Série de TD N°02

Méthode du Point Fixe et Méthode de Newton-Raphson

Exercice 01 :

Reprenant l'exercice 1 de la première série, et soit à résoudre l'équation $F_2(x)=0,\ x\in[0,1]$ telle que $F_2(x)=xe^x-\frac{1}{2}$.

1. Montrer que $F_2(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)=\frac{1}{2}e^{-x},\ x\in[0,1]$.
2. Vérifier la satisfaction des conditions de convergence de la méthode du point fixe (avec $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$).
3. En partant de $x_0=0$, déterminer le nombre maximum n d'itérations avec la méthode du point fixe, pour que l'erreur absolue $|\alpha_2-x_n|$ soit inférieure à la précision $\varepsilon=10^{-6}$.
4. En partant de $x_0=0$, déterminer les cinq premiers itérés avec la méthode du point fixe *(prendre quatre chiffres après la virgule).*

Exercice 02 :

Soit l'équation non linéaire $f(x)=e^x-x^2=0,\ x\in\mathbb{R}$. On cherche la solution approchée de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $I_1=\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ par la méthode du point fixe, en prenant $x_0=-0.8$ et une précision $\varepsilon_n=10^{-3}$. On propose les trois fonctions suivantes :

1. $g_1(x)=2\ln x$
2. $g_2(x)=\pm\sqrt{e^x}$
3. $g_3(x)=x+x^2-e^x$

- Calculer la solution approchée de l'équation $f(x)=0$.

Exercice 03 :

Reprenant l'exercice 1 de la première série, et soit à résoudre l'équation $F_3(x)=0,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{5}\right]$ telle que $F_3(x)=\cos(2x)-x$.

1. Pour $x_0=0.6$, écrire la suite de Newton-Raphson.
2. Vérifier la satisfaction des conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson.
3. En partant de $x_0=0.6$, déterminer par la méthode de Newton-Raphson la valeur approchée x_n de α_3 , qui vérifie $|F_n(x)|\le 10^{-3}$ (*prendre quatre chiffres après la virgule*).

Exercice 04 :

Soit l'équation non linéaire suivante : $F(x) = -x^4 + 2x + 3$ définie dans l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

1. Montrer que la fonction F admet une unique racine dans l'intervalle I.
2. Ecrire la suite de Newton pour $x_0 = 2$.
3. Calculer les trois premières itérations.

Exercices supplémentaires

Exercice 5 :

Soit l'équation non linéaire $f(x) = x^2 - 3$ dont la solution est $\sqrt{3}$. On cherche à résoudre l'équation dans l'intervalle $I_1 = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ par la méthode du point fixe. Pour cela, on pose $g(x) = x - \rho(x^2 - 3)$.

1. Pour quelles valeurs de ρ la méthode du point fixe converge ?
2. Calculer $g'(\sqrt{3})$, que peut-on conclure ?
3. Pour une valeur de $\rho = \frac{1}{5}$,
   a) Quel type de convergence selon le théorème d'Ostrrowski ?
   b) Calculer les trois premières itérations, pour $x_0 = \frac{3}{2}$.

Exercice 6:

Soit l'équation non linéaire suivante $F(x) = \cos(x) - e^x = 0$. En utilisant la méthode de Newton-Raphson, calculer la racine approchée x_3 dans l'intervalle $I = \left[-\frac{3}{2}, -1\right]$ ou x est donné en radian, ainsi la précision ε_3 en prenant $x_0 = -\frac{3}{2}$.

Solution de la série de TD N°02

Solution de l'exercice 01 :

Reprenant l'exercice 1 de la série 1, et soit à résoudre l'équation $F_2(x)=0, x\in[0,1]$ telle que $F_2(x)=xe^x-\frac{1}{2}$.

D'après la solution de l'exercice 1 de la série 1, on a montré que : $\exists!\alpha_2\in[0,1]$ tel que $F_2(\alpha_2)=0$

1. Montrer que $F_2(x)=0 \Leftrightarrow x=g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}, x\in[0,1]$

$$F_2(x)=0 \Rightarrow xe^x-\frac{1}{2}=0$$
$$\Rightarrow xe^x=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2e^x}$$
$$\Rightarrow x=g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}, x\in[0,1]$$

2. Vérifier la satisfaction des conditions de convergence de la méthode du point fixe (avec $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$).

a) $g(x)$ est stable si et seulement si $\forall x\in[0,1], g(x)\in[0,1]$

- $g(x)=\frac{1}{2}e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
- $g'(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}<0,\ \forall x\in[0,1]$ donc g est décroissante sur [0,1].
- $g([0,1])=[g(1),g(0)]=[0.18394, 0.5]$.

Donc $\forall x\in[0,1], g(x)\in[0,1]$, par conséquent g est stable sur [0,1].

b) g est contractante si et seulement si $\exists k\in]0,1[, |g'(x)|\le k<1, \forall x\in[0,1]$.

- $g'(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}<0,\ \forall x\in[0,1] \Rightarrow |g'(x)|=-g'(x)=\frac{1}{2}e^{-x}, \forall x\in[0,1]$.
- $|g'(x)|=\frac{1}{2}e^{-x}$ est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $-g''(x)$ telle que.
- $-g''(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}<0$, donc $|g'(x)|$ est décroissante sur [0,1], elle atteint son maximum au point

$x=0$, alors $|g'(x)| \le |g'(0)| = \frac{1}{2}, \forall x \in [0,1]$.

Il existe $k=\frac{1}{2} \in]0,1[, |g'(x)| \le k, \forall x \in [0,1]$. Par conséquent g est contractante sur $[0,1]$.

3. Déterminer le nombre maximum *n* d'itérations avec la méthode du point fixe, pour que l'erreur absolue $|\alpha_2 - x_n|$ soit inférieure à la précision $\varepsilon = 10^{-6}$.

A l'étape *n* de l'algorithme du point fixe, l'erreur absolue $\Delta_n = \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$

$$\frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{2}-0\right| < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < 10^{-6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^6}$$

$$\Rightarrow 2^n > 10^6$$

$$\Rightarrow n\ln(2) > \ln(10^6)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(10^6)}{\ln(2)}$$

$$\Rightarrow n > 19.9316$$

Donc, il faut réaliser 20 itérations au maximum pour atteindre la précision de 10^{-6}.

4. En partant de $x_0 = 0$, déterminer les cinq premier itérés avec la méthode du point fixe.

On a : $x_0 = 0$

$x_1 = g(x_0) = 0.5000;$

$x_2 = g(x_1) = 0.3032;$

$x_3 = g(x_2) = 0.3692;$

$x_4 = g(x_3) = 0.3456;$

$x_5 = g(x_4) = 0.3538;$

Solution de l'exercice 2 :

Soit l'équation non linéaire $f(x) = e^x - x^2 = 0,\ x \in \mathbb{R}$. On cherche la solution approchée de l'équation $f(x)=0$ dans l'intervalle $I_1 = \left[-1, \frac{-1}{2}\right]$ par la méthode du point fixe, en prenant $x_0 = -0.8$ et une précision $\varepsilon_n = 10^{-3}$. On propose les trois fonctions suivantes :

1. $g_1(x) = 2\ln x$
2. $g_2(x) = \pm\sqrt{e^x}$
3. $g_3(x) = x + x^2 - e^x$

- Calculer la solution approchée de l'équation $f(x)=0$.

1. Choix de la fonction g qui satisfait les conditions de convergence de la méthode du point fixe :

Afin qu'on puisse appliquer la méthode du point, c'est-à-dire :

- $g\left(\left[-1,\frac{-1}{2}\right]\right)\subset\left[-1,\frac{-1}{2}\right],\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$
- $g(x)$ est contractante $\Leftrightarrow \max\limits_{x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]}\left|g'(x)\right|<1,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

a) $g_1(x)=2\ln|x|$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$,

$g_1'(x)=\frac{2}{|x|}=-\frac{2}{x}>0,\left(|x|=-x,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]\right)$, donc g_1 est croissante sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$,

$g_1\left(\left[-1,\frac{-1}{2}\right]\right)=\left[g_1(-1),g_1\left(\frac{-1}{2}\right)\right]=[0,]$

alors $\left|g_1'(x)\right|=g_1'(x),\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$

$\left|g_1'\right|$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ et $\left(\left|g_1'\right|\right)'=g_1''$.

$g_1''(x)=\frac{2}{x^2}>0,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, donc $\left|g_1'(x)\right|$ est croissante sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, et elle atteint son maximum au point $x=\frac{-1}{2}$ et $\left|g_1'\left(\frac{-1}{2}\right)\right|=g_1'\left(\frac{-1}{2}\right)=4=k\Rightarrow\left|g_1'\left(\frac{-1}{2}\right)\right|\geq k>1,x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

Alors g_1 n'est pas contractante sur l'intervalle $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

b) -Vérifier la contraction de la fonction g_2 :

$g_2(x)=\pm\sqrt{e^x}=-\sqrt{e^x},\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right],x<0.$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$,

$g_2'(x)=-\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}<0,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, alors $\left|g_2'(x)\right|=-g_2'(x),\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$

$\left|g_2'\right|$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ et $\left(\left|g_2'\right|\right)'=-g_2''$.

$-g_2''(x)=\frac{e^x}{4\sqrt{e^x}}>0,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, donc $\left|g_2'(x)\right|$ est croissante sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, et elle atteint son maximum au point $x=\frac{-1}{2}$ et

$$\left|g_2'\left(\frac{-1}{2}\right)\right|=-g_2'\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{e^{\frac{-1}{2}}}{2\sqrt{e^{\frac{-1}{2}}}}=0.389=k\Rightarrow\left|g_2'\left(\frac{-1}{2}\right)\right|\leq k<1,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right].$$

Alors g_2 est contractante sur l'intervalle $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ ….(1)

- Vérifier la stabilité de la fonction g_2 :

$g_2(x)=-\sqrt{e^x},x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right].$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$,

$g_2'(x)=-\frac{e^x}{2\sqrt{e^x}}<0,\forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, alors g_2 est décroissante sur l'intervalle $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

Donc $g_2\left(\left[-1,\frac{-1}{2}\right]\right)=\left[g_2\left(\frac{-1}{2}\right),g_2(-1)\right]=[-0.779,-0.607]\subset\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

Alors g_2 est stable sur l'intervalle $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ …..(2)

De (1) et (2) on déduit la satisfaction des conditions de convergence de la méthode du point fixe avec $g_2(x)=-\sqrt{e^x}$.

c) $g_3(x)=x+x^2-e^x, x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$. est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$,

$g_3'(x)=1+2x-e^x, x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$

on a, $-1\le x\le\frac{-1}{2}\Rightarrow -2\le 2x\le -1$

$$\Rightarrow -1\le 1+2x\le 0$$
$$\Rightarrow -1-e^x\le 1+2x-e^x\le -e^x<0$$
$$\Rightarrow g_3'(x)<0, \forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$$
$$\Rightarrow |g_3'(x)|=-g_3'(x), \forall x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$$

$|g_3'|$ est définie, continue et dérivable sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$ et $(|g_3'|)'=-g_3''$.

$-g_3''(x)=-2+e^x, x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$

On a, $-1\le x\le\frac{-1}{2}\Rightarrow e^{-1}\le e^x\le e^{\frac{-1}{2}}$

$$\Rightarrow e^{-1}-2\le e^x-2\le e^{\frac{-1}{2}}-2$$
$$\Rightarrow -1.632\le |g_3'(x)|'\le -1.396<0$$

Donc $|g_3'(x)|$ est décroissante sur $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$, et elle atteint son maximum au point $x=-1$ et

$|g_3'(-1)|=-g_3'(-1)=1.368=k\Rightarrow\left|g_3'\left(\frac{-1}{2}\right)\right|\ge k>1, x\in\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

Alors g_3 n'est pas contractante sur l'intervalle $\left[-1,\frac{-1}{2}\right]$.

Pour cela la fonction $g_2(x)=-\sqrt{e^x}$ est la plus adéquate pour que la méthode du point fixe converge.

Le nombre d'itérations n nécessaires avec $x_0=0.8$ et une précision $\varepsilon=10^{-3}$.

$$n\ge\frac{\ln\left(\frac{\varepsilon(1-k)}{|x_1-x_0|}\right)}{\ln(k)}=\frac{\ln\left(\frac{10^{-3}(1-0.389)}{|-0.670-0.8|}\right)}{\ln(0.389)}=5.68$$

Donc n=6 itérations.

On a :

$x_1 = g_2(x_0) = -0.670;$
$x_2 = g_2(x_1) = -0.715;$
$x_3 = g_2(x_2) = -0.69942;$
$x_4 = g_2(x_3) = -0.70489;$
$x_5 = g_2(x_4) = -0.70296;$
$x_6 = g_2(x_5) = -0.70364;$

Solution de l'exercice 3 :

Soit à résoudre l'équation $F_3(x) = 0, x \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right]$ telle que $\mathrm{F}_3(x) = \cos(2x) - x.$

1. Pour $x_0 = 0.6$, écrire la suite de Newton-Raphson.

La suite de Newton-Raphson s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 = 0.6 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{F_3(x_n)}{F_3'(x_n)}, n = 0,1,2,... \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0.6 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{\cos(2\,x_n) - x_n}{-(1+2\sin(2\,x_n))}, n = 0,1,2,... \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0.6 \\ x_{n+1} = \dfrac{\cos(2\,x_n) + 2\,x_n \sin(2\,x_n)}{-(1+2\sin(2\,x_n))}, n = 0,1,2,... \end{cases}$$

2. Vérifier la satisfaction des conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson.

- **Condition 1 :** F_3 est de classe C^2

  F_3 est définie, continue et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$.

  $F_3'(x) = -(1+2\sin(2x))$, définie, continue et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$.

  $F_3''(x) = -(1+2\sin(2x))$, définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$.

- **Condition 2:** F_3' et F_3'' gardent des signes constants sur $\left[0, \frac{\pi}{5}\right]$?

De la question (2.c exercice 1, série 1), on a $F_3'(x) \le 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right]$

$F_3''(x) = -4\cos(2x)$

$0 \le x \le \frac{\pi}{5} \Rightarrow 0 \le 2x \le \frac{2\pi}{5}$

$\Rightarrow \cos(\frac{2\pi}{5}) \le \cos(2x) \le \cos(0)$

$\Rightarrow 0.309017 \le \cos(2x) \le 1,$ (la fonction cos est décroissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

$\Rightarrow -4 \le -4\cos(2x) \le -1.23607 < 0$

$\Rightarrow F_3''(x) \le 0, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{5}\right]$

- **Condition 3:** $F_3(0) \times F_3\left(\frac{\pi}{5}\right) \le 0$?

$F_3(0) = 1$ et $F_3\left(\frac{\pi}{5}\right) = -0.319302$ donc $F_3(0) \times F_3\left(\frac{\pi}{5}\right) < 0$

- **Condition 4:** $F_3(0.6) \times F_3''(0.6) > 0$?

  $F_3(0.6) = -0.237$ et $F_3''(0.6) = -1.449$ donc $F_3(0.6) \times F_3''(0.6) > 0$

3. En partant de $x_0 = 0.6$ déterminer par la méthode de Newton-Raphson la valeur approchée x_n de α_3, qui vérifie $|F_3(x_n)| \le 10^{-3}$ (prendre quatre chiffres après la virgule).

On a : $x_0 = 0.6$;

I	$x_i = x_{i-1} - \dfrac{F_3(x_{i-1})}{F_3'(x_{i-1})}$	$F_3(x_i)$	$\|F_3(x_i)\| \le 10^{-3}$
0	0 .6	-0.2376	Non
1	0.517	-0.00561	Non
2	0.5149	0.00009	Oui

$x_n = x_2 = 0.5149$.

Solution de l'exercice 04 :

Soit l'équation non linéaire suivante : $F(x) = -x^4 + 2x + 3$ définie dans l'intervalle $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

1. Montrer que la fonction F admet une unique racine dans l'intervalle I.

- F est continue sur l'intervalle I ……………………………………(1)
- $\begin{cases} F\left(\frac{3}{2}\right) = 0.9375 \\ F(2) = -9 \end{cases}$, donc $F\left(\frac{3}{2}\right) \times F(2) < 0$ ……………………….(2)
- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -x^4 = -\infty = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

  F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

  $F'(x) = -4x^3 + 2$

  Le tableau de variation de F est le suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
$F'(x)$		+	0	-	
$F(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$F\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\searrow$	$-\infty$

  On a l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 2\right] \subset \left[\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right[\Rightarrow F$ est strictement décroissante sur l'intervalle I...…………………………………………………(3)

  De (1), (2) et (3) et d'après le T.V.I on déduit que,

  $\exists! \alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ tel que $F(\alpha) = 0$.

2. La suite de Newton pour $x_0 = 2$.

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \dfrac{-x_{n-1}^{\ 4} + 2x_{n-1} + 3}{-4x_{n-1}^{\ 3} + 2} \end{cases}$$

3. Vérifier la satisfaction des conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson.

- **Condition 1 :** F est de classe C^2

  F est définie, continue et dérivable sur $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

  $F'(x) = -4x^3 + 2$, définie, continue et dérivable sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

  $F''(x) = -12x^2$, définie et continue sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

- **Condition 2:** F' et F'' gardent des signes constants sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$?

* $F'(x) = -4x^3 + 2, x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

$$\frac{3}{2} \le x \le 2 \Rightarrow \frac{27}{8} \le x^3 \le 8,$$

$$\Rightarrow -32 \le -4x^3 \le -\frac{27}{2}$$

$$\Rightarrow -30 \le -4x^3 + 2 \le -\frac{23}{2} < 0$$

$$\Rightarrow F'(x) < 0, \forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

* $F''(x) = -12x^2, x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$

$$\frac{3}{2} \le x \le 2 \Rightarrow \frac{9}{4} \le x^2 \le 4$$

$$\Rightarrow -48 \le -12x^2 \le -27 < 0$$

$$\Rightarrow F''(x) < 0, \forall x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$$

- **Condition 3:** $F\left(\frac{3}{2}\right) \times F(2) \le 0$?

$$\begin{cases} F\left(\dfrac{3}{2}\right) = 0.9375 \\ F(2) = -9 \end{cases}, \text{ donc } F\left(\frac{3}{2}\right) \times F(2) < 0$$

- **Condition 4:** $F(2) \times F''(2) > 0$?

  $F(2) = -9$ et $F''(2) = -48$ donc $F(2) \times F''(2) > 0$

4. Calculer les trois premières itérations.

I	$x_i = x_{i-1} - \dfrac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}$	$F(x_i)$	$\varepsilon_i = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$

1	1.7	-1.9521	0.3
2	1.58941	-0.2029	0.11059
3	1.54268	0.4216	0.04673

Solution de l'exercice 5 :

Soit l'équation non linéaire $f(x)=x^2-3$ dont la solution est $\sqrt{3}$. On cherche à résoudre l'équation dans l'intervalle $I_1=\left[\frac{3}{2},2\right]$ par la méthode du point fixe. Pour cela, on pose $g(x)=x-\rho(x^2-3)$.

1. Pour quelles valeurs de ρ la méthode du point fixe converge ?

Pour atteindre la convergence vers la racine par la méthode du point fixe, il faut que la fonction g soit contractante : $|g'(x)|<1, \forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$

$$
\begin{aligned}
|g'(x)|=|1-2\rho x|<1 &\Leftrightarrow -1<1-2\rho x<1\\
&\Leftrightarrow -2<-2\rho x<0\\
&\Leftrightarrow 0<2\rho x<2\\
&\Leftrightarrow 0<\rho<\frac{1}{x}\ \left(x>0\ \forall x\in\left[\frac{3}{2},2\right]\right)
\end{aligned}
$$

$\begin{cases} x=\frac{3}{2}; 0<\rho<\frac{2}{3}\\ x=2; 0<\rho<\frac{1}{2}\end{cases}$, de ce fait la convergence de la méthode du point fixe est atteinte si et seulement si $0<\rho<\frac{1}{2}$.

2. Calculer $g'(\sqrt{3})$

$$g'(\sqrt{3})=1-2\rho\sqrt{3}$$

On remarque que $g'\left(\sqrt{3}\right)\neq 0$ sauf pour une valeur de $\rho=\frac{1}{2\sqrt{3}}\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$, en conclusion la convergence et **quadratique** pour $\rho=\frac{1}{2\sqrt{3}}$.

3. Pour une valeur de $\rho=\frac{1}{5}$,

a) Type de convergence selon le théorème d'Ostrrowski .

$g'(x)$ est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2},2\right]$, donc

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2}\leq x\leq 2 \Rightarrow g'(2)\leq g'(x)\leq g'\left(\frac{3}{2}\right)\\
\Leftrightarrow \frac{1}{5}\leq g'(x)\leq\frac{2}{5}\\
\Leftrightarrow 0<g'(x)<1
\end{aligned}
$$

Donc la convergence est monotone selon le théorème d'Ostrowski.

b) Calculer les trois premières itérations, pour $x_0=\frac{3}{2}$.

$x_0=\frac{3}{2},\ g(x)=x-\rho(x^2-3)$ et $\rho=\frac{1}{5}$

$x_1=g(x_0)=1.65,$

$x_2=g(x_1)=1.7055$

$x_3=g(x_2)=1.72375$

Solution de l'exercice 6 :

Soit l'équation non linéaire suivante $F(x)=\cos(x)-e^x=0$. En utilisant la méthode de Newton-Raphson, calculer la racine approchée x_3 dans l'intervalle $I=\left[-\frac{3}{2},-1\right]$ ou x est donné en radian, ainsi la précision ε_3 en prenant $x_0=-\frac{3}{2}$.

5. Vérification de l'existence de la racine dans l'intervalle $I=\left[-\frac{3}{2},-1\right]$.

- F est continue sur l'intervalle I ……………………………………(1)
- $F\left(-\frac{3}{2}\right)=-0.152$ et $F(-1)=0.172,$ donc $F\left(-\frac{3}{2}\right)\times F(-1)<0$ ……(2)

De (1) et (2) et d'après le T.V.I on déduit que $\exists\alpha\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$ tel que $F(\alpha)=0$

6. Suite de Newton

$$\begin{cases} x_0=-\frac{3}{2}, \\ x_n=x_{n-1}-\dfrac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}=x_{n-1}-\dfrac{\cos(x_{n-1})-e^{x_{n-1}}}{-\sin(x_{n-1})-e^{x_{n-1}}}, n=1,2,... \end{cases}$$

7. Vérifier la satisfaction des conditions de convergence de la méthode de Newton-Raphson.

- **Condition 1 :** F est de classe C^2

  F est définie, continue et dérivable sur $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$.

  $F'(x)=-\sin(x)-e^x$, définie, continue et dérivable sur $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$.

  $F''(x)=-\cos(x)-e^x$, définie et continue sur $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$.

- **Condition 2:** F' et F'' gardent des signes constants sur $\left[-\frac{3}{2},-1\right]$?

* $F'(x)=-\sin(x)-e^x, x\in\left[-\frac{3}{2},-1\right]$

$$-\frac{3}{2} \le x \le -1 \Rightarrow \sin\left(-\frac{3}{2}\right) \le \sin(x) \le \sin(-1),\ \text{(la fonction sin et croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$$

$$\Rightarrow -\sin(-1) \le -\sin(x) \le -\sin\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\sin(-1) - e^x \le -\sin(x) - e^x \le -\sin\left(-\frac{3}{2}\right) - e^x$$

$$\Rightarrow -\sin(-1) - e^{-1} < -\sin(-1) - e^x \le -\sin(x) - e^x \le -\sin\left(-\frac{3}{2}\right) - e^x, (-\sin(-1) - e^x \text{ est décroissante sur } I, \text{ son minimum est } -\sin(-1) - e^{-1})$$

$$\Rightarrow 0.47 < F'(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) > 0, \forall x \in \left[-\frac{3}{2},-1\right]$$

$$* F''(x) = -\cos(x) - e^x, x \in \left[-\frac{3}{2},-1\right]$$

$$-\frac{3}{2} \le x \le -1 \Rightarrow \cos\left(-\frac{3}{2}\right) \le -\cos(x) \le \cos(-1),\ \text{(la fonction cos et croissante sur } \left[-\frac{\pi}{2},0\right]$$

$$\Rightarrow -\cos(-1) \le -\cos(x) \le -\cos\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -\cos(-1) - e^x \le -\cos(x) - e^x \le -\cos\left(-\frac{3}{2}\right) - e^x$$

$$\Rightarrow -0.54 - e^x \le -\cos(x) - e^x \le -0.07 - e^x < 0, \forall x \in \left[-\frac{3}{2},-1\right]$$

$$\Rightarrow F''(x) < 0, \forall x \in \left[-\frac{3}{2},-1\right]$$

- **Condition 3:** $F\left(-\frac{3}{2}\right) \times F(-1) \le 0$?

$$F\left(-\frac{3}{2}\right) = -0.152 \text{ et } F(-1) = 0.172, \text{ donc } F\left(-\frac{3}{2}\right) \times F(-1) < 0$$

- **Condition 4:** $F\left(-\frac{3}{2}\right) \times F''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$?

$$F\left(-\frac{3}{2}\right) = -0.1524 \text{ et } F''\left(-\frac{3}{2}\right) = -0.2939 \text{ donc } F\left(-\frac{3}{2}\right) \times F''\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$$

8. Calcul de la racine approchée x_3 pour $x_0 = -\frac{3}{2}$

I	$x_i = x_{i-1} - \frac{F(x_{i-1})}{F'(x_{i-1})}$	$\varepsilon_i = \lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
1	-1.303	0.197
2	-1.29273	0.01027
3	-1.292692	3.8×10^{-5}