Corrigé TD1 - Algèbre 2.
(Suite).

1/. Exercice 3: $E_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2\}$ et $E_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2\}$ s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

- **$E_1 \cap E_2$ s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?.**

Il est facile de vérifier que: $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

a/ $0_{\mathbb{R}^2} \in (E_1 \cap E_2) \Longrightarrow (E_1 \cap E_2) \neq \phi$.

b/ $\forall X, Y \in (E_1 \cap E_2)$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha . X + \beta . Y \in (E_1 \cap E_2)$?.

En effet: $\left.\begin{array}{l} X \in (E_1 \cap E_2) \Longleftrightarrow X = 0_{\mathbb{R}^2} \\ Y \in (E_1 \cap E_2) \Longleftrightarrow Y = 0_{\mathbb{R}^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha . X + \beta . Y = \alpha . 0_{\mathbb{R}^2} + \beta . 0_{\mathbb{R}^2}$

$= 0_{\mathbb{R}^2} \in (E_1 \cap E_2)$.

Donc $(E_1 \cap E_2)$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

- **$E_1 \cup E_2$ s.e.v de $\mathbb{R}^2$?.**

$(E_1 \cup E_2)$ n'est pas un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ Car (par exemple)

On choisit $u_1 = (1,0) \in (E_1 \cup E_2)$ Car $u_1 \in E_1$.

et $u_2 = (0,1) \in (E_1 \cup E_2)$ Car $u_2 \in E_2$.

mais $u_1 + u_2 = (1,1) \notin (E_1 \cup E_2)$.

- $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$ Car $E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ / E_1 et E_2 Sont Supplémentaires.

2/ Exercice 5: $f^{-1} = ?$.

$\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2$, $(X,Y) = f(x,y) \Longleftrightarrow \exists ! (x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) = f^{-1}(X,Y)$.

$(X,Y) = f(x,y) \Longleftrightarrow (X,Y) = (x-y, x+y)$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} X = x - y \\ Y = x + y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(X+Y) \\ y = \frac{1}{2}(Y-X) \end{cases}$

Donc: $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

$(x,y) \longmapsto f^{-1}(x,y) = \left(\frac{1}{2}(x+y), -\frac{1}{2}(x-y)\right)$.

3/ Exercice 7: $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$.

$f(x,y,z) = f(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = x . f(1,0,0) + y . f(0,1,0) + z . f(0,0,1)$.

$\rightarrow f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \longmapsto f(x,y,z) = (x + 2y - z, -x + 3y + 2z)$.