Université A/MIRA de Béjaia Faculté : ST Départements : G.C et ELN .	Tasdawit n'Bgayet Université de Bejaia	Année : 2015-2016 TD de Maths 3 : Série №2.

Exercice 1 :

-Résoudre les équations aux dérivées partielles suivantes :

1)$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2.$

2)$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-3$

3)$2\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}-3\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=5$

-Donner la forme de la solution $f(x,y)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2}=9\dfrac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} \\ f(t,0)=0 \\ f(t,2)=0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

1) Étudier la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

2) Calculer cette intégrale.

Exercice 3 :

-En discutant suivant les valeurs de x ($x\in\mathbb{R}$), étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 0} e^{-nx}$ 2) $\sum_{n\geq 0} \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$.

-Calculer les sommes suivantes :

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-2}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+2}$.

solutions :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2 \tag{1}$$

Afin de résoudre l'équation (1), on pose

$$\begin{cases} u = x + y & (3) \\ v = x - y & (4) \end{cases}$$

(3)+(4) entrainent $x = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v \qquad (5).$

(3)-(4) entrainent $y = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v \qquad (6).$

Avec ce changement de variable, la fonction $f(x, y)$ (solution de (1)) devient une fonction composée, dépend explicitement de x et y et implicitement de u et v, c-à-d :

$$f(x, y) = f\left(x(u, v), y(u, v)\right).$$

La formule de la dérivée d'une fonction composée, en utilisant (5) et (6), permet d'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=2 \text{ (d'après (1))}} = 1.$$

D'où

$\frac{\partial f}{\partial u} = 1 \Longrightarrow f(u, v) = \int 1du = u + c(v)$. ($c(v)$ désigne la constante d'intégration ou fonction quelconque dépend de la variable v.)

En fin, les solutions de l'équation (1) s'écrivent sous cette forme :

$\boxed{f(x, y) = x + y + c(x - y)}$, où c est une fonction quelconque de variable réelle.

2)Se fait de la même manière.

3) (la troisième équation)

$$2\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} - 3\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 5 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - > (8)$$

Afin de résoudre l'équation (8), on pose

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y & (9) \\ \\ v = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y & (10) \end{cases}$$

(9)+(10) entrainent $x = u + v \qquad (11).$

(9)-(10) entrainent $y = \frac{3}{2}u - \frac{3}{2}v \qquad (12).$

De même,

$$f(x, y) = f\left(x(u, v), y(u, v)\right).$$

La formule de la dérivée d'une fonction composée, en utilisant (11) et (12), permet d'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{=5 \text{ (d'après (1))}} = \frac{5}{2}.$$

D'où

$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{5}{2} \Longrightarrow f(u,v) = \int \frac{5}{2} dv = \frac{5}{2}v + c(u)$. ($c(u)$ désigne la constante d'intégration ou fonction quelconque dépend de la variable u.)

En fin, les solutions de l'équation (1) s'écrivent sous cette forme :

$$\boxed{f(x,y) = \frac{5}{2}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y) + c(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)},$$ où c est une fonction quelconque de variable réelle.

On passe maintenant à la résolution de l'équation de la corde vibrante.

Chercher la forme de la solution $f(x,y)$ vérifiant :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} = 9\dfrac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} & (1) \\ f(t,0) = 0 & (2) \\ f(t,2) = 0 & (3) \end{cases}$$

Nous allons chercher la solution non nulle $f(x,y)$ sous la forme de variables séparées :

$$f(t,x) = p(t)q(x) \qquad (6)$$

En utilisant (6)

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial t^2} = p''(t)q(x), \qquad (7)$$

$$\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = q''(x)p(t), \qquad (8)$$

Portons (7) et (8) dans l'équation (1), on obtient :

$$p''(t)q(x) = 9q''(x)p(t)$$

C-à-d :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ : \ \frac{p''(t)}{p(t)} = 9\frac{q''(x)}{q(x)} \qquad (9)$$

Vous regardez bien l'équation (9), l'expression de coté gauche dépend que de t et celle de droit dépend que de x.

L'équation (9) est vraie si et seulement si $\frac{p''(t)}{p(t)} = 9\frac{q''(x)}{q(x)} = \lambda$(constante).

Cela veut dire, revient à résoudre les équations différentielles ordinaires (deuxième degré) suivantes :

$$p''(t) = \lambda p(t). \qquad (10)$$

et

$$q''(x) = \frac{\lambda}{9} q(x). \qquad (11).$$

Deux cas possibles : $\lambda < 0$, $\lambda > 0$.

Nous abordons le cas $\underline{\ \lambda < 0}$

Dans cette situation, λ s'écrit sous la forme :

$$\lambda = -a, \quad \text{avec} \quad a > 0.$$

Les solutions générales de (10) et (11) s'écrivent sous la forme :

$$p(t) = A\cos(\sqrt{a})t + B\sin(\sqrt{a})t \qquad (12)$$

$$q(x) = C\cos\frac{\sqrt{a}}{3}x + D\sin\frac{\sqrt{a}}{3}x \qquad (13)$$

En utilisant (6), (12) et (13), la solution générale de l'équation (1) est donnée par :

$f(t,x) = (A\cos(\sqrt{a})t + B\sin(\sqrt{a})t)\left(C\cos\frac{\sqrt{a}}{3}x + D\sin\frac{\sqrt{a}}{3}x\right)$, où A, B, C et D des constantes à déterminer en utilisant des conditions aux limites .

L'équation (2) entraine :

$$C\left(A\cos(\sqrt{a})t + B\sin(\sqrt{a})t\right) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}).$$

C'est à dire

$$C = 0 \qquad (14)$$

L'équation (3) entraine :

$$\left(A\cos(\sqrt{a})t + B\sin(\sqrt{a})t\right)\left(C\cos 2\frac{\sqrt{a}}{3} + D\sin 2\frac{\sqrt{a}}{3}\right) = 0 \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \qquad (15)$$

En tenant compte de (14)

$$(15) \Longleftrightarrow D\sin 2\frac{\sqrt{a}}{3} = 0$$

Comme $D \neq 0$, car par hypothèse on cherche $f(t,x) \neq 0$, forcément :

$$\sin 2\frac{\sqrt{a}}{3} = 0 \Longleftrightarrow 2\frac{\sqrt{a}}{3} = k\pi, \quad \text{où} \quad k = 1, 2, 3, ...$$

$$\sqrt{a} = \frac{3}{2}k\pi \text{ constantes arbitrires} \tag{16}$$

Les constantes d'intégration A , B et D sont des fonctions de k pour cela, un mode de solution de l'équation (1) possède la forme :

$$f_k(t,x) = \left(A_k \cos(\frac{k\pi}{2})t + B_k \sin(\frac{k\pi}{2})t\right) D_k \sin \frac{\sqrt{k\pi}}{2}x$$

A_k, B_k et D_k signifies les valeurs de A, B et D pour une valeur de k. C'est à dire, A_1 est la valeur de A pour $k = 1$, A_2 est la valeur de A pour $k = 2$ ainsi de suite....
De même pour les constantes B_k et D_k.
L'équation (1) étant linéaire, la solution générale s'écrira comme une combinaison linéaire de tous les modes, c'est à dire la solution générale devient sous cette forme

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(A_k \cos(\frac{k\pi}{2})t + B_k \sin(\frac{k\pi}{2})t\right) D_k \sin \frac{\sqrt{k\pi}}{2}x$$

Pour simplifier, on pose $A_kD_k = a_k$ et $B_kD_k = b_k$ on écrit :

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos(\frac{k\pi}{2})t + b_k \sin(\frac{k\pi}{2})t\right) \sin \frac{\sqrt{k\pi}}{2}x$$

L'expression de la solution $f(t,x)$ est une série de Fourier. Nous y reviendrons plus tard.

Exercice 2 :

En utilisant la définition de l'intégrale impropre et la propriété de l'intégrale d'une fonction pair

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{l \longrightarrow +\infty} \int_{-l}^{+l} e^{-x^2}dx = \lim_{l \longrightarrow +\infty} 2\int_{0}^{+l} e^{-x^2}dx = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

Nous allons étudier $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

On a :

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \underbrace{\int_{0}^{1} e^{-x^2}dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{1}^{+\infty} e^{-x^2}dx}_{I_2}$$

I_1 est une intégrale définie (elle converge). On étudie la nature de I_2 en utilisant le critère de comparaison.

On a :

$$\forall x \in [1, \quad +\infty[: x^2 \geq x$$

Par conséquent,

$$\forall x \in [1, \quad +\infty[: e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{l \longrightarrow +\infty} \int_1^{+l} e^{-x} dx = \lim_{l \longrightarrow +\infty} \left[-e^{-x}\right]_1^l = \lim_{l \longrightarrow +\infty} (-e^{-l} + e^{-1}) = e^{-1}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ est convergente, par comparaison il en est de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

En résumé : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente, par conséquent :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente.

Calculons cette intégrale impropre :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

Considérons l'intégrale double suivante :

$$J = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy,$$

.

où $D = \{(x, y) \text{ tel que } -\infty \leq x \leq +\infty, \quad -\infty \leq y \leq +\infty\}$. D représente le plan (oxy), peut être considéré comme étant un disque de centre $(0, 0)$ et de rayon r.
En coordonnées polaires il s'exprime ainsi

$$D = \{(r, \theta) \text{ tel que } 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq +\infty\}$$

En posant, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

$$J = \underbrace{\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy}_{\text{en coordonnées cartésienne}} = \underbrace{\iint_D re^{-r^2} drd\theta}_{\text{en coordonnées polaire}}.$$

D'une part,

$$J = \iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy\right] dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy\right] dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right] dx$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy\right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right]$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 -----> (1)$$

D'autre part,

$$J = \iint_D re^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{+\infty} re^{-r^2} dr \right] d\theta.$$

$$= \frac{-1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$J = \pi - - - - - - - - - - - - - - - - - - -- > (2)$$

De (1) et (2), on obtient :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \pi.$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$