

Série d'exercices

Exercice 1

Six individus sont mesurés par trois variables. Les résultats sont données dans le tableau  $X$  suivant :

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

On munit  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^6$  des métriques usuelles  $I_3$  et  $I_6$  respectivement.

On note par  $\underline{X}_i$  la  $i$ ème ligne du tableau  $X$  et par  $\underline{X}^j$  la  $j$ ème colonne pour  $i = \overline{1, 3}$  et  $j = \overline{1, 6}$

1- Calculer les normes de  ${}^t\underline{X}_i$  et  $\underline{X}^j$ .

On effectue une AFG du tableau de  $X$ .

2- Donner la dimension du nouveau tableau réduit noté  $Y$ .

3- Donner  $Y$ .

Exercice 2

Trois caractères ont été mesurés sur six plantes aquatiques, les résultats obtenus sont donnés ci-après

$$X = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \\ 5 & 8 & 8 \\ 9 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Sur quel espace il est préférable de se placer pour effectuer une ACP du tableau  $X$ ?
2. Donner la matrice à diagonaliser, lorsqu'on se place sur l'espace choisi.
3. Que représente cette matrice notée  $V$ ?
4. Vérifier que les vecteurs  $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont deux vecteurs propres associés aux deux valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $V$ .
5. Endéduire la troisième valeur propre.
6. Donner le tableau réduit et sa dimension.

7. Interpréter et conclure.

Exercice 3

Etude des critères de performances des micros portables décrits par six variables. Les résultats de l'ACP normée sont donnés si après

Tab.1 : Matrice de données

	CPU	DD	RAM	CG	DVB	ECR
HP	1.86	160	2	256	180	15.4
Toshiba	1.6	120	2	256	180	15.4
Acer	1.5	80	1	64	120	15.4
Samsung	1.8	250	2	512	180	17
Sony	2	250	3	1024	240	17
Ibm	1.73	140	1	128	180	15
Siemens	1.63	120	1	128	120	15
Zala	1.4	80	1	64	90	14

Tab.2 : Matrice des corrélations

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8775 & 0.79102 & 0.81598 & 0.95583 & 0.77402 \\ & 1 & 0.79764 & 0.88341 & 0.85792 & 0.90232 \\ & & 1 & 0.87067 & 0.81969 & 0.78633 \\ & & & 1 & 0.83684 & 0.83553 \\ & & & & 1 & 0.79321 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

valeurs propres : 5.201, 0.31044, 0.25509, 0.1262, 0.073959, 0.033343

Tab.3 : Projections des Micro-portables, contributions absolues et relatives

Micro-port	Proj	$C_a(1,2)$ (%)	$C_r(1,2)$ (%)
HP	(0.7238, 0.7129)	21.72	81.08
Toshiba	(-0.4862, -0.2045)	02.25	29.77
Acer	(-1.8172, -0.4092)	14.68	90.96
Samsung	(2.1012, -0.6361)	26.90	86.96
Sony	(4.2101, -0.1100)	43.08	97.75
Ibm	(-0.5204, 0.9556)	37.42	79.37
Siemens	(-1.3757, 0.0430)	04.62	89.37
Zala	(-2.8356, -0.3516)	24.30	94.07

Tab.4 : Projections des caractéristiques, contributions absolues et relatives

caractéristiques	Proj	$C_a(1,2)$ (%)	$C_r(1,2)$ (%)
CPU	(0.9342, 0.3272)	51.27	97.99
DD	(0.9527, -0.0720)	19.12	91.21
RAM	(0.9058, -0.1198)	20.40	83.49
CG	(0.9385, -0.1568)	24.86	90.55
DVB	(0.9428, 0.2873)	43.69	97.15
ECR	(0.9110, -0.2769)	40.65	90.66

Questions

1. Donnez l'espace des individus et l'espace des variables.
2. Interpréter le tableau 2.

3. Sur quel espace il est préférable de se placer? Donnez l'expression matricielle de la matrice à diagonaliser, sa dimension et sa trace.
4. Quelle sera la dimension du nouveau tableau réduit. Expliquer.
5. Donnez les moyennes et les variances des nouvelles variables.
6. Donner les deux vecteurs propres associés aux deux plus grandes valeurs propres.
7. Donnez les corrélations entre les variables initiales et les deux nouvelles variables. Tracez le cercle des corrélations.
8. Interpretez les résultats de cette analyse. Conclure.

**Exercice 4.**

On a rassemblé les résultats de 15 enfants de 10 ans à 6 subtests du WISC (scores 0 à 5). Les variables observées sont : CUB (Cubes de Kohs), PUZ (Assemblage d'objets), CAL (Calcul mental), MEM (Mémoire immédiate des chiffres), COM (Compréhension de phrases), VOC (Vocabulaire). Le protocole observé est le suivant :

WISC	CUB	PUZ	CAL	MEM	COM	VOC
I1	5	5	4	0	1	1
I2	4	3	3	2	2	1
I3	2	1	2	3	2	2
I4	5	3	5	3	4	3
I5	4	4	3	2	3	2
I6	2	0	1	3	1	1
I7	3	3	4	2	4	4
I8	1	2	1	4	3	3
I9	0	1	0	3	1	0
I10	2	0	1	3	1	0
I11	1	2	1	1	0	1
I12	4	2	4	2	1	2
I13	3	2	3	3	2	3
I14	1	0	0	3	2	2

On traite ces données par une analyse en composantes principales normée.

Les principaux résultats de cette ACP sont indiqués ci-dessous :

Corrélations

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,7320 & 0,9207 & -0,4491 & 0,3086 & 0,2735 \\ 0,7320 & 1 & 0,7510 & -0,6143 & 0,2814 & 0,2850 \\ 0,9207 & 0,7510 & 1 & -0,3685 & 0,4077 & 0,4869 \\ -0,4491 & -0,6143 & -0,3685 & 1 & 0,3032 & 0,2023 \\ 0,3086 & 0,2814 & 0,4077 & 0,3032 & 1 & 0,7819 \\ 0,2735 & 0,2850 & 0,4869 & 0,2023 & 0,7819 & 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres : 3,2581 ; 1,8372 ; 0,4430 ; 0,2538 ; 0,1679 ; 0,0400

Inds	Proj1	Proj2	$C_a^1$ %	$C_a^2$ %	$C_r^1$	$C_r^2$
I1	-2,5616	3,0568	13,43	33,91	0,4078	0,5807
I2	-0,9661	0,9370	1,91	3,19	0,3907	0,3676
I3	0,6765	-0,6624	0,94	1,59	0,4446	0,4263
I4	-2,7969	-1,4636	16,01	7,77	0,7160	0,1961
I5	-1,8423	0,1211	0,05	6,95	0,8142	0,0035
I6	1,8891	0,1350	7,30	0,07	0,8426	0,0043
I7	-2,3396	-1,5487	11,20	8,70	0,6028	0,2641
I8	0,7275	-2,2054	1,08	17,65	0,0816	0,7499
I9	2,8400	0,5423	16,50	1,07	0,8745	0,0319
I10	2,1733	0,6117	9,66	1,36	0,7433	0,0589
I11	1,2940	2,0373	3,43	15,06	0,2256	0,5592
I12	-0,9947	0,8181	2,02	2,43	0,3120	0,2110
I13	-0,6099	-0,8730	0,76	2,77	0,1949	0,3994
I14	2,0150	-0,9470	8,31	3,25	0,7548	0,1667
I15	0,4957	-0,5591	0,50	1,13	0,1151	0,1464

Vars	Proj1	Proj2	$C_a^1$ %	$C_a^2$ %
CUB	-0,8970	0,2018	0,25	0,02
PUZ	-0,8652	0,2883	0,23	0,05
CAL	-0,9458	0,0390	0,27	0,00
MEM	0,4449	-0,7861	0,06	0,34
COM	-0,5382	-0,7627	0,09	0,32
VOC	-0,5683	-0,7156	0,10	0,28

Questions

1. Donnez l'espace des individus et l'espace des variables.
2. Sur quel espace il est préférable de se placer? Donnez l'expression matricielle de la matrice à diagonaliser, sa dimension et sa trace.
3. Quelle sera la dimension du nouveau tableau réduit. Expliquer.
4. Donnez les moyennes et les variances des nouvelles variables.
5. Donner les deux vecteurs propres associés aux deux plus grandes valeurs propres.
6. Donnez les corrélations entre les variables initiales et les deux nouvelles variables. Tracez le cercle des corrélations.
7. Interpretez les résultats de cette analyse. Conclure