
Corrigé de la série n° 2 : Premier principe de la thermodynamique

Exercice n° 1

Rappels :

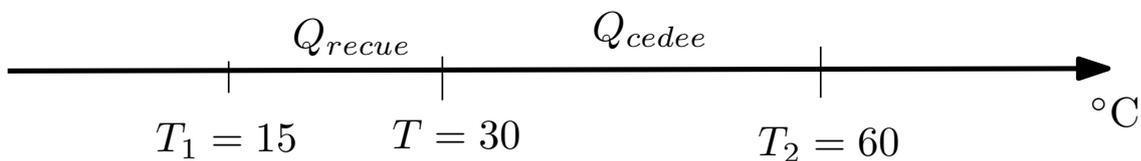
- La chaleur ajoutée ou enlevée à une substance (système) pour produire un changement de sa température se calcule par les formules suivantes :

$$\text{isobare}(P = \text{Cste}) \rightarrow Q = \int_1^2 mC_P dT = mC_P(T_2 - T_1)$$

$$\text{isochore}(V = \text{Cste}) \rightarrow Q = \int_1^2 mC_V dT = mC_V(T_2 - T_1)$$

- La chaleur latente L est la quantité de chaleur ajoutée ou retirée d'une substance pour produire un changement de phase. Lorsque la chaleur latente est ajoutée, aucun changement de température ne se produit. → la chaleur échangée d'une masse m avec le milieu extérieur est $Q = mL$

1- Calculons le volume d'eau à 15°C qu'il faut verser pour obtenir de l'eau à la température $T = 30^\circ\text{C}$



A l'équilibre thermodynamique : $\sum Q_{recu} + \sum Q_{cedee} = 0$

$$\begin{aligned} m_1 C_{p(eau)}(T - T_1) + m_2 C_{p(eau)}(T - T_2) &= 0 \\ \Rightarrow \rho_{eau} V_1 C_{p(eau)}(T - T_1) + \rho_{eau} V_2 C_{p(eau)}(T - T_2) &= 0 \\ \Rightarrow V_1 = -V_2 \frac{T - T_2}{T - T_1} \quad \text{AN : } V_1 = -10 \times \frac{30 - 60}{30 - 15} &= 20 \text{ l} \end{aligned}$$

2- Déterminons la température finale T_f du mélange

$$Q_{\text{cédé par l'eau chaude}} + Q_{\text{latente de fusion de la glace}} + Q_{\text{reçue par la glace}} = 0$$

$$\Rightarrow m_{\text{eau}} C_{p(\text{eau})} (T_f - T_i) + m_{\text{glace}} L_f + m_{\text{glace}} C_{p(\text{glace})} (T_f - T_F) = 0$$

tel que : T_f = Température finale, L_f = chaleur latente de fusion de la glace T_F = Température de fusion de la glace = $0^\circ\text{C} = 273^\circ\text{K}$ et T_i = Température initiale = 60°C .

$$\Rightarrow \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} C_{p(\text{eau})} (T_f - T_i) + m_{\text{glace}} L_f + m_{\text{glace}} C_{p(\text{glace})} (T_f - T_F) = 0$$

$$\Rightarrow T_f = \frac{\rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} C_{p(\text{eau})} T_i - m_{\text{glace}} L_f + m_{\text{glace}} C_{p(\text{glace})} T_F}{\rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} C_{p(\text{eau})} + m_{\text{glace}} C_{p(\text{glace})}}$$

$$\text{AN : } T_f = 324.5^\circ\text{K} = 51.5^\circ\text{C}$$

Exercice n° 2

Rappel :

Énergie interne : Premier principe :

à tout système est associée une fonction U , appelée énergie interne du système. Au cours d'une transformation, la variation d'énergie interne ΔU est égale à l'énergie totale échangée avec l'extérieur :

$$\delta U = \delta W + \delta Q, \text{ ou bien, } \Delta U = W + Q$$

- $Q > 0$: la chaleur pénètre dans le système.
- $Q < 0$: le système cède de la chaleur au milieu extérieur.
- $W > 0$: le système reçoit un travail.
- $W < 0$: le système fournit un travail.

Calculons le travail échangé avec le milieu extérieur au cours de la compression de 56g d'azote depuis la pression $P_1 = 1 \text{ atm}$ jusqu'à $P_2 = 20 \text{ atm}$ à la température de 25°C

1- Dans le cas d'une compression réversible.

$$\begin{aligned}W_{rev} &= - \int P_{ext} dV \quad (\text{Transf réversible} \rightarrow P_{ext} = P) \\ &= - \int P dV\end{aligned}$$

On utilise

$$V = \frac{nRT}{P} \rightarrow dV = -nRT \frac{dP}{P^2}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}W_{rev} &= \int_{P_1}^{P_2} nRT \frac{dP}{P}, \\ &= nRT \ln \frac{P_2}{P_1}\end{aligned}$$

AN :

$$W_{rev} = nRT \ln \frac{P_2}{P_1} = \underbrace{\frac{56}{28}}_{=n} \times 8.314 \times (25 + 273) \ln(20) = 14.8 \text{ KJ}$$

2- Dans le cas d'une compression irréversible

P_{ext} = Pression de transformation rapide = 20 atm = P_2 → Le travail est celui de la transformation isobare.

$$W_{irrev} = - \int_{V_1}^{V_2} P_{ext} dV = - \int_{V_1}^{V_2} P_{finale} dV = -P_2(V_2 - V_1) = nRT \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$

AN :

$$W_{irrev} = \frac{56}{28} \times 8.314 \times (25 + 273) \left(\frac{20}{1} - 1 \right) = 94.1 \text{ KJ}$$

Exercice n° 3

Rappel :

Quelques formules utiles dans le cas d'un gaz parfait (à retenir) :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}, \quad C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}, \quad C_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_p - C_v = R$$

Gaz parfait subissant une transformation adiabatique vérifie :

$$PV^\gamma = cste, \quad TV^{\gamma-1} = cste$$

Le travail maximal pour la détente de 2 moles d'azote du volume $V_1 = 10l$ jusqu'au volume $V_2 = 20l$ à la température initiale $\theta = 25^\circ C$.

Le travail produit est maximal lorsque la transformation réversible.

a- Processus isothermique : $dT=0$

$$\delta W = -PdV$$

$$\begin{aligned} W &= - \int_{V_1}^{V_2} PdV \quad \left(\text{on utilise } P = \frac{nRT}{V} \right) \\ &= - \int_{V_1}^{V_2} nRT \frac{dV}{V}, \\ &= nRT \ln \frac{V_1}{V_2} \end{aligned}$$

AN :

$$W = 2 \times 8.314 \times (25 + 273) \ln \frac{10}{20} = -3.434 \text{ KJ}$$

b- Processus adiabatique : $\delta Q = 0$

Le premier Principe donne

$$dU = \delta W = nC_V dT \rightarrow W = nC_V(T_2 - T_1)$$

$$T_1 = \theta = 25^\circ C, \quad T_2 = ?$$

De la loi de Laplace ($TV^{\gamma-1} = cste$), on tire T_2

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$$

$$\gamma = ?$$

On a

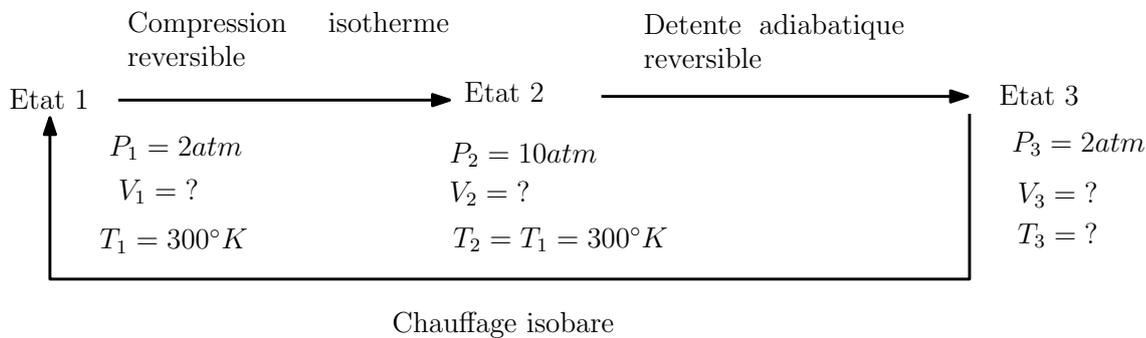
$$\begin{cases} C_p - C_V = R \\ \gamma = \frac{C_p}{C_V} \\ C_V = \frac{5R}{2} \end{cases} \rightarrow C_V(\gamma - 1) = R \rightarrow \gamma - 1 = 0.4$$

AN :

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = (25 + 273) \left(\frac{10}{20} \right)^{0.4} = 226^\circ K$$

$$W = nC_V(T_2 - T_1) = 5 \times 8.134 \times (226 - 25 - 273) = -2.993 \text{ kJ}$$

Exercice n° 4



1- Calcul de V_1 , V_2 , V_3 et T_3

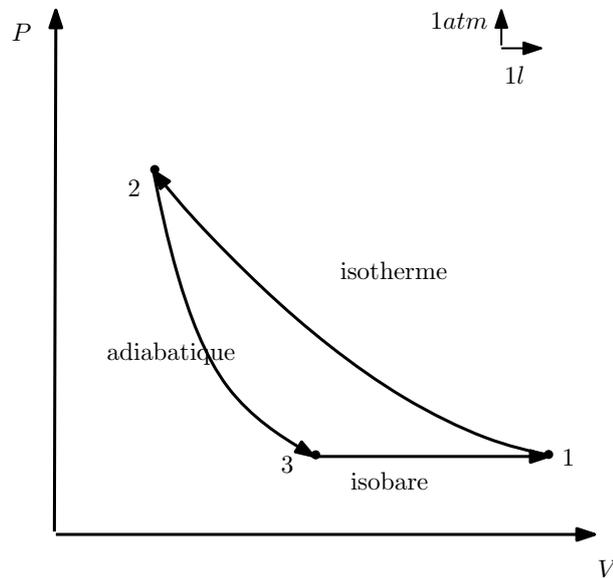
$$P_1 V_1 = nRT_1 \rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = \frac{1 \times 0.082 \times 300}{2} = 12.3 \text{ l}$$

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = 12.3 \times \left(\frac{2}{10} \right) = 2.46 \text{ l}$$

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \rightarrow V_3 = V_2 \left(\frac{P_2}{P_3} \right)^{1/\gamma} = 2.46 \times \left(\frac{10}{2} \right)^{3/5} = 6.46 \text{ l}, \quad \left(\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5R/2}{3R/3} = 5/3 \right)$$

$$P_3 V_3 = nRT_3 \rightarrow T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{2 \times 6.46}{1 \times 0.082} = 157.6^\circ K$$

2- Représentation du cycle de transformations sur un diagramme de clapeyron



3- Calcul des différentes grandeurs :

$$\begin{aligned}
 \text{Transformation } 1 \rightarrow 2 \text{ isotherme } \rightarrow W_{12} &= nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \\
 &= nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) \\
 &= 1 \times 8.31 \times 300 \times \ln(12.3/2.46) = 4014.26 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$U_{12} = W_{12} + Q_{12} = 0 \rightarrow Q_{12} = -4014.26 \text{ J}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Transformation } 2 \rightarrow 3 \text{ adiabatique } \rightarrow U_{23} = W_{32} &= nC_V(T_3 - T_1) \\
 &= 1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (157.6 - 300) = -1775 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Transformation } 3 \rightarrow 1 \text{ isobare } \rightarrow W_{31} &= -P\Delta V = P(V_1 - V_3) \\
 &= -2 \times (12.3 - 6.46) \times 1.013 \times 10^5 \times 10 = -1183.18 \text{ J}
 \end{aligned}$$

$$U_{31} = nC_V(T_3 - T_1) = 1 \times \frac{3}{2} \times 8.31 \times (300 - 157.6) = 1775 \text{ J}$$

$$Q_{31} = U_{31} - W_{31} = 1775 + 1183.18 = 2958.18 \text{ J}$$

Exercice n° 5

Rappel :

Quelques formules utiles dans le cas d'un gaz parfait (à retenir) :

$$\text{Transformation } 1 \rightarrow 2 \text{ isobare} \rightarrow W_{12} = -P_2(V_2 - V_1)$$

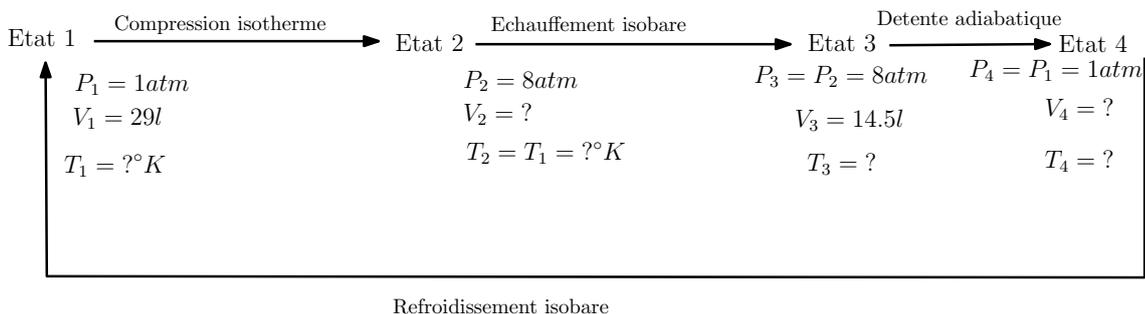
$$\text{Transformation } 1 \rightarrow 2 \text{ isotherme} \rightarrow W_{12} = nRT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$$

$$\text{Transformation } 1 \rightarrow 2 \text{ adiabatique} \rightarrow W_{12} = \frac{P_2V_2 - P_1V_1}{\gamma - 1}$$

La variation de l'énergie interne du gaz parfait est donné (\forall la nature de la transformation $1 \rightarrow 2$)

$$dU = nC_V dT \rightarrow \Delta U = U_2 - U_1 = U_{12} = nC_V(T_2 - T_1)$$

1- Déterminons la pression, le volume et la température du gaz dans chacun des états.



$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{R} = \frac{29}{0.082} = 353.66^\circ \text{ K} = T_2$$

$$V_2 = \frac{RT_2}{P_2} = \frac{0.082 \times 353.66}{8} = 3.625 \text{ l}$$

$$P_2 = P_3 = 8 \text{ atm}$$

$$\frac{T_2}{V_2} = \frac{T_3}{V_3} \rightarrow T_3 = 353.66 \times \frac{14.5}{3.625} = 1414.64 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$P_4 = P_1 = 1 \text{ atm}$$

$$P_3 V_3^\gamma = P_4 V_4^\gamma \rightarrow V_4 = V_3 \left(\frac{P_3}{P_4} \right)^{1/\gamma} = 14.5 \times (8)^{1/1.4} = 64 \text{ l}$$

$$\frac{T_4}{V_4} = \frac{T_1}{V_1} \rightarrow T_4 = 353.66 \times \frac{64}{29} = 780.5 \text{ }^\circ\text{K}$$

TABLE 0.1: Tableau récapitulatif des résultats

ETAT	P(atm)	V(L)	T(K)
1	1	29	353.66K
2	8	3.625	353.66K
3	8	14.5	1414.64
4	1	64	780.5

2- Calcul du rendement thermodynamique

$$\rho = \frac{-W_{cycle}}{Q_{recue}}$$

$$W_{cycle} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41}$$

$$\begin{aligned} \text{Transformation } 1 \rightarrow 2 \text{ isotherme} \rightarrow W_{12} &= nRT_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \\ &= P_1 V_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \\ &= 29 \times 10^{-3} \times 1.013 \times 10^5 \ln(8/1) = 6.1087 \text{ kJ} \end{aligned}$$

$$Q_{12} = -W_{12} = -6.1087 \text{ kJ}$$

Transformation 2 → 3 isobare → $W_{23} = -P_2(V_3 - V_2)$
 $= -8 \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3}(14.5 - 3.625) = -8.8130 \text{ kJ}$

$$Q_{23} = nC_p(T_3 - T_2) = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1}(T_3 - T_2)$$

$$= 8.314 \times 1.4 \times (1414.64 - 353.66)/0.4 = 30.8734 \text{ kJ}$$

Transformation 3 → 4 adiabatique → $W_{34} = \frac{P_4V_4 - P_3V_3}{\gamma - 1}$
 $= 1.013 \times 10^2 \times \frac{64 - 8 \times 14.5}{0.4} = -13.1690 \text{ KJ}$

$$Q_{34} = 0$$

Transformation 4 → 1 isobare → $W_{41} = -P_1(V_1 - V_4)$
 $= 1 \times 1.013 \times 10^5 \times 10^{-3}(29 - 64) = 3.5455 \text{ kJ}$

$$Q_{41} = nC_p(T_1 - T_4) = n \frac{R\gamma}{\gamma - 1}(T_1 - T_4)$$

$$= 8.314 \times 1.4 \times (353.6 - 780.5)/0.4 = -49.68 \text{ kJ}$$

→

$$W_{cycle} = -12.3278 \text{ kJ}$$

Au cours du cycle, l'air reçoit une quantité de chaleur positive pendant l'échauffement isobare (Transformation 2 → 3), puisque $Q_{12} < 0$, $Q_{34} = 0$ et $Q_{41} < 0$

$$Q_{re\grave{c}ue} = Q_{23} = 30.8734 \text{ kJ}$$

d'où

$$\rho = 40\%$$

Le rendement du cycle de Carnot fonctionnant entre les deux température extrême s'écrit

$$\rho_c = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{353.66}{1414.64} = 75\%$$

3- Représentation du cycle dans un diagramme (P, V)

