

Exercices Corrigés

EXERCICE 1 : On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble F défini par :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$$

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Donner une base de F , quelle est sa dimension ?

(3) F est-il égale à $\mathbb{R}^3$?

SOLUTION. (1) :

$$F \text{ est s.e.v} \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \emptyset, \\ \forall X, Y \in F, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda.X + \mu.Y \in F \end{cases}$$

$$- 0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset, \text{ car } 2.0 + 0 - 0 = 0.$$

$$- \forall X = (x, y, z), Y = (x', y', z') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ montrons que :}$$

$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F,$$

$$\text{c'est à dire } (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \in F$$

$$2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z') = \lambda(2x + y - z) + \mu(2x' + y' - z') = \lambda.0 + \mu.0 = 0,$$

car :

$$\begin{cases} (x, y, z) \in F \Rightarrow 2x + y - z = 0, \\ \text{et } (x', y', z') \in F \Rightarrow 2x' + y' - z' = 0. \end{cases}$$

Ainsi $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in F$, F est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Par ailleurs :

- (2) Base de F : soit $X \in F \Leftrightarrow 2x + y - z = 0 \Rightarrow z = 2x + y$,
 $X = (x, y, z) = (x, y, 2x + y) = x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1)$, ainsi
 $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\} = \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, 1) / x, y \in \mathbb{R}\}$.
D'où F est engendré par $\{v_1 = (1, 0, 2), v_2 = (0, 1, 1)\}$, montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 0, 2) + \lambda_2(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2) = (0, 0, 0)$$

d'où le résultat. Alors la dimension de F est égale à 2, car $\{v_1, v_2\}$ est une base (libre et génératrice) de $\mathbb{R}^3$.

- (3) $F \neq \mathbb{R}^3$ car $\dim F = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 1 : On considère dans $\mathbb{R}^3$, le sous ensemble F défini par :

$$F = \{(x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

- (1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
(2) Donner une base de F , quelle est sa dimension ?
(3) F est-il égale à $\mathbb{R}^3$?

SOLUTION. (1) $(0, 0, 0) \in F$ car $(0, 0, 0) = (0 - 0, 2 \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 0, 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \Rightarrow F \neq \emptyset$.

$\forall X, Y \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ montrons que $\lambda X + \mu Y \in F$; on a :

$$X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z),$$

$$Y \in F \Leftrightarrow \exists (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 / Y = (x' - y', 2x' + y' + 4z', 3y' + 2z'),$$

$$\lambda X + \mu Y = ((\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') + 4(\lambda z + \mu z'), 3(\lambda y + \mu y') + 2(\lambda z + \mu z'))$$

$$d'où \exists x'' = \lambda x + \mu x', \exists y'' = \lambda y + \mu y', \exists z'' = \lambda z + \mu z', \text{ ainsi}$$

$$\lambda X + \mu Y = (x'' - y'', 2x'' + y'' + 4z'', 3y'' + 2z'') \in F.$$

- (2) Base de F : soit $X \in F \Leftrightarrow \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z)$,
 $X = (x - y, 2x + y + 4z, 3y + 2z) = x(1, 2, 0) + y(-1, 1, 3) + y(0, 4, 2)$, ainsi

$$F = \{x(1, 2, 0) + y(-1, 1, 3) + y(0, 4, 2) / x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

D'où F est engendré par $\{v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (-1, 1, 3), v_3 = (0, 4, 2)\}$, montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 2, 0) + \lambda_2(-1, 1, 3) + \lambda_3(0, 4, 2) = (0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3, 3\lambda_2 + 2\lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2, \\ 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3, \end{cases} \Rightarrow 2\lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

d'où le résultat. Alors la dimension de F est égale à 3, car $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base (libre et génératrice) de $\mathbb{R}^3$.

(3) $F = \mathbb{R}^3$ car $\dim F = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2 : On considère dans $\mathbb{R}^4$, le sous ensemble F défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0) \wedge (y + t = 0)\}$$

(1) Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(2) Donner une base de F , déduire sa dimension.

SOLUTION. (1) $(0, 0, 0, 0) \in F \Rightarrow F \neq \emptyset$, car $(0 + 0 = 0) \wedge (0 + 0 = 0)$.
 $\forall X = (x, y, z, t), Y = (x', y', z', t') \in F, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ montrons que :

$$\lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F,$$

$$\text{c'est à dire } (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z', \lambda t + \mu t') \in F$$

$$\begin{cases} X \in F \Rightarrow (x + z = 0) \wedge (y + t = 0) \\ Y \in F \Rightarrow (x' + z' = 0) \wedge (y' + t' = 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(x + z) = 0 \wedge \mu(x' + z') = 0 \Rightarrow \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0 \\ \wedge \\ \lambda(y + t) = 0 \wedge \mu(y' + t') = 0 \Rightarrow \lambda y + \mu y' + \lambda t + \mu t' = 0 \end{cases}$$

$$\text{ainsi } \lambda x + \mu x' + \lambda z + \mu z' = 0 \wedge \lambda y + \mu y' + \lambda t + \mu t' = 0 \text{ c'est dire } \lambda(x, y, z, t) + \mu(x', y', z', t') \in F \text{ d'où le résultat.}$$

(2) Base de F : soit $X \in F \Leftrightarrow x = -z \wedge y = -t$,

$$X = (x, y, z, t) = (x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1), \text{ ainsi}$$

$$F = \{x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

D'où F est engendré par $\{v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (0, 1, 0, -1)\}$, montrons que cette famille est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 0, -1, 0) + \lambda_2(0, 1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_2) = (0, 0, 0, 0)$$

d'où le résultat. Alors la dimension de F est égale à 2, car $\{v_1, v_2\}$ est une base (libre et génératrice) de F .

REMARQUE C'est un exemple de l'intersection de deux s.e.v est un s.e.v on pouvait l'écrire sous cette forme $F = F_1 \cap F_2$ où

$$F_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (x + z = 0)\},$$

$$F_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / (y + t = 0)\}.$$

est montrer que F_1, F_2 sont des s.e.v de $\mathbb{R}^4$.

EXERCICE 4 : (1) Montrer que la famille $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

(2) quelle sont les famille libre parmi les familles suivantes : $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$,
 $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$.

(3) Montrer que la famille $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$,
et que la famille $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

SOLUTION.

(1) La famille $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si

$$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} / X = \lambda(1, 2) + \mu(-1, 1).$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$(x, y) = \lambda(1, 2) + \mu(-1, 1) = (\lambda - \mu, 2\lambda + \mu)$$

ainsi

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu, & \dots (1) \\ y = 2\lambda + \mu, & \dots (2) \end{cases} \quad (1) + (2) \Rightarrow \lambda = \frac{x+y}{3} \text{ et } \mu = \frac{-2x+y}{3}$$

d'où cette famille est génératrice.

(2) quelle sont les famille libre parmi les familles suivantes : $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$,
 $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$.

i) $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est libre si et seulement si

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}, \lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

$$\lambda_1(1, 1, 0) + \lambda_2(1, 0, 0) + \lambda_3(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

F_1 est libre.

ii) $F_2 = \{(0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (2, 1, 1, 0)\}$ n'est pas libre car

$$\exists \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1 \in \mathbb{R}, \lambda_1(0, 1, 1, 0) + \lambda_2(1, 1, 1, 0) + \lambda_3(2, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0).$$

(3) La famille $\{(1, 2), (-1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$, car quand le nombre de vecteurs = 2 = dim $\mathbb{R}^2$ il suffit de montrer qu'elle est soit génératrice ou bien libre pour qu'elle puisse être une base or d'après la question (1) elle est génératrice d'où le résultat.
La famille $F_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$, car le cardinale de F_1 est égale à 3 = dim $\mathbb{R}^3$ et F_1 étant libre, alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 5: Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x + y, x - y).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Déterminer $\ker f$, et $\text{Im} f$ et donner leurs dimensions, f est-elle bijective ?

(3) Déterminer $f \circ f$.

SOLUTION. (1) f est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\
&= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y') \\
&= (\alpha x + \alpha y, \alpha x - \alpha y) + (\beta x' + \beta y', \beta x' - \beta y') \\
&= \alpha(x + y, x - y) + \beta(x' + y', x' - y') \\
&= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')
\end{aligned}$$

d'où f est linéaire.

(2) Déterminons $\ker f$, et $\text{Im} f$ et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

$$\begin{aligned}
\ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0 \wedge x - y = 0\} \\
&= \{(0, 0)\}
\end{aligned}$$

ainsi $\dim \ker f = 0$.

$$\begin{aligned}
\text{Im} f &= \{(x + y, x - y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \{x(1, 1) + y(1, -1) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im} f$ est engendré par deux vecteur qui sont libre, alors $\dim \text{Im} f = 2$.

Sachant que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée f est bijective si elle est soit injective ou bien surjective or f est injective car $\ker f = \{(0, 0)\}$ et aussi surjective car $\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im} f = 2$ c'est à dire $\text{Im} f = \mathbb{R}^2$.

(3) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\begin{aligned}
f \circ f(x, y) &= f(f(x, y)) = f(x + y, x - y) \\
&= ((x + y) + (x - y), (x + y) - (x - y)) \\
&= (2x, 2y) = 2(x, y) = 2\text{Id}_{\mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

EXERCICE 6 : Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (2x - 4y, x - 2y).$$

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Déterminer $\ker f$, et $\text{Im} f$ et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

SOLUTION. (1) f est linéaire si et seulement si

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2; f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) = \alpha f(x, y) + \beta f(x', y').$$

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x, y) + \beta(x', y')) &= f(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \\
&= (2\alpha x + 2\beta x' - 4\alpha y - 4\beta y', \alpha x + \beta x' - 2\alpha y - 2\beta y') \\
&= (2\alpha x - 4\alpha y, \alpha x - 2\alpha y) + (2\beta x' - 4\beta y', \beta x' - 2\beta y') \\
&= \alpha(2x - 4y, x - 2y) + \beta(2x' - 4y', x' - 2y') \\
&= \alpha f(x, y) + \beta f(x', y')
\end{aligned}$$

d'où f est linéaire.

- (2) Déterminons $\ker f$, et $\operatorname{Im} f$ et donner leurs dimensions, f est-elle bijectives ?

$$\begin{aligned}\ker f &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 4y = 0 \wedge x - 2y = 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2y\} \\ &= \{(2y, y) / y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2, 1) / y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

ainsi $\ker f$ est engendré par le vecteur $(2, 1) \neq 0$, ainsi $\dim \ker f = 1$, f , alors n'est pas injective.

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} f &= \{(2x - 4y, x - 2y) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(2, 1) + y(-4, -2) / (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.\end{aligned}$$

Ainsi $\operatorname{Im} f$ est engendré par deux vecteur qui ne sont pas libre car $(-4, -2) = -2(2, 1)$ alors $\dim \operatorname{Im} f = 1$ on peut aussi utiliser le fait que la dimension de l'ensemble de départ est égale à la dimension de l'ensemble d'arrivée f , alors $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^2, \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2 - 1 = 1$.

- (3) f n'est pas bijective car il n'est ni injective ni surjective.