{\gamma - 1}\Delta T = \frac{\Delta(PV)}{\gamma - 1} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma - 1}$$

$$\Delta H = \Delta U + \underbrace{\Delta(PV)}_{(\gamma-1)\Delta U} = \gamma\Delta U$$

## 5.1 Exercice d'application : Cycle de Carnot

Un cycle est une suite de transformation où le système part d'un état donné et revient à son état initial.

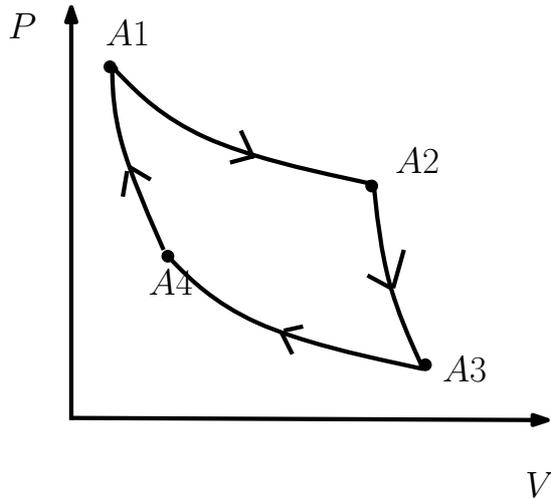
Soit un système de  $n$  moles de gaz parfait. Le cycle de Carnot est composé de la suite de transformations suivantes :



On veut calculer le rendement énergétique  $\rho$  de ce cycle qui est défini comme suit :

$$\rho = \frac{\text{Travail effectué}}{\text{Chaleur entrante}} = \frac{-W_{\text{cycle}}}{\sum Q_i^+}, \quad \text{avec}$$

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} \quad \text{et} \quad Q_i^+ > 0$$



Transf isothermes :

$$A1 \rightarrow A2, \quad A3 \rightarrow A4$$

Transf adiabatiques :

$$A2 \rightarrow A3, \quad A4 \rightarrow A1$$

$$\text{On pose : } T_c = T_1 = T_2$$

$$T_f = T_3 = T_4$$

$$T_c > T_f$$

Digramme  $P, V$  du cycle de Carnot

$A1 \rightarrow A2$  (**détente isotherme**)

$$W_{12} = -nRT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = -nRT_c \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

$$Q_{12} = nRT_c \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) > 0$$

$A2 \rightarrow A3$  (**détente adiabatique**)

$$W_{23} = \frac{P_3 V_3 - P_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_3 - T_2)}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_f - T_c)}{\gamma - 1}$$

$$Q_{23} = 0$$

$A3 \rightarrow A4$  (**compression isotherme**)

$$W_{34} = -nRT_3 \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right) = -nRT_f \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right)$$

$$Q_{34} = nRT_f \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right) < 0$$

A4 → A1 (**compression adiabatique**)

$$W_{41} = \frac{P_1 V_1 - P_4 V_4}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_1 - T_4)}{\gamma - 1} = \frac{nR(T_c - T_f)}{\gamma - 1}$$

$$Q_{41} = 0$$

$$W_{\text{cycle}} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = W_{12} + W_{34} = -nRT_1 \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) - nRT_3 \ln \left( \frac{V_4}{V_3} \right)$$

Les Transformations A2 → A3 et A4 → A1 sont adiabatiques ⇒

$$\begin{cases} T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \end{cases}$$

D'où par division membre à membre ⇒

$$\frac{T_2 V_2^{\gamma-1}}{T_1 V_1^{\gamma-1}} = \frac{T_3 V_3^{\gamma-1}}{T_4 V_4^{\gamma-1}} \rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$$

$$W_{\text{cycle}} = nR(T_3 - T_1) \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) = nR(T_f - T_c) \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Le rendement  $\rho$  est donc :

$$\rho = \frac{-W_{\text{cycle}}}{Q_{12}} = -\frac{nR(T_f - T_c) \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)}{nRT_c \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$