Chapitre I

Rappels Mathématiques

I. Généralités sur les grandeurs physiques :

La physique décrit la matière et l'espace, leurs propriétés et leurs comportements. Les propriétés mesurables sont nommées GRANDEURS PHYSIQUES. Lorsque leur mesure s'exprime par un simple nombre on parle de grandeur scalaire. Lorsqu'un ensemble de plusieurs nombre (vecteur) est nécessaire pour les représenter on parle de grandeur vectorielle.

I.1. Grandeurs fondamentales :

Les grandeurs de base utilisées en mécanique sont

- LA LONGUEUR : Mesure la distance séparant 2 points.

Grandeur : [longueur] = **L** Unité : le mètre (m)

- LA MASSE : Quantité de matière. Attention : ne pas confondre l'abréviation de masse (m) avec l'unité de longueur le mètre (m aussi).

Grandeur : [masse] = **M** Unité : le kilogramme (kg)

- LE TEMPS : Demandez la définition à Einstein! C'est une des notions les plus intuitives et familières et pourtant une des plus délicate à définir.

Grandeur: [temps] = **T** Unité : la seconde (s).

I.2. Grandeurs dérivées :

Ces grandeurs s'expriment comme une combinaison des grandeurs fondamentales (multiplication, division), en voici quelques exemples :

- SURFACE : La surface étant le produit de 2 longueurs sa grandeur physique S = L x L = L^2 Unité le mètre carré. (m^2).

- VITESSE : Distance parcourue par unité de temps
  $v = \frac{dx}{dt}$ d'ou la grandeur : $\mathbf{V = L\,T^{-1}}$ Unité : le m/s (mètre par seconde)

- FORCE : Une force appliquée à une masse la fait accélérer. C'est le principe fondamental de la dynamique. donc F = m γ. grandeur : F = M [γ] = $\mathbf{M\,LT^{-2}}$
  Unité : le Newton (N) force qui accélère une masse de 1kg de 1m/s^2.

I.3. Systèmes d'unités en physique

Le système international (S.I.) est constitué par les unités du système MKSA (M : Mètre, K : Kilogramme, S : Seconde et A : Ampère) et comporte des définitions supplémentaires de l'unité de température et de l'unité d'intensité lumineuse.

Grandeur physique	Lettre utilisée	Unité de mesure S.I.	Symbole de l'unité
Masse	M	kilogramme	kg
Longueur	L	mètre	m
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	Ampère	A
Température	Θ	Kelvin	K
Intensité lumineuse	J	candela	cd
Quantité de matière	N	mole	mol

Chacune de ces sept unités est définie par un phénomène physique particulier. On peut exprimer n'importe quelle unité en fonction d'une ou plusieurs des sept unités du système international.

Exemple : l'énergie W s'exprime en joules (J).

L'énergie cinétique s'écrit : $W_C = ½.m.v^2$

→ grandeur : $[W_C] = \mathbf{M.L^2.T^{-2}}$

→ conséquence : $1\ J = 1\ kg.m^2.s^{-2}$

I.4. Equations aux Dimensions

I.4.1. Définition :

Les équations aux dimensions sont des écritures conventionnelles qui résument simplement la définition des grandeurs dérivées des unités fondamentales : Longueur, Masse et Temps : symbolisées par les majuscules L, M et T. Ainsi une vitesse qui est le quotient d'une longueur L par un temps T est représentée par :

$$V = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

- une accélération $\Gamma = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$:
- une force : $F = M.\Gamma = MLT^{-2}$
- un travail : $W = F.L = ML^2T^{-2}$

D'une manière générale, dans le système S.I. l'équation aux dimensions d'une grandeur G s'écrit :

$[G] = \mathbf{M^x.L^y.T^z}$ où x, y et z sont des réels

I.4.2. Utilités des équations aux dimensions

Les équations aux dimensions permettent de vérifier la cohérence des équations lors de calculs de physique. Une formule est homogène si les deux membres ont les mêmes dimensions. Cependant, il ne suffit pas qu'une équation soit homogène pour qu'elle soit juste.

On ne peut additionner ni soustraire que les termes ayant les mêmes dimensions

Prenons un exemple : comme chacun sait, Einstein à trouvé que $E=mc^2$. E est une énergie, m une masse et c une vitesse (la vitesse de la lumière dans le vide = 3.10^8 m/s). Voyons si cette équation est homogène (ce qui ne prouve pas sa justesse) mais est indispensable.

$[mc^2] = [m] \times [c]^2 = M \times V^2 = M (L\,T^{-1})^2 = M\,L^2T^{-2}$ ce qui est bien la grandeur de l'ENERGIE que nous venions de calculer. Donc l'équation $E=mc^2$ est homogène. Si elle ne l'était pas, elle serait à coup sûr fausse. Mais attention l'homogénéité ne prouve pas qu'elle soit juste. En effet $E=mc^3$ ou $E=m^2c^5$ qui ne sont pas homogènes sont fausses, mais $E=3mc^2$ est homogène bien que fausse. En conclusion la vérification de l'homogénéité d'une équation évite les erreurs grossières.

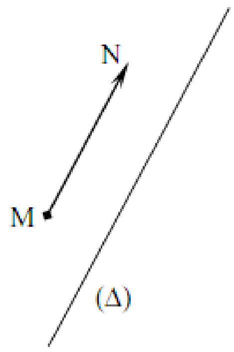
II. Vecteurs

L'usage des vecteurs en mécanique est fondamental. Il permet de représenter les vitesses et les accélérations des points, les rotations des solides, le déplacement, les forces exercées.

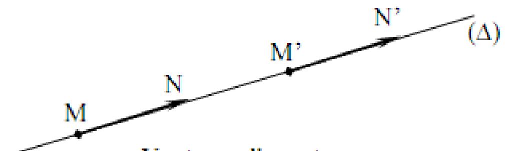
II. 1. Définitions

Un vecteur est segment de droite MN, ayant une origine M et une extrémité N. On le note symboliquement par $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{A}, \ldots$ Il est complètement défini si l'on se donne :

- Son origine ou point d'application.
- Sa direction qui est celle de la droite (Δ).
- Son sens qui est le sens du mouvement d'un mobile allant de M vers N.
- Sa norme (ou module) toujours positive qui est la longueur MN. On le note $\|\overrightarrow{MN}\|$



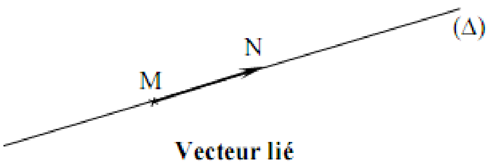
Vecteur libre



Vecteur glissant

Remarque :

Si l'on se donne simplement la direction, le sens et le module, on dit que l'on a défini un *vecteur libre*. Si en plus, on se donne la droite qui porte le vecteur, on dit que l'on a défini un *vecteur glissant*. Si en plus de la droite qui porte le vecteur, on se donne encore le point d'application M, on définit un *vecteur lié*.



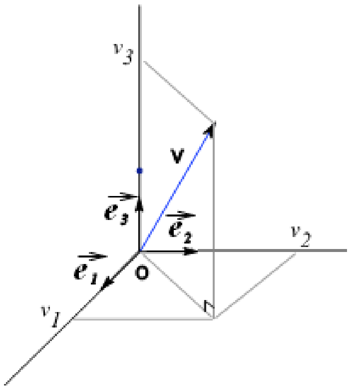
Vecteur lié

Deux vecteurs liés d'origine différentes, sont dits égaux lorsqu'ils ont la même direction, même sens et même module : ils représentent le même vecteurs glissant.

Deux vecteurs liés, d'origines quelconques, sont dits opposés lorsqu'ils ont la même direction, même grandeur et des sens opposés : ils sont dits directement opposés lorsqu'ils sont portés par la même droite.

II. 2. Opérations sur les vecteurs

II. 2. 1. Composantes d'un vecteur



Dans une base orthonormée directe que nous noterons $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ on montre que tout vecteur $\vec{V}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\vec{V} = v_1\,\vec{e_1} + v_2\,\vec{e_2} + v_3\,\vec{e_3}$$

Les réels v_1, v_2 *et* v_3 sont les coordonnées de $\vec{V}$. On représente alors le vecteur comme un vecteur colonne:

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

- **Remarque :**

Orthonormée signifie :

- ortho : $\vec{e_1}.\vec{e_2} = 0$, $\vec{e_1}.\vec{e_3} = 0$, $\vec{e_2}.\vec{e_3} = 0$; - normé : $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1$.

- Cette base est de plus directe si :

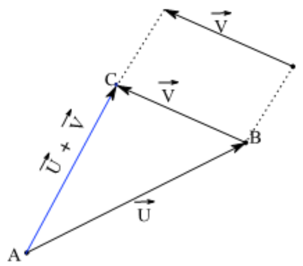
$$\begin{aligned} \vec{e_1} \wedge \vec{e_2} &= \vec{e_3}, \\ \vec{e_2} \wedge \vec{e_3} &= \vec{e_1}, \\ \vec{e_3} \wedge \vec{e_1} &= \vec{e_2}. \end{aligned}$$

II. 2. 2. Addition

Par définition, la somme de deux vecteurs $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ est un vecteur, dont on obtient la représentation en mettant bout à bout les deux vecteurs (par translation) et en joignant les extrémités

La somme des vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$

s'ecrit dans la même base $\vec{V} + \vec{W} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$



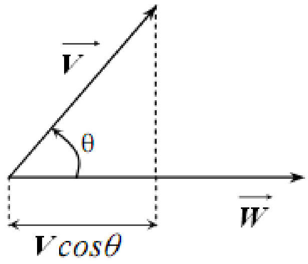
En conséquence si l'ont connait les coordonnées de deux points A et B dans une base on peut facilement calculer les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \; ; \vec{OB} = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \; \Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$$

II. 2. 3. Produit scalaire

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$, faisant entre eux l'angle θ, le nombre :

$$\vec{V}.\vec{W} = \left\|\vec{V}\right\| \times \left\|\vec{W}\right\| \times \cos\theta$$



- **Conséquences**

Un vecteur est nul si et seulement si sa norme est nulle. Il est noté $\vec{0}$.

La norme d'un vecteur peut s'exprimer comme un produit scalaire:

$$\vec{V}.\vec{V} = \left\|\vec{V}\right\|^2$$

Si deux vecteurs forment un angle droit, leur produit scalaire est nul :

$$\vec{V} \perp \vec{W} \Rightarrow \vec{V}.\vec{W} = 0$$

Si l'on connait les coordonnées de deux vecteurs dans une base orthonormée, le produit scalaire s'exprimera uniquement en fonction des coordonnées :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{V}.\vec{W} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

La norme du vecteur $\vec{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ s'écrit :

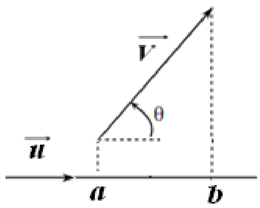
$$\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{\vec{V}.\vec{V}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

La composante v_1 s'écrit comme un produit scalaire:

$$v_1 = \vec{V}.\vec{u}_1$$

De manière générale, la mesure de la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur un axe de vecteur unitaire $\vec{u}$ est donnée par

$$|ab| = \vec{V}.\vec{u} = \|\vec{V}\| \cos\theta$$



Deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si

$$\alpha\vec{V} + \beta\vec{W} = \vec{0} \text{ ou bien } \vec{V} = \lambda\vec{W} \quad (\alpha\, \beta\, \lambda \text{ sont réels})$$

On montre que le produit scalaire présente la propriété de bilinéarité :

$$\left(\alpha\vec{V}+\beta\vec{W}\right).\vec{U}=\alpha\vec{V}.\vec{U}+\beta\vec{W}.\vec{U}$$

Un vecteur unitaire est un vecteur de norme égale à 1. Par exemple, le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{V}$ et de même sens s'écrit :

$$\vec{u}=\frac{1}{\|\vec{V}\|}\vec{V}$$

Trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont ***coplanaires*** si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que

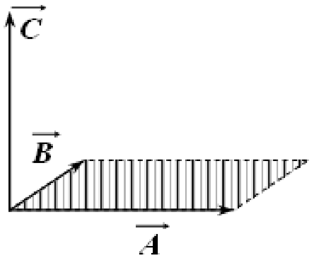
$$\alpha\vec{U}+\beta\vec{V}+\gamma\vec{W}=\vec{0}$$

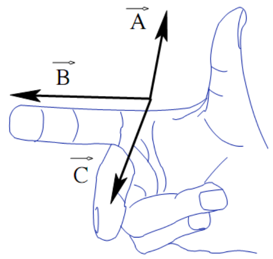
II. 2. 4. Produit vectoriel

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{C}$, noté $\vec{C}=\vec{A}\wedge\vec{B}$ et dont:

- la direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$
- le sens est donné par la règle des trois doigts de la main droite (règle de la visse);
- la module correspond à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et vaut

$$\left\|\vec{A}\wedge\vec{B}\right\|=\left\|\vec{A}\right\|\times\left\|\vec{B}\right\|\times\left|\sin(\vec{A},\vec{B})\right|$$





Supposons que l'on connaisse les composantes des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans une base orthonormée directe

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\text{ et }\vec{B}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-b_2a_3)\vec{i}-(a_1b_3-b_1a_3)\vec{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\vec{k}$$

- **Conséquences**

Il est facile de voir qu'intervertir les vecteurs produit un vecteur opposé :

$$\vec{A}\wedge\vec{B}=-(\vec{B}\wedge\vec{A})$$

Le produit vectoriel permet de savoir si deux vecteurs sont colinéaires:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

II. 2. 5. Produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$ une quantité scalaire m égale au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs :

$$m = (\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = (\vec{B} \wedge \vec{C}).\vec{A} = (\vec{C} \wedge \vec{A}).\vec{B}$$

Si les trois vecteurs sont coplanaires, alors $m = 0$

Propriétés à retenir

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$a(\vec{U} + \vec{W}) = a\vec{U} + a\vec{W}$$

$$(a+b)\vec{V} = a\vec{V} + b\vec{V}$$

$$a(b\vec{V}) = (ab)\vec{V}$$

$$\left\|a\vec{V}\right\| = |a|\left\|\vec{V}\right\|$$

$$\left\|\vec{V} + \vec{W}\right\| \neq \left\|\vec{V}\right\| + \left\|\vec{W}\right\|$$

$$\left(\overrightarrow{\alpha V} + \overrightarrow{\beta W}\right).\vec{U} = \alpha\vec{V}.\vec{U} + \beta\vec{W}.\vec{U}$$

$$\vec{V}.\vec{W} = \vec{W}.\vec{V}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A}.\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

$$\overrightarrow{(\alpha A)} \wedge \overrightarrow{(\beta B)} = (\alpha\beta)\vec{A} \wedge \vec{B}$$

II. 3. Analyse vectorielle : gradient, rotationnel divergence et Laplacien

II. 3. 1. Opérateur 'nabla'

L'opérateur 'nabla' ou $\vec{\nabla}$ est très utile en analyse vectorielle. Il permet de déterminer les notions de gradient, rotationnel, divergence et laplacien de manière simple. Il se définit comme suit :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

II. 3. 2. Gradient

Le gradient d'une fonction scalaire *f* (*x*, *y*, *z*) est un vecteur noté $\vec{\nabla} f$ ou $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ dont les composantes dans une base orthonormée sont les dérivées partielles de *f* par rapport à chaque variable :

$$\vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

II. 3. 3. Divergence

La divergence d'un vecteur $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ dont les composantes sont fonctions des coordonnées (*x*,*y*,z) est un scalaire noté $\vec{\nabla}.\vec{F}$ ou *div* $\vec{F}$ dont la valeur est :

$$\vec{\nabla}.F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

II. 3. 4. Rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{F}(F_x, F_y, F_z)$ est un vecteur noté $\vec{\nabla} \wedge \vec{F}$ ou $\overrightarrow{rot\ F}$ tel que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

II. 3. 5. Laplacien

On appelle Laplacien d'une fonction scalaire *f* (*x*, *y*, *z*) la divergence de son gradient, on le note $\vec{\nabla}.(\vec{\nabla} f)$ ou Δf

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

- **Propriétés :**

Quels que soient la fonction *f* et le vecteur $\vec{F}$ on à deux propriétés qui sont toujours vérifiées :

1. $\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \vec{0}$
2. $div\, \overrightarrow{rot\ F} = 0$

Chapitre II

Cinématique du point

II.1. Généralités

L'objet de la cinématique est l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui le produisent. L'étude du mouvement d'un corps est l'étude des positions successives de ce dernier par rapport à un référentiel (repère d'espace associé à un repère de temps).

II.1.1. Définitions

a) Point matériel

Un point matériel est défini comme étant un élément de matière, de dimensions négligeables, que l'on assimile à un point géométrique. En réalité, on étudie le mouvement du centre de masse d'un corps, point au quel est supposé concentré toute la masse du corps.

b) Trajectoire

C'est le lieu des positions successives occupées par un point mobile. Celle–ci peut être rectiligne ou bien curviligne. Elle peut être ouverte ou fermée.

c) Equation du mouvement (ou équation Horaire)

C'est la relation qui lie le chemin parcouru, au temps nécessaire à le parcourir.

d) Définition intrinsèque du mouvement

Le mouvement d'un point M est parfaitement défini si l'on connaît

- la trajectoire C
- la position, à chaque instant « t » du point M sur la trajectoire C. On fait le choix d'une origine et d'un sens positif (indiqué par une flèche).

OM est défini par la fonction OM = S = f(t)

II. 2. Repérage d'un point : systèmes de coordonnées

II.2.1. Choix d'un système de coordonnées

L'espace contient 3 dimensions ; cela signifie qu'il faut 3 coordonnées pour définir la position d'un point *M* dans l'espace. La première étape consiste à choisir un point qui servira de référence : c'est le **point origine** noté *O*.

Le point *M* est alors repéré par rapport à *O* : on note $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ le vecteur position de *M*. Il reste à repérer le vecteur $\overrightarrow{OM}$; il faut pour cela définir une base vectorielle notée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ peut alors se décomposer dans cette base en :

$$\overrightarrow{OM} = u_1 \vec{e_1} + u_2 \vec{e_2} + u_3 \vec{e_3}$$

(u_1, u_2, u_3) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$

Toutefois, pour des raisons pratiques (en particulier lors de calculs de produits scalaires et produits vectoriels), il est important que la base utilisée soit *orthonormée directe*.

Il est très important de bien choisir le système de coordonnées dans lequel la description du problème va être faite pour simplifier les calculs. Dans le plan par exemple, on pourra utiliser 2 axes *x* et *y* et repérer ainsi le point *M* étudié. Toutefois, si le mouvement de *M* est circulaire, l'utilisation de *x* et *y* sera compliquée: il vaudra mieux repérer le point par sa distance depuis le centre *O* (rayon *r*), et l'angle parcouru. C'est ce que l'on appelle les coordonnées polaires. Pour un mouvement à trois dimensions sur la Terre, il est usuel (et plus simple!) de repérer un point par sa latitude, sa longitude et son altitude (c'est ce que l'on va appeler le système de coordonnées sphériques).

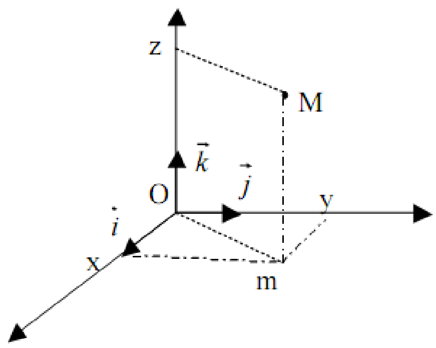
II.2.2. Coordonnées cartésiennes

Soient *R(x,y,z)* un repère orthonormé direct de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et *M* la particule a repérer

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

la position de la particule *M* est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes *(x,y,z)* telles que :

x = abscisse de *M* ; *y* = ordonnée de *M* ; *z* = côte de *M*.



Le vecteur déplacement élémentaire (*M'* est très voisin de *M*) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\vec{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

(Dans *R :* $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$)

II.2.3. Coordonnées cylindriques

De nombreux problèmes possèdent un axe privilégié, et l'utilisation du système de coordonnées cartésiennes est alors peu judicieuse. Un point en rotation autour d'un axe (sur un manège tournant par exemple) est plus aisément repéré par sa distance au centre, et par un angle de rotation autour de l'axe. C'est pour faciliter l'étude de ce genre de problèmes que sont introduites les coordonnées cylindriques.

Soit un point fixe origine *O* et le système de coordonnées cartésiennes *(O,x,y,z)* précédemment défini. Soit M un point que l'on cherche à repérer. L'axe privilégié du problème est placé suivant *(Oz)* (par exemple l'axe de rotation du manège). Soit *H* la projection de *M* sur le plan *(O,x,y)*, et *Z* la projection de M sur l'axe *(Oz)*:

Le point *M* est repéré par :

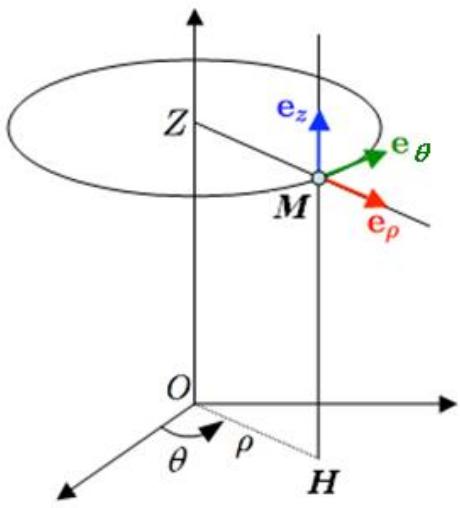
- ρ la distance de *M* à l'axe *(Oz)*, soit la distance *ZM* ou encore *OH*;

- θ l'angle *(Ox;OM);*

- *z* la distance *HM*, soit encore la distance *OZ*.

ρ est appelé rayon polaire; θ est l'angle polaire et *z* la cote.

La position de chaque point doit toutefois être définie par un unique triplet (ρ,θ,z). ρ ne varie donc que de 0 à $+\infty$; θ varie de 0 à 2π; z varie de $-\infty$ à $+\infty$.



Remarque

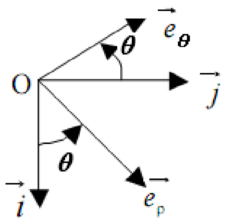
Ce système de coordonnées est une "version à 3 dimensions" du système de coordonnées polaires : *z* est la hauteur du point *M* par rapport au plan *(Oxy)*, puis (ρ,θ) sont les coordonnées polaires de *M* dans le plan *z* = cte.

Il faut bien remarquer que la nouvelle base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ orthonormée associée à ce système de coordonnées est mobile! Les vecteurs ont une direction changeante quand le point *M* se déplace.

$$\overrightarrow{e_\rho} = \cos\theta\,\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta}\,, \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho}$$



Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est:

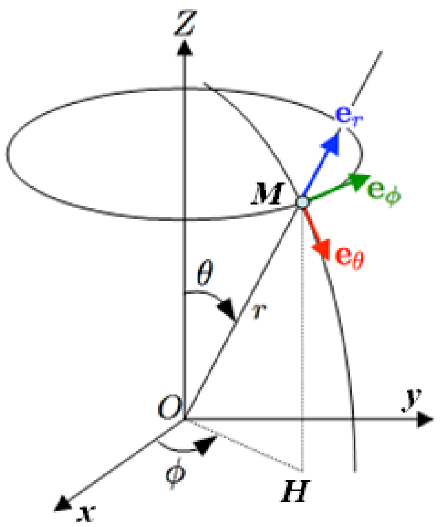
$$d\overrightarrow{OM} = d\rho\,\overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z}$$

- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}\rho\\ \theta\\ z\end{pmatrix} : \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ tg\theta = \left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

II.2.4. Coordonnées sphériques



Lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point O que l'on prend pour origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r,θ,ϕ) de la particule à étudier

- r : rayon, la distance de M au point O.

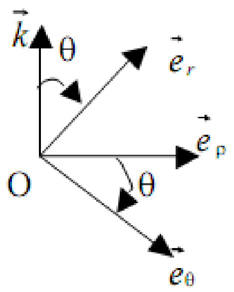
- θ : latitude, l'angle *(Oz;OM);*

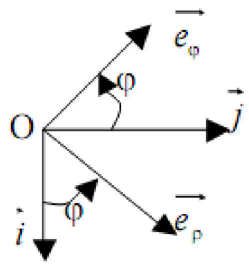
- φ : longitude, l'angle *(Ox;OH);*

$0 < r < +\infty$; $0 < \theta < \pi$; $0 < \phi < 2\pi$

Une nouvelle base locale s'introduit alors $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{k} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{k} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}. \end{cases}$$





Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est:

$$d\overrightarrow{OM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + rsin\theta d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

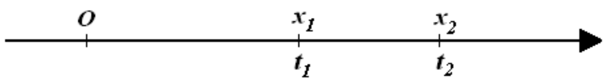
- **Correspondance avec les coordonnées cartésiennes**

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{cases} x = OH\, cos\varphi = r\, sin\theta\, cos\varphi \\ y = OH\, sin\varphi = \; r\, sin\theta\, sin\varphi \\ z = r\, cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ tg\theta = \left(\frac{\rho}{z}\right) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ tg\varphi = \left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

II.3. Mouvement rectiligne

Le mouvement d'un corps est rectiligne si sa trajectoire est une droite. La position de l'objet est définie par son déplacement « x » à partir d'un point origine arbitraire O. $x = f(t)$, x peut être positif ou négatif



II.3.1. Vitesse moyenne

La vitesse d'un mobile caractérise la variation de sa position au cours du temps. Soit deux positions du mobile x_1 et x_2 à deux instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$). La vitesse moyenne du mobile entre ces est donnée par :

$$v_{moy} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Remarques

- A la fois v_{moy} et Δx ont un signe. Ils seront tous deux positifs si le mobile se déplace dans le sens de l'axe x, négatifs dans le cas contraire.
- Sauf dans le cas d'un mouvement à vitesse constante, v_{moy} dépend du choix de t_1 et t_2

II.3.2. Vitesse instantanée

La vitesse moyenne ne peut servir à caractériser la vitesse d'un mobile à un instant t donné. Dès lors on définit la vitesse instantanée à l'instant t par :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Par conséquent, pour retrouver la position d'un mobile à chaque instant, à partir de sa vitesse instantanée, on calcule l'intégrale :

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\, dt \Rightarrow x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

A l'instant initial t_0 le mobile est en x_0

II.3.3. Accélération

L'accélération d'un mobile caractérise la variation de sa vitesse au cours du temps. Procédant comme pour la vitesse, on définit l'accélération par

$$a_{moy} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée d'un mobile est la dérivée de sa vitesse par rapport au temps, à l'instant considéré :

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Par conséquent, pour retrouver la vitesse d'un mobile à chaque instant, à partir de son accélération, on calcule l'intégrale :

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt \Rightarrow v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

Ceci implique la connaissance de la vitesse du mobile à l'instant initial t_0, soit : v_0

II.3.4. Deux cas particuliers de mouvement rectiligne : le MRU et le MRUV

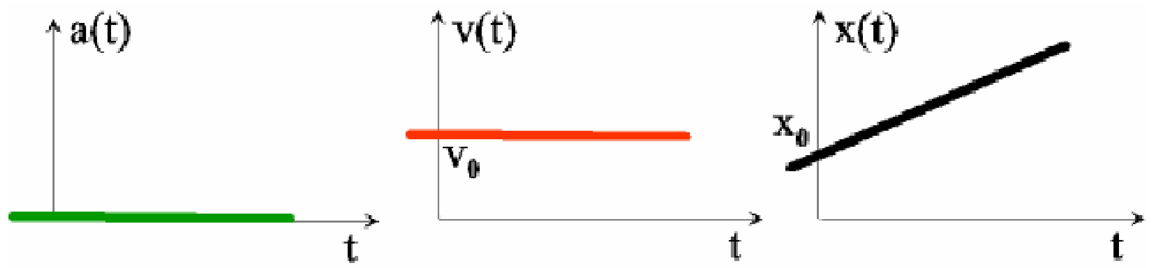
a) mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Il se caractérise par :

- ✓ trajectoire rectiligne (une droite).
- ✓ vitesse constante ($v = cste$).
- ✓ accélération nulle ($a = 0$).

$$v = \frac{dx}{dt} = cste \quad \Rightarrow dx = vdt \quad donc \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} vdt = v\int_{t_0}^{t} dt$$

Donc d'une manière générale $x - x_0 = v \cdot (t - t_0)$



b) Le mouvement rectiligne uniformément varié

Il se caractérise par :

- ✓ trajectoire rectiligne ;
- ✓ accélération constante et non nulle.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a_0 = cste$$

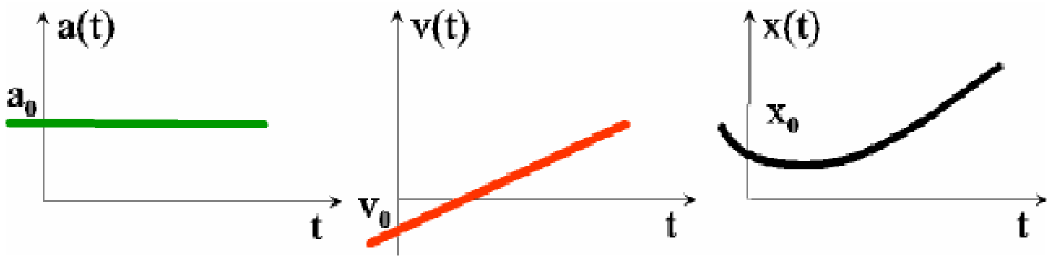
Si la vitesse croit, le mouvement est uniformément accéléré ;
Si la vitesse décroit, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).
Nous admettons, pour simplifier, que l'origine du temps correspond à l'origine du mouvement,

$$\frac{dv}{dt} = a_0 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a_0\, dt \Rightarrow v - v_0 = a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v_0\, dt + a_0 \int_{t_0}^{t} (t - t_0)\ dt$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\, a_0(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$

La fonction *x(t)* est du second degré et la courbe à laquelle elle correspond est une parabole



On trouve la relation entre la variation de la vitesse et le déplacement, valable uniquement pour le MRUA en remplaçant $(t - t_0)$ dans :

$$v - v_0 = a_0(t - t_0) \Rightarrow (t - t_0) = \frac{v - v_0}{a_0}$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2}\, a_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a_0}\right)$$

$$\Rightarrow x - x_0 = \frac{1}{2a_0}\, (v^2 - {v_0}^2)$$

$$\Rightarrow v^2 - {v_0}^2 = 2a_0(x - x_0)$$

Applications

Exercice 1

Un corps se déplace selon l'axe des x suivant la loi $x(t)= t^3+ 5t^2+5$, x est en mètre et t en seconde. Trouver :

1- sa vitesse et son accélération à chaque instant ;

2- sa position, sa vitesse et son accélération pour t=2 s;

3- sa vitesse et son accélération moyennes entre t=1 s et t=2 s.

Exercice 2

Un mobile en mouvement rectiligne a une accélération $a = 1/t^2$. Sa vitesse initiale à l'instant $t_0 = 1s$ et au point $x_0 = 2\ m$ est nulle.

1- quelle est sa vitesse instantanée $v(t)$?

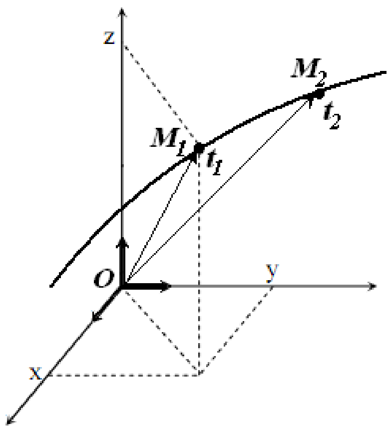
2- quelle est sa position instantanée $x(t)$?

II.4. Mouvement curviligne

II.4.1.Définition analytique du mouvement

Dans le cas d'une trajectoire quelconque dans l'espace à 3 dimensions, on choisit un repère Oxyz. La position d'un point M est entièrement déterminée par son vecteur position à chaque instant $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$. Le mouvement du mobile sera défini si l'on connaît, à chaque instant, ses coordonnées en fonction du temps, soit les trois équations :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$



Pour une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 on défini le vecteur déplacement

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

On défini donc le vecteur vitesse moyenne

$$\vec{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t}$$

La vitesse instantanée s'obtient on faisant tendre t_2 vers t_1 ou bien $\Delta t \to 0$, soit :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Les composantes cartésiennes de la vitesse sont donc :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ , \qquad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Soit $\vec{v}(t) = v_x\vec{\imath}+v_y\vec{\jmath}+v_z\vec{k}$

Et le module de la vitesse est donné par : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2+v_z^2}$

Entre les deux instants t_1 et t_2 le vecteur accélération moyenne est défini par :

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

L'accélération instantanée s'obtient en faisant tendre t_2 vers t_1 ou bien $\Delta t \to 0$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_1 + \Delta t) - \vec{v}(t_1)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Les composantes de $\vec{a}(t)$ sont donc :

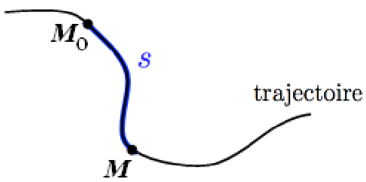
$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \qquad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

II.4.2. Définition intrinsèque du mouvement

Contrairement au mouvement rectiligne, le mobile n'effectue pas son mouvement le long d'un segment de droite M_1M_2, mais il l'effectue le long d'un arc $\widehat{M_1M_2}$, pour mesurer des longueurs parcourues, il faut introduire la notion d'abscisse curviligne

a) Abscisse curviligne

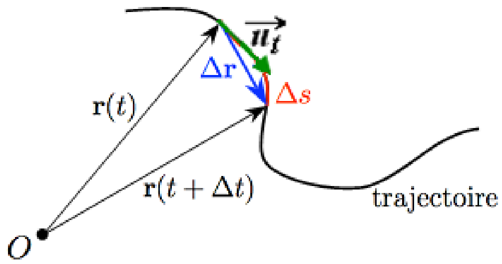
Choisissons un point fixe M_0 sur la trajectoire qui servira de référence pour mesurer les longueurs d'arcs. On appelle abscisse curviligne s la mesure de la distance parcourue le long de la trajectoire, soit $s(t) = \widehat{M_0M}$



b) Vecteur vitesse

Sur la figure ci contre, on remarque qu'il y a une différence entre le vecteur déplacement $\Delta\vec{r}$ et la variation de l'abscisse curviligne Δs. mais en faisant tendre $\Delta t \to 0$, ces deux derniers tendent à ce confondre. On peut ecrire alors :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\|\Delta\vec{r}\|}{\Delta s} = 1 \Longrightarrow \frac{\|d\vec{r}\|}{ds} = 1$$

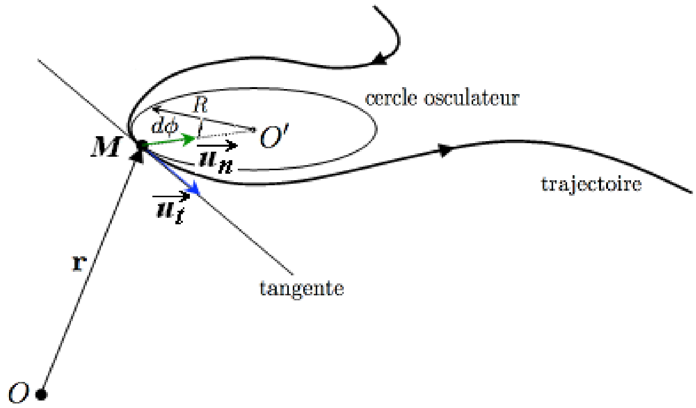


On défini un vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ tangent à la courbe au point M orienté dans le sens du mouvement tel que : $\overrightarrow{u_t} = \frac{d\vec{r}}{ds}$. On redéfini le vecteur vitesse par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} \implies \vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\,\overrightarrow{u_t} \implies \vec{v}(t) = v\,\overrightarrow{u_t}$$

On déduit donc que le vecteur vitesse reste toujours tangent à la trajectoire. Il est toujours orienté dans le sens du mouvement : Si le mobile se déplace dans le sens positif, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens positif. Dans l'autre cas, le vecteur vitesse est dirigé dans le sens négatif.

c) Accélérations tangentielle et normale



En dérivant par rapport au temps le vecteur $\vec{v} = v\,\overrightarrow{u_t}$ on obtient l'accélération sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v\,\overrightarrow{u_t}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

Le premier terme $\frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t}$ est un vecteur tangent à la trajectoire, on l'appelle *accélération tangentielle*

$$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} = a_t\,\overrightarrow{u_t}$$

Elle indique la manière dont varie la grandeur (module) de la vitesse au cours du temps. Lorsque le mobile se déplace avec une vitesse (grandeur) constante, quelle que soit la forme de la trajectoire, accélération tangentielle est nulle.

Le second terme détermine la variation de la direction du vecteur vitesse au cours du temps. On l'appelle accélération normale noté $\overrightarrow{a_n}$

$$\overrightarrow{a_n} = v\,\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt}$$

La dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{u_t}$ par rapport à ϕ correspond à un vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire qu'on note $\overrightarrow{u_n}$ dirigé vers le centre du cercle osculateur *O'*. Le vecteur $\overrightarrow{u_n}$ est donc normal à la trajectoire au point M et dirigé vers la concavité de la courbe.

$$\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi} = \overrightarrow{u_n}$$

Aux voisinages du point M, la trajectoire se confond au cercle osculateur. Or sur un cercle de rayon R, la longueur d'un arc ds est proportionnelle à l'angle $d\phi$ qui le délimite. On écrit $ds = R\,d\phi$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{R}$$

$$\overrightarrow{a_n} = v\ \frac{d\overrightarrow{u_t}}{dt} = v\frac{d\overrightarrow{u_t}}{d\phi}\ \frac{d\phi}{ds}\ \frac{ds}{dt} = v^2\ \frac{1}{R}\ \overrightarrow{u_n} \Rightarrow \overrightarrow{a_n} = \frac{v^2}{R}\ \overrightarrow{u_n}$$

R correspond au rayon de courbure de la trajectoire.

En résumé, l'accélération d'un mobile peut toujours être décomposée en deux accélérations, l'une est dite tangentielle et l'autre normale

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\ \overrightarrow{u_n}$$

$$\vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n}$$

Comme les deux vecteurs $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$ sont orthogonaux le module de l'accélération est :

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

Remarque

- Le cercle osculateur est le cercle unique qui épouse la courbe le mieux possible en un point *M* donnée. Il s'agit d'une approximation de la courbe. Le cercle osculateur approche la courbe mieux que ne le fait la tangente: il donne non seulement une idée de la direction dans laquelle la courbe avance, mais aussi de sa tendance à tourner de part et d'autre de la tangente (courbure).
- Si le mouvement est curviligne uniforme (vitesse constante en module), l'accélération tangentielle est nulle. D'autre part, si le mouvement est rectiligne (rayon infini), il n y pas de changement de direction du vecteur vitesse, l'accélération normale est nulle.

Exercice :

On donne les équations paramétriques *x(t)* et *y(t)* d'un mobile par rapport à un référentiel $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$: $x(t) = 2t$ $y(t) = 4t^2$

1. Déterminer l'équation de la trajectoire.
2. Calculer la vitesse et l'accélération du mobile.
3. Déterminer les composantes normale et tangentielle de l'accélération.
4. Déduire le rayon de courbure.

II.4.3. Cas particulier du mouvement circulaire

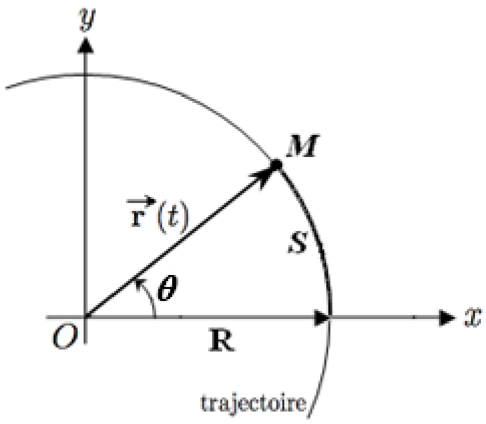
Supposons un mobile qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan Oxy ; la circonférence a un rayon R et est centrée sur l'origine des axes O. Dans ce cas il est plus commode de travailler avec des coordonnées polaires ρ et θ, plutôt qu'avec des coordonnées cartésiennes.

Dans le SI, les angles sont mesurés en radian (rad). Cette unité est définie comme le rapport de l'arc de circonférence s, intercepté par l'angle au centre θ, divisé par le rayon de la circonférence R

$$\theta[rad] = \frac{s}{\mathrm{R}}$$

d'où l'on déduit :

s = R θ, à condition que θ soit mesuré en radian.



Les relations entre cordonnées polaires et coordonnées cartésiennes peuvent être établies aisément à partir des relations trigonométriques du triangle rectangle :

$$\begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de centre O, ρ = R est constant et la seule coordonnée qui varie dans le temps est l'angle θ; c'est elle qui détermine la position du point M à tout instant.

Pour trouver l'expression de la vitesse dans un mouvement circulaire, faisons appel à la définition de celle-ci : $\vec{v}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$

ou en considérant seulement le module des vecteurs $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$

A la limite où $\Delta t \to 0$, la longueur de $\overrightarrow{\Delta r}$ tend vers la longueur de l'arc de circonférence Δs, intercepté par l'angle θ.

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \Longrightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{R}\Delta\theta}{\Delta t} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Ceci nous amène à définir la vitesse angulaire ω comme la dérivée par rapport au temps de l'angle azimutal, elle s'exprime en (rad/s) :

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow v(t) = \mathrm{R}\,\omega$$

On exprime le vecteur vitesse par :

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt}\overrightarrow{u_t} = \mathrm{R}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_t} \Longrightarrow \mathrm{R}\,\omega\,\overrightarrow{u_t}$$

En dérivant le vecteur vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération

$$\vec{a} = R\frac{d\omega}{dt}\overrightarrow{u_t} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_n} \Longrightarrow \vec{a} = R\alpha\,\overrightarrow{u_t} + R\omega^2\,\overrightarrow{u_n}$$

$\alpha = d\omega/dt$ est l'accélération angulaire, elle s'exprime en rad/s^2

a) Mouvement circulaire uniforme

On dit que le mouvement circulaire est uniforme (MCU) lorsque la vitesse angulaire ω donc la vitesse v est constante.

- ✓ la trajectoire est circulaire (circonférence) :
- ✓ vitesse linéaire et angulaire sont des constantes.

Espace parcouru : $s = v\,t + s_o$

s_o : abscisse curviligne à l'instant origine

v : vitesse linéaire constante

s : abscisse du mobile à l'instant t.

Angle balayé en radians : $\theta = \omega\,t + \theta_o$

Le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet est constant et est défini comme la période T du MCU.

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi R}{v} \Longrightarrow \mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Souvent, la vitesse de rotation est exprimée en tour par seconde (*n* tr/s), dans ce cas, on écrit :

$$\omega = 2\pi\,n$$

Accélération d'un point

L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = \mathrm{R}\alpha\,\overrightarrow{u_t} = \vec{0}$ car ($\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 0$).

L'accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$. Elle se dirige toujours vers le centre du cercle.

b) Mouvement circulaire uniformément varié

- ✓ trajectoire circulaire
- ✓ accélération angulaire constante

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = Cste$$

Si la vitesse angulaire croit, le mouvement est uniformément accéléré ;

Si la vitesse angulaire décroit, le mouvement est uniformément retardé (ou décéléré).

Nous admettons pour simplifier que l'origine du temps correspond à l'origine du mouvement

$$s = v\,t + s_o = R\omega\,t + s_o$$

$$\omega = \alpha\,t + \omega_o$$

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha\,t^2 + \omega_o t + \theta_o$$

Accélération d'un point

L'accélération tangentielle : $\overrightarrow{a_t} = \mathrm{R}\alpha\,\overrightarrow{u_t}$

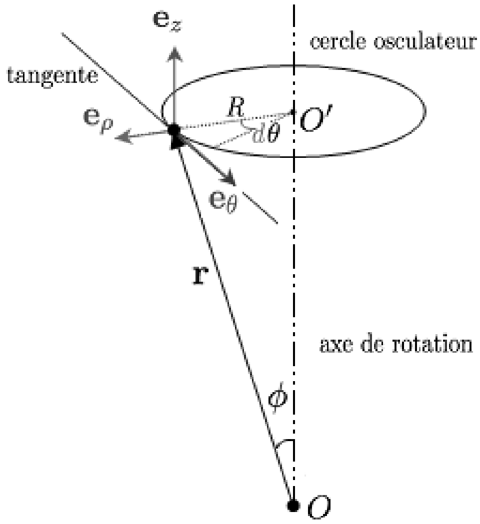
L'accélération normale : $\overrightarrow{a_n} = R\omega^2\,\overrightarrow{u_n} = \frac{v^2}{R}\,\overrightarrow{u_n}$. Elle se dirige toujours vers le centre du cercle.

c) Propriétés du vecteur vitesse angulaire

On définit le vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}$ par

- sa grandeur $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$
- sa direction qui est celle de l'axe de rotation
- son sens qui indique le sens de la rotation selon la règle du tire-bouchon

$$\vec{r} = \rho\,\overrightarrow{e_\rho} + z\,\overrightarrow{e_z}, \qquad \vec{\omega} = \omega\,\overrightarrow{e_z}$$



Le mouvement de M étant circulaire autour de l'axe OZ, les coordonnées ρ et z sont donc constantes. On a alors :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \rho\,\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow \vec{v} = \rho\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

Comme $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$ alors

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_z} \wedge \rho\overrightarrow{e_\rho} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_z} \wedge (\rho\overrightarrow{e_\rho} + z\overrightarrow{e_z})$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

Exercice

Dans un repère OXY, on considère un point matériel animé d'un mouvement circulaire de centre O et de rayon R. notons par $\theta(t)$ l'angle que fait le vecteur position avec l'axe OX.

1. Calculer les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération ainsi que leurs grandeurs en fonction de θ et de ses dérivées par rapport au temps

2. Déduire les composantes tangentielle et normale de l'accélération

II.4.4. Etude du mouvement dans les différents systèmes de coordonnées

a) Etude du mouvement en coordonnées cylindriques

Dans la base $(\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ le vecteur position $\vec{r}$ s'écrit :

$$\vec{r} = \rho\, \overrightarrow{e_\rho} + z\, \overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$ est:

$$d\vec{r} = d\rho\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho d\theta\, \overrightarrow{e_\theta} + dz\, \overrightarrow{e_z}$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho \frac{d\theta}{dt}\, \overrightarrow{e_\theta} + \frac{dz}{dt}\, \overrightarrow{e_z}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\, \overrightarrow{e_\rho} + \rho\dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\, \overrightarrow{e_z}$$

En se rappelant que

$$\frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{d\theta} = \overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{e_\rho}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}, \qquad \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_\rho} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_\rho}$$

Le vecteur accélération est

$$\vec{a} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{e_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\, \overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\, \overrightarrow{e_z}$$

b) Etude du mouvement en coordonnées sphériques

Le calcul de l'accélération en coordonnées sphériques est un calcul rarement effectué et très compliqué! Son expression donnée simplement à titre indicatif.

Dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ le vecteur position $\vec{r}$ s'écrit :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r\, \overrightarrow{e_r}$$

Les dérivées par rapport au temps des trois vecteurs unitaires s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + sin\theta\dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = -\, \dot{\theta}\, \overrightarrow{e_r} + cos\theta\dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\frac{d\overrightarrow{e_\varphi}}{dt} = -\, \dot{\varphi}(sin\theta\, \overrightarrow{e_r} + cos\theta\, \overrightarrow{e_\theta})$$

Le vecteur vitesse est :

$$\vec{v} = \dot{r}\, \overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\, \overrightarrow{e_\theta} + rsin\theta\dot{\varphi}\, \overrightarrow{e_\varphi}$$

Le vecteur accélération est :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r sin^2\theta \, \dot{\varphi}^2\right) \overrightarrow{e_r}$$
$$+\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r \, sin\theta \, cos\theta\dot{\varphi}^2\right) \overrightarrow{e_\theta}$$
$$+(2r \, cos\theta \, \dot{\theta} \, \dot{\varphi} + 2 \, \dot{r} \, sin\theta \, \dot{\varphi} + r sin\theta\ddot{\varphi}) \, \overrightarrow{e_\varphi}$$

II.5. Mouvement relatifs

II.5.1. Changement de référentiels

Supposons que le mouvement d'un point matériel M (position, vitesse et accélération) est connu par rapport à un référentiel donné. On veut déterminer le mouvement de M par rapport à un autre référentiel.

Soit le 1er référentiel *R(O,xyz)* définit par les vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On le considère fixe et nous l'appelons repère absolu. Dans *R* on défini :

- ✓ Le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$
- ✓ Le vecteur vitesse absolue : $\overrightarrow{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$
- ✓ Le vecteur accélération absolue : $\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} + \ddot{z}\,\vec{k}$

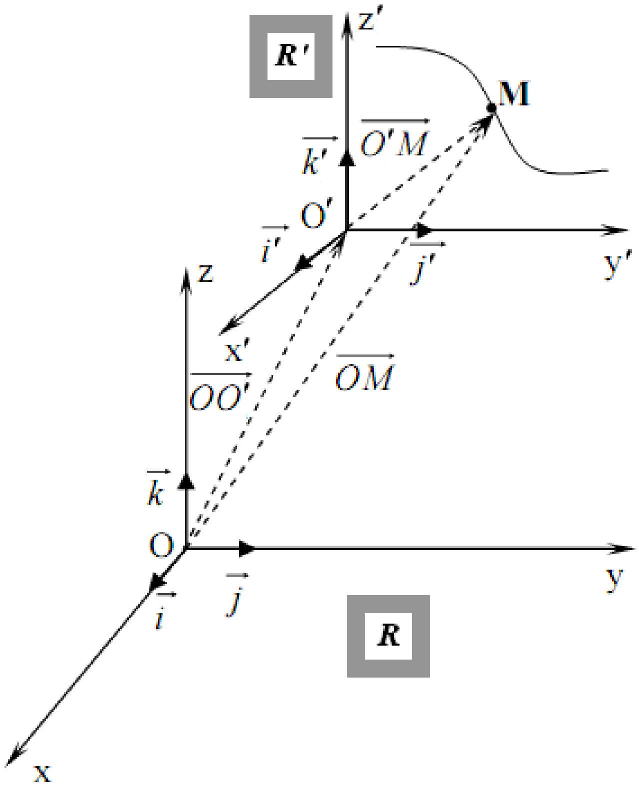
Soit le 2ème référentiel *R'(O',x'y'z')* définit par les vecteurs $(\vec{\imath'}, \vec{\jmath'}, \vec{k'})$. Il est en mouvement par rapport à *R* donc nous l'appelons repère relatif. Dans *R'* on défini :

- ✓ Le vecteur position : $\overrightarrow{O'M} = x'\,\vec{\imath'} + y'\,\vec{\jmath'} + z'\,\vec{k'}$
- ✓ Le vecteur vitesse relative : $\overrightarrow{v_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x'}\,\vec{\imath'} + \dot{y'}\,\vec{\jmath'} + \dot{z'}\,\vec{k'}$
- ✓ Le vecteur accélération relative : $\overrightarrow{a_r} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} = \ddot{x'}\,\vec{\imath'} + \ddot{y'}\,\vec{\jmath'} + \ddot{z'}\,\vec{k'}$

Pour étudier un mouvement bien défini, on utilise les définitions suivantes :

- ➢ le trièdre *Oxyz* (repère *R*) est le repère *absolu* ou référentiel *absolu* ;
- ➢ le trièdre *O'x'y'z'* (repère *R'*) est le repère *relatif* ou référentiel *relatif* ;
- ➢ le mouvement du point *M* par rapport à « *R* » s'appelle *mouvement absolu* ;
- ➢ le mouvement du point *M* par rapport à « *R'* » s'appelle *mouvement relatif* ;
- ➢ le mouvement de « *R'* » par rapport à « *R* » s'appelle *mouvement d'entraînement* ;

II.5.2. Relation entre les positions



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = \overrightarrow{OO'} + x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'}$

II.5.3. Relation entre les vitesses

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}$$

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \frac{d}{dt}(x'\,\vec{i'} + y'\,\vec{j'} + z'\,\vec{k'})$$

Puisque le repère *R'* et mobile alors les vecteurs $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ ne sont pas constants au cours du temps. Leurs dérivées par rapport au temps ne sont pas nulles.

$$\vec{v_a} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right)\right] + \left[\frac{dx'}{dt}\,\vec{i'} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j'} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k'}\right]$$

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + (\dot{x}'\,\vec{i'} + \dot{y}'\,\vec{j'} + \dot{z}'\,\vec{k'})$$

$$\vec{v_a} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \left(x'\frac{d\vec{i'}}{dt} + y'\frac{d\vec{j'}}{dt} + z'\frac{d\vec{k'}}{dt}\right) + \vec{v_r}$$

$$\vec{v_a} = \vec{v_e} + \vec{v_r}$$

Le terme $\vec{v_e}$ est appelé vitesse d'entrainement de *R'* par rapport à *R*. elle peut être considérée comme la vitesse absolue qu'aurai *M* dans *R* si *M* était immobile dans *R'*.

Nous avons écrit précédemment : $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$.

Cette relation reste valable pour n'importe quel vecteur, en particulier pour les vecteurs unitaires $\vec{i'}, \vec{j'}$et $\vec{k'}$. On écrit alors :

$$\frac{d\vec{i'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i'}, \quad \frac{d\vec{j'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j'} \quad \text{et}\ \frac{d\vec{k'}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k'}$$

$\vec{\omega}$: est appelé vecteur vitesse de rotation, il correspond à la rotation des axes de *R'* par rapport à un axe dont la direction est définie par celle de $\vec{\omega}$. Attention $\vec{\omega}$ ne correspond pas à la rotation de *O'* dans *R*.

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + (\vec{\omega} \wedge x'\vec{i}) + (\vec{\omega} \wedge y'\vec{j}) + (\vec{\omega} \wedge z'\vec{k})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$$

$$\overrightarrow{v_e} = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{translation} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}_{rotatio\ n}$$

$\overrightarrow{v_e}$ s'écrit comme addition de deux termes

1) $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$: vitesse de translation de *O'* dans *R*
2) $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$: rotation des axes de *R'* par rapport à *R*

On voit bien que mouvement de *R'* par rapport à *R* peut toujours être décomposé en une translation de *O'*par rapport à *O* et une rotation des trois axes *x'y'z'* par rapport à *R*.

Cas particuliers :

- Si *M* est fixe dans *R'* : $\overrightarrow{v_r} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_e}$
- Si *R'* est fixe par rapport à *R* : $\overrightarrow{v_e} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r}$
- Si *R'* est en mouvement rectiligne par rapport à *R* : $\overrightarrow{v_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$

II.5.4. Relation entre les accélérations

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(x'\frac{d\vec{i}}{dt} + y'\frac{d\vec{j}}{dt} + z'\frac{d\vec{k}}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\dot{x}'\,\vec{i} + \dot{y}'\,\vec{j} + \dot{z}'\,\vec{k})$$

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{(\ddot{x}'\,\vec{i} + \ddot{y}'\,\vec{j} + \ddot{z}'\,\vec{k})}_{\overrightarrow{a_r}}$$

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

$\overrightarrow{a_e}$: Accélération d'entrainement.
$\overrightarrow{a_c}$: Accélération complémentaire ou accélération de coriolis.
$\overrightarrow{a_a}$: Accélération absolue.
$\overrightarrow{a_r}$: Accélération relative.

On peut écrire l'accélération de coriolis sous la forme :

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\dot{x}'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + \dot{y}'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + \dot{z}'(\vec{\omega} \wedge \vec{k}')\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[(\vec{\omega} \wedge \dot{x}'\vec{i}') + (\vec{\omega} \wedge \dot{y}'\vec{j}') + (\vec{\omega} \wedge \dot{z}'\vec{k}')\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\left[\vec{\omega} \wedge (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}')\right]$$

$$\overrightarrow{a_c} = 2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$$

Pour ce qui est de l'accélération d'entrainement on l'écrit sous la forme

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right) + y'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right) + z'\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y'\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z'\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{i}'\right) + y'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{j}'\right) + z'\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{k}'\right)$$
$$+x'\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{i}'}{dt}\right) + y'\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{j}'}{dt}\right) + z'\left(\vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge x'\vec{i}'\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge y'\vec{j}'\right) + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge z'\vec{k}'\right)$$
$$+x'\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y'\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z'\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') + \vec{\omega} \wedge x'(\vec{\omega} \wedge \vec{i}') + y'(\vec{\omega} \wedge \vec{j}') + z'(\vec{\omega} \wedge \vec{k}')$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')\right]$$

$$\overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$$

On écrit finalement l'accélération absolue sous la forme

$$\overrightarrow{a_a} = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'M})\right)}_{\overrightarrow{a_e}} + \underbrace{(2\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r})}_{\overrightarrow{a_c}} + \underbrace{(\ddot{x}'\,\vec{i}' + \ddot{y}'\,\vec{j}' + \ddot{z}'\,\vec{k}')}_{\overrightarrow{a_r}}$$

Cas particuliers :

- Si *M* est fixe dans *R'* : $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{v_r} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e}$
- Si les axes de *R'* ne tournent pas par rapport à *R* (translation) : $\vec{\omega} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{a_c} = 0, \overrightarrow{a_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}$
- Si de plus *R'* est en translation *uniforme* par rapport à *R* : $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r}$
  donc les accélérations mesurées dans les deux repères sont les mêmes

Chapitre III

Dynamique du point matériel

III.1. Généralités

La cinématique a pour objet l'étude des mouvements des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui les provoquent. La dynamique est la science qui étudie (ou détermine) les causes des mouvements de ces corps.

III.2.Principe d'inertie (1ère loi de Newton)

III.2.1. particule libre

Une particule libre est celle qui n'est soumise à aucune interaction. Une telle particule n'existe pas réellement car elle doit être seule dans l'univers ! (Particule isolée). Néanmoins, on peut supposer qu'une particule suffisamment éloignée des autres est isolée.

Si la résultante des interactions appliquées sur une particule est nulle on dit que celle-ci est pseudo isolée, elle réagit comme une particule libre.

III.2.2. Enoncé du principe d'inertie

C'est Galilée qui a le premier suggéré ce principe. Il constitue la première loi de Newton et qui s'énonce comme suit :

« Toute particule libre conserve son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme en l'absence de forces agissant sur elle »

Cette 1ère loi peut aussi s'énoncer :

Si aucune force n'agit sur un objet ou si la force résultante est nulle,

- Un objet au repos reste au repos ;
- Un objet en mouvement continue à se mouvoir à vitesse constante.

Remarque

Comme le mouvement est une notion relative (des observateurs dans des référentiels différents n'observent pas le même mouvement) à quoi est rapporté le mouvement de la particule dans le principe d'inertie.

Cette 1ère loi de Newton, telle qu'elle a été énoncée, ne s'applique pas à un observateur soumis à une accélération. Elle nous amène à définir un référentiel d'inertie.

III.2.3. Référentiels d’inertie ou galiléens

On appelle référentiel d’inertie, un système de référence (ou repère) dans lequel la première loi de Newton est applicable. D’après cette définition, un référentiel d’inertie n’existe pas ; on ne dispose que de référentiels approximatifs.

Exemples

Pour la plupart des expériences que l’on peut réaliser sur terre, le repère au sol (référentiel du laboratoire) constitue un bon repère d’inertie, alors que pour le mouvement d’une planète ce repère lié au sol n’est pas un repère d’inertie.

Si l’on choisit un système d’axes liés au Soleil et dirigés vers certaines étoiles, le mouvement d’une planète du système solaire devient simple (référentiel de Kepler). Pour ce mouvement le repère lié au Soleil est un bon repère d’inertie.

Remarque

- ✓ Tout système de coordonnées qui se déplace à vitesse constante par rapport à un référentiel d’inertie, peut être lui-même considéré comme un référentiel d’inertie.
- ✓ Les vitesses et les accélérations des corps, mesurées dans les référentiels galiléens, sont dites absolues et celles mesurées dans les référentiels non galiléens sont dites relatives.

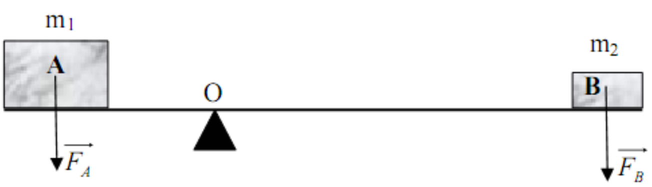
III.2.4. Masse et centre de masse

Masse

La masse d’un système correspond à la quantité de matière qu’il renferme. Elle est invariable dans la mécanique newtonienne. Elle caractérise l’inertie d’un corps soit sa résistance à tout changement du vecteur vitesse.

Centre de masse ou Barycentre

Appelé aussi centre d’inertie ou centre de gravité. Il a été défini au début par le physicien Archimède. Pour avoir la relation donnant le point centre d’inertie d’un système quelconque, étudions l’équilibre du système présenté dans la figure suivante :



Pour que le système soit en équilibre il faut que la somme des moments des forces par rapport à O soit nulle

$$\sum \overrightarrow{M^{0}_{\vec{F}_i}} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{M^{0}_{\vec{F}_A}} + \overrightarrow{M^{O}_{\vec{F}_B}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OA} \wedge m_1 \vec{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m_2 \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 \overrightarrow{OA} \wedge \vec{g} + m_2 \overrightarrow{OB} \wedge \vec{g} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \left(m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB}\right) \wedge \vec{g} = \vec{0} \qquad \Rightarrow \qquad m_1 \overrightarrow{OA} + m_2 \overrightarrow{OB} = \vec{0}$$

Les mathématiciens ont généralisé cette égalité pour un système quelconque représenté par la figure ci-dessous

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} + \ldots\ldots m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

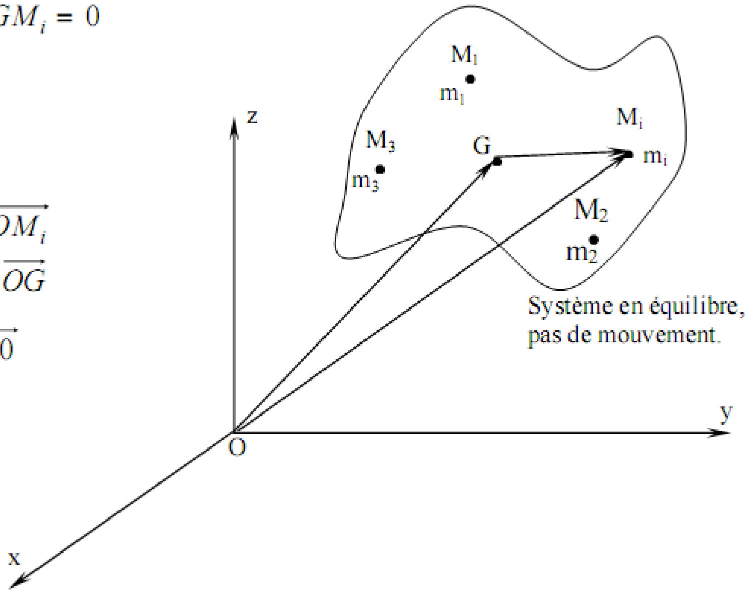
$$\Rightarrow \quad \sum_i m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

D'autre part,

$$\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}$$

Donc $\quad \sum_i m_i\left(\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG}\right) = \vec{0}$



$$\Rightarrow \sum_i m_i\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}}{M}$$

M: représente la masse totale du système en équilibre.

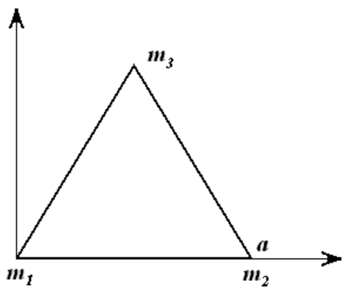
Cette dernière relation donne le centre d'inertie d'un système constitué de masses m_i situées aux points M_i. Si le système forme un milieu continu, la somme devient intégrale, et par conséquent, la relation précédente deviendra :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\iiint_M \overrightarrow{OM}\ dM$$

L'intégrale est triple parce que la masse est répartie en volume, trois dimensions.

Exemple

Soient trois masses m_1, $m_2 = 2\ m_1$ et $m_3 = 3\ m_1$ posées aux sommés d'un triangle équilatéral de coté a (voire figure ci-dessous). Déterminer la position du centre de gravité du système.



$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x_g = \dfrac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{7}{12}a \\ y_g = \dfrac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}a \end{cases}$$

III.3. Quantité de mouvement

Le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel de masse m et se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ est défini par le vecteur $\vec{P}$ donné par :

$$\vec{P} = m\,\vec{v}$$

Le principe d'inertie peut s'énoncer alors de la façon suivante :

« Une particule libre, se déplace avec une quantité de mouvement constante dans un repère galiléen. »

III.3.1. Conservation de la quantité de mouvement

Soient deux particules libres de masses m_1 et m_2 isolées du monde. Elles ne sont soumises qu'à leur interaction mutuelle. Leurs vitesses individuelles ne sont pas constantes.

La quantité de mouvement totale du système à l'instant t est :

$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = m_1\,\vec{v}_1 + m_2\,\vec{v}_2$

A un instant t' : $\vec{P}' = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' = m_1\,\vec{v}_1' + m_2\,\vec{v}_2'$

A tout instant, la quantité de mouvement totale du système des deux particules est conservée

$$\vec{P} = \vec{P}'$$

$\Rightarrow \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2'$

$\Rightarrow \vec{P}_1' - \vec{P}_1 = \vec{P}_2 - \vec{P}_2'$

$\Rightarrow \Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2$

Une interaction produit un échange de quantité de mouvement. La quantité de mouvement « perdue » par une particule est égale à la quantité de mouvement « gagnée » par l'autre.

Exemple

Un fusil de masse 0,8 kg tire une balle de masse 0,016 kg animée d'une vitesse de 700 m/s. calculer la vitesse de recule du fusil.

Avant le tir : la quantité de mouvement totale est nulle

Après le tir :

La quantité de mouvement de la balle est : $P_1 = m_1\,v_1$ = 0,016 x 700 = 11,2 kg m/s

La quantité de mouvement du fusil est $P_2 = m_2\,v_2 = P_1 \Longrightarrow v_2 = \frac{m_1}{m_2} v_1 \Longrightarrow v_2 = 14$ m/s

III.4. Notion de Force (2ème loi de Newton)

Toute cause capable de modifier, dans un référentiel galiléen, le vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est appelée *FORCE*.

On peut très bien définir une *force moyenne*, pendant un intervalle de temps Δt telle que,

$$\vec{F}_{moy} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

Ou encore, *force instantanée*, telle que

$$\vec{F} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Différents types de forces existent :

- Forces d'interaction à distance (Forces de gravitation) ;
- Forces électromagnétiques ;
- Forces nucléaires ;
- Forces de contact (Forces de frottement) ;

✓ **Principe Fondamental de la Dynamique (PFD)**

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un système est égale à la dérivée du vecteur quantité de mouvement du centre d'inertie de ce système.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Si la masse du système est constante alors

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Lorsqu'on soumet une masse *m* constante à une force $\vec{F}$, elle va acquérir une accélération $\vec{a}$, on écrit alors : $\vec{F} = m\vec{a}$

Remarque

Le mouvement de translation d'un système se ramène à celui de son centre d'inertie G auquel on applique toutes les forces.

La force est une notion mathématique : les mots appliquée ou agissant sur ne signifient nullement que quelque chose est réellement appliquée sur la particule.

III.5. Principe de l'action et de la réaction (3ème loi de Newton)

Soient deux points matériels (1) et (2) interagissant entre eux. Le principe de conservation de la quantité de mouvement pouvait s'écrire pendant un intervalle de temps Δt

$$\Delta\vec{P}_1 = -\Delta\vec{P}_2 \Rightarrow \frac{\Delta\vec{P}_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta\vec{P}_2}{\Delta t}$$

Avec $\Delta t \to 0$ on aura

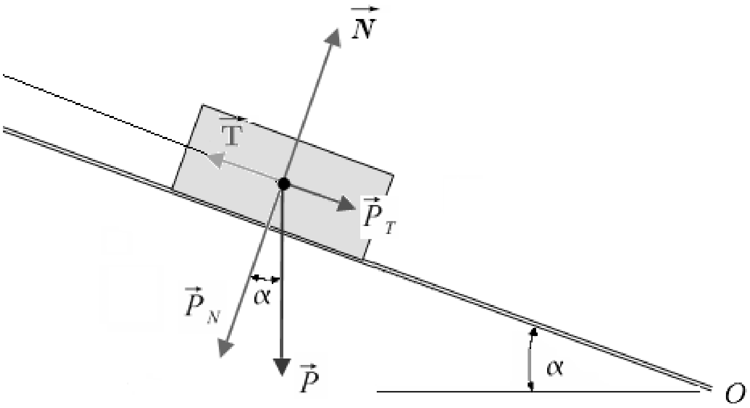
$$\frac{d\vec{P}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{d\vec{P}_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

La force exercée par (1) sur (2) $\vec{F}_{12}$ est égale et opposée à celle exercée par (2) sur (1) $\vec{F}_{21}$. Ces deux actions (forces) s'exercent simultanément et sont de même nature.

Exemple

Une brique de masse *m* est maintenue en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale par un fil non élastique de masse négligeable. Le contacte entre le solide et le plan incliné est sans frottement

1. Rappeler à quelle condition le solide est en équilibre.
2. Trouver les expressions de la tension *T* du fil et la réaction *N* du plan en fonction de *m*, *g et* α.
3. On coupe le fil, déduire l'expression de l'accélération de la brique. Quelle est la nature du mouvement.



1. Condition d'équilibre :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = \vec{0}$$

2. Expressions de T et N

Par projection sur l'axe tangentiel

$$P_T - T = 0 \Longrightarrow T = mg\sin\alpha$$

Par projection sur l'axe normal

$$P_N - N = 0 \Longrightarrow N = mg\cos\alpha$$

3. Accélération de la brique

Une fois le fil coupé, la tension T n'existe plus. On écrit donc le PFD

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}$$

Par projection sur l'axe tangentiel (direction du mouvement)

$P_T = m\,a \Rightarrow mg \sin\alpha = m\,a$

Donc $a = g \sin\alpha$

III.6. Application des lois de Newton – Les forces

III.6.1. Loi de la gravitation universelle

a) Introduction

La force de gravitation, appelée aussi force d'interaction gravitationnelle, a été décrite pour la première fois par Newton en 1650.Elle décrit l'attraction entre deux masses placées l'une au voisinage de l'autre. Cette action est généralement de faible intensité, sauf quand des masses très importantes, comme la Terre par exemple, interviennent.

Entre deux objets ponctuels M_1et M_2 de masses respectives m et M, distants de r, il existe une force *d'attraction* gravitationnelle de grandeur :

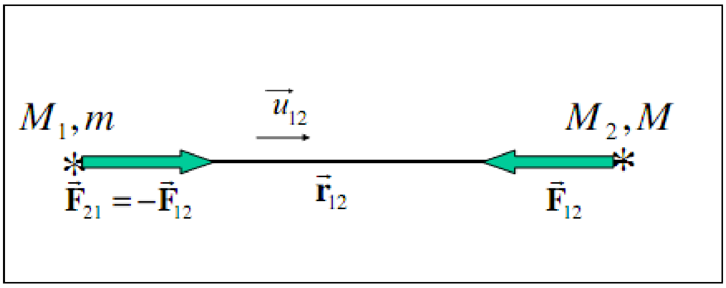
$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

où $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ SI est la constante de la gravitation universelle.

Plus précisément, la force exercée par le corps 1 sur le corps 2 $\vec{F}_{12}$, s'écrit sous la forme

$$\vec{F}_{12} = -\,G\frac{mM}{r^2}\vec{u}_{12} = -\,G\frac{mM}{r^3}\vec{r}_{12}$$

avec r_{12} la distance entre les deux corps, et $\vec{r}_{12}$ le vecteur position dirigé du corps 1 vers le corps 2. $\vec{u}_{12}$ le vecteur unitaire porté par $\vec{r}_{12}$. Quant à elle, la force exercée par le corps 2 sur le corps 1, $\vec{F}_{21}$, s'obtient en vertu du principe de l'action et de la réaction : $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Voir figure ci-dessous.



b) Gravitation à la surface d'un astre

On peut alors préciser ce que l'on appelle le poids d'un objet : le poids est la force gravitationnelle qui agit sur un corps. Entre deux corps de masses m et M, distants de r, il existe une force d'attraction de grandeur :

$$P = G\frac{mM}{r^2} = m\,G\frac{M}{r^2} = m\,g$$

où l'on a noté g la norme de l'accélération gravitationnelle due à l'astre de masse *M*,

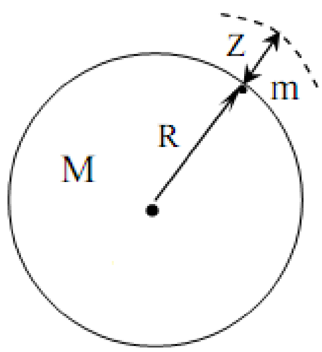
$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Si le corps se trouve à une hauteur z par rapport à la surface de l'astre de rayon *R*, alors

$$P = G\frac{mM}{(R+z)^2}$$

$$\Rightarrow g = G\frac{M}{(R+z)^2} = G\frac{M}{R^2}\,\frac{R^2}{(R+z)^2}$$

$$\Rightarrow g = g_0\,\frac{R^2}{(R+z)^2}$$



avec g_0 : champ à la surface de l'astre.

c) Troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire

Autour d'un corps sphérique de masse *M*, nous avons la relation suivante entre la période orbitale *T* et le rayon de l'orbite circulaire *r* d'un satellite de masse *m* très petite devant *M* (*G* est la constante de la gravitation universelle)

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

En effet, la vitesse orbitale, nécessairement uniforme dans le cas d'un tel mouvement circulaire, vaut :$v = \frac{2\pi r}{T}$

Et sachant que l'on a égalité de la force centrifuge avec la force gravitationnelle centripète:

$$m\,\frac{v^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$$

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = G\frac{M}{r}$$

Finalement en a bien :

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

d) Satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire de masse m décrivant une orbite circulaire à une distance r du centre de la terre doit effectuer une rotation en 24 heures (période de rotation de la terre).

On a égalité de la force gravitationnelle centripète avec la force centrifuge:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\,\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$$

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

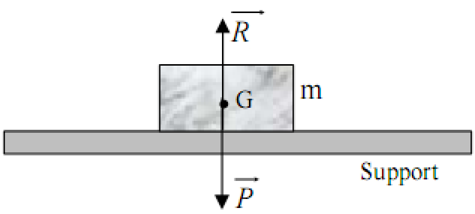
$$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2}{T^2} r \Longrightarrow r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

Le satellite géostationnaire doit donc être placé sur cette orbite de rayon : $r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

III.6.2. Les forces de contact

a) Réaction d'un support

Considérons un objet placé sur un support solide. L'objet ne peut pas pénétrer dans le support: il y a une force appelée réaction du support et notée R ou N qui s'y oppose. Cette réaction s'applique sur l'objet au niveau du contact objet-support, et sa direction est orthogonale à la surface du support au niveau du contact.

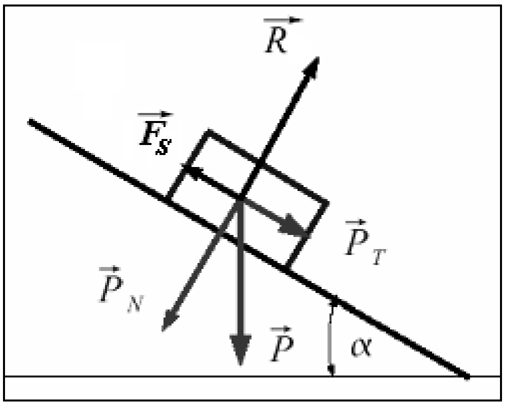


L'objet étant en équilibre $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{R} = -\vec{P}$

b) Frottement solide

Les forces de frottement sont des forces qui apparaissent soit lors du mouvement d'un objet soit cet objet est soumis à une force qui tend à vouloir le déplacer. Le frottement s'oppose au déplacement des objets en mouvement.

✓ **Frottement statique :** (Solide qui ne bouge pas sur un plan incliné)



Pour toute une série de valeurs α inférieur à une valeur limite α_o qui au-delà correspond au début du glissement, la brique reste immobile. On peut alors écrire :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_s} = \vec{0}$$

Par projection sur les deux axes on aura :

$$P_T = F_s = mg\sin\alpha$$

$$P_N = R = mg\cos\alpha$$

On divisant les deux équations l'une sur l'autre on aura

$$\tan\alpha = \frac{F_s}{R}$$

Lorsque α augmente la composante tangentielle du poids P_T augmente. La nature des surfaces en contact permet à la force de frottement F_s de s'adapter de façon à maintenir l'équilibre. Cette force de frottement F_s atteint sa valeur limite pour α_o. on définit alors le coefficient de frottement statique

$$\mu_s = \tan\alpha_o$$

Le coefficient de frottement est indépendant des forces et ne dépend que de la nature des surfaces en contact (matériaux, forme, structure moléculaire…).

✓ **Frottement cinétique (dynamique)**

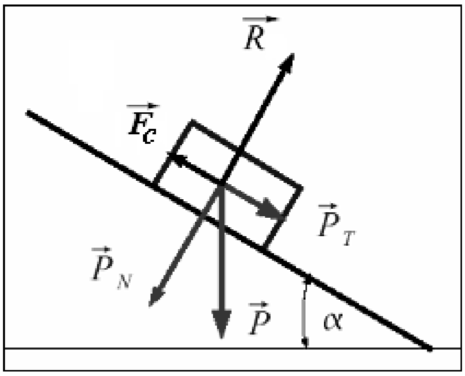
En faisant croitre α au-delà de la valeur limite α_o, la brique se met à glisser. Son mouvement est uniformément accéléré

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F_c} = m\vec{a}$$

De même que précédemment, on obtient une condition de dynamisme du système :

$$\mu_c = \frac{F_c}{R}$$

Le coefficient de frottement cinétique est dans la plupart des cas inférieur au coefficient de frottement statique.



Exemple1

On considère un camion immobile à benne baissée. On pose sur la benne une brique de masse m = 3 kg. Le camion soulève sa benne progressivement. Les coefficients de frottement statique et cinétique sont respectivement $\mu_s = 0{,}6$ et $\mu_c = 0{,}3$.

1. Calculer l'angle α_o de la benne pour provoquer le glissement de la brique.
2. Si α = 45°, déterminer l'accélération de la brique (g = 10 ms^{-2}).

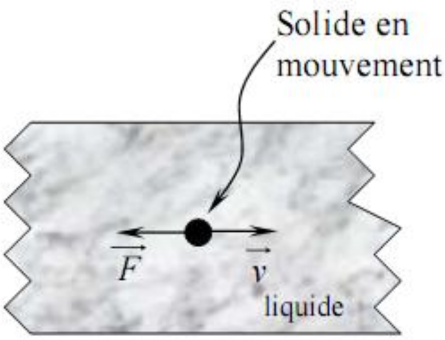
Exemple 2

Une boite en acier pesant 300 N repose sur un plan en acier horizontal. Les coefficients de frottement statique et cinétique sont respectivement $\mu_s = 0{,}8$ et $\mu_c = 0{,}4$. On pousse successivement cette boite avec une force horizontale de 140 N, 200 N et 300 N.

Dans chacun des cas, quelle est la force de frottement correspondante.

c) Frottement visqueux

Le frottement visqueux est lié au mouvement de l'objet M dans un milieu fluide (air, liquide ou autre). Il est créé par les particules du fluide qui viennent choquer la surface de l'objet M quand ce dernier est en mouvement. Il existe des modélisations de ce phénomène qui sont très complexes. Nous nous limiterons ici à donner une loi approchée déterminée expérimentalement. Pour de faibles vitesses, le frottement est quasiment proportionnel en norme à la vitesse de déplacement de l'objet.



$$\vec{F} = -k\,\vec{v}$$

$\vec{F}$: force de frottement

$\vec{v}$: vitesse de l'objet M

k : constante positive

Exemple

Un projectile de masse m est lancé d'un point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_o}$ contenue dans le plan Oxy et faisant un angle θ avec l'axe horizontal Ox. Il est soumis à une force de freinage proportionnelle à sa vitesse $\vec{F} = -k\,\vec{v}$.

1. Ecrire les équations différentielles du mouvement.
2. Déduire les composantes de la vitesse. Que deviennent elles lorsque t tend vers l'infini

d) Forces de tension

L'un des plus importants mouvements oscillatoires est le mouvement sinusoïdal dans la mesure où il représente beaucoup de mouvements réels. Pour la force de tension ou force de rappel, l'exemple le plus simple est la force de rappel du ressort.

$$\vec{F} = -k\,(l - l_o)\,\vec{u}$$

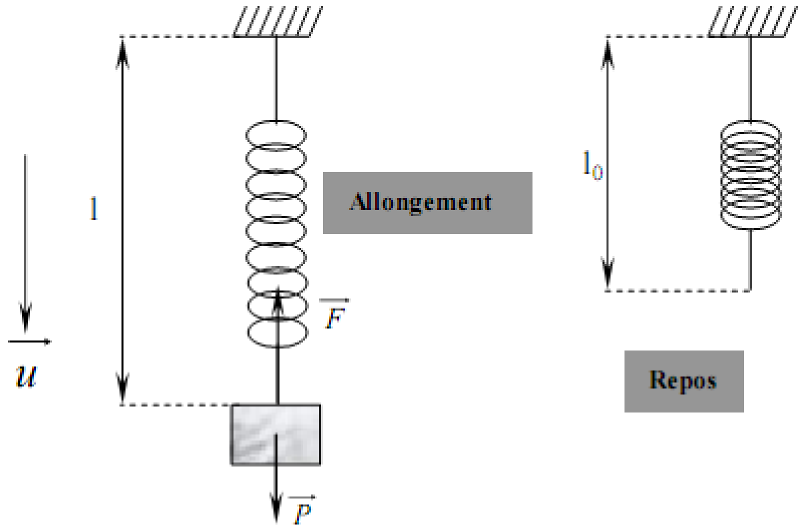
$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{u}$$

k : constante appelée constante de raideur;

l : longueur du ressort,

l_o: est la longueur à vide (non étiré)

$\vec{u}$: vecteur unitaire dirigé suivant la direction du fil.

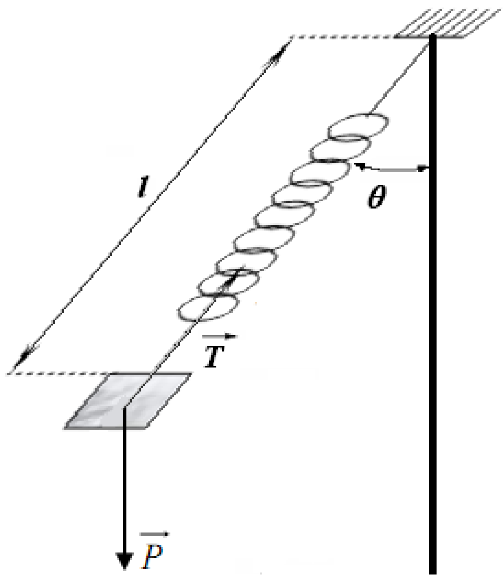


Le signe négatif de la relation traduit le fait que cette force s'oppose à l'allongement.

Exemple

On dispose d'un ressort de raideur k = 20 Nm^{-1}, de masse négligeable, de longueur à vide l_o = 10 cm et d'une masse m = 100g considéré comme ponctuelle fixée à l'une de ces extrémités. L'autre extrémité est fixée à une tige verticale qui, en tournant entraine le ressort et la masse d'un mouvement de rotation uniforme. Après un régime transitoire, l'angle θ entre le ressort et la tige verticale prend une valeur constante égale à 60°.

Calculer la tension du ressort ainsi que sa longueur.



III.7 Moment cinétique d'une particule

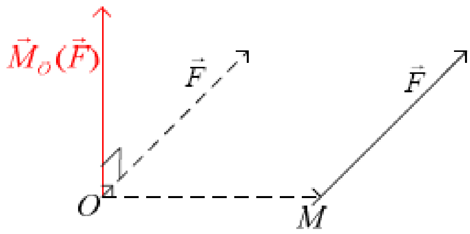
La quantité de mouvement s'est révélée très utile dans l'étude des mouvements de translation. Le **moment cinétique** est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans le cas des mouvements de rotation ; on l'appelle aussi **quantité de mouvement de rotation**.

III.7.1. Moment d'une force en un point

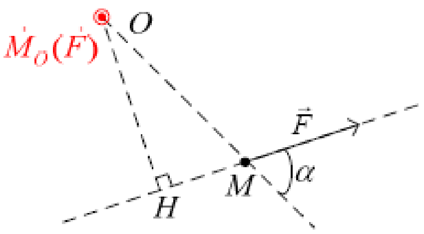
Soit une particule M de masse m se trouvant en un point repéré par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et soumis à une force $\vec{F}$. On définit le moment de $\vec{F}$ par rapport au point O par :

$$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Le vecteur $\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})$ est donc perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{F}$



Dans le plan $(O, M, \vec{F})$:



$$\left\|\vec{M}_O(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \times \left\|\vec{F}\right\| \times |\sin\alpha| = OH \times \left\|\vec{F}\right\|$$

Si l'axe $(M, \vec{F})$ passe par O, $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0}$

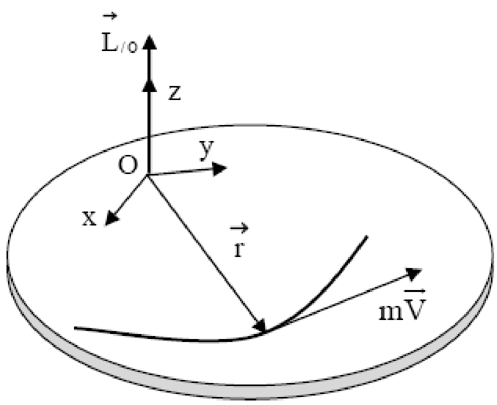
III.7.2. Moment cinétique

Si la particule M de masse m se déplace à la vitesse $\vec{v}$, son moment cinétique $\vec{L}$ par rapport au point O, est défini par :

$$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \quad \text{ou} \quad \vec{L}_o = \vec{r} \wedge m\,\vec{v}$$

$\vec{P}$ étant la quantité de mouvement de M

$$\left[\vec{L}_o\right] = M\,L^2T^{-1} \ \ (kg\,m^2s^{-1})$$



L'intérêt de l'introduction de cette grandeur vient de la relation entre sa variation temporelle (dérivée) et la somme des moments des forces extérieures appliquées au système: c'est le *théorème du moment cinétique*.

III.7.3. Théorème du moment cinétique

$$\vec{L}_o = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad car\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{v} \wedge m\,\vec{v} + \vec{r} \wedge \Sigma\,\vec{F} \qquad car\ \vec{v} \wedge m\,\vec{v} = 0$$

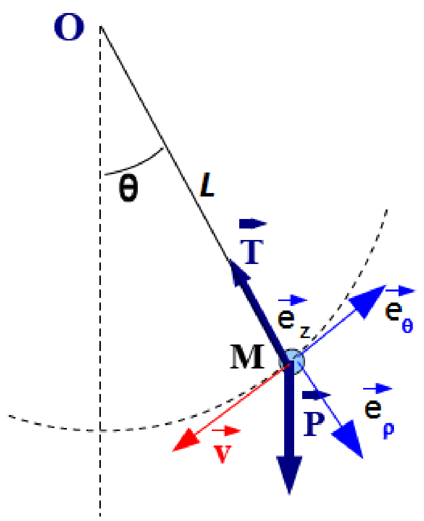
$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{r} \wedge \Sigma\,\vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{F})\ c'est\ le\ \mathrm{T.M.C}$$

Cette relation est très similaire au principe fondamental de la dynamique P.F.D. Si cette dernière relie forces extérieures appliquées au point matériel et variation de sa quantité de mouvement, le théorème du moment cinétique T.M.C relie la somme des moments de ces forces par rapport à un point donné et variation du moment cinétique par rapport à ce même point. Or le moment d'une force par rapport à un point traduit en quelque sorte la "capacité" de cette force à faire "tourner" le système autour de ce point. Intuitivement, le théorème du moment cinétique est une sorte d'équivalent de la relation fondamentale de la dynamique pour ce qui est de la rotation du point *M* par rapport à *O*.

III.7.4. Application : Le pendule simple

On considère un point matériel de masse m relié à un point fixe O d'un référentiel galiléen par l'intermédiaire d'un fil tendu et de masse négligeable et de longueur *L*. Le mouvement de ce pendule simple est supposé dans un plan vertical. La masse m est soumise à deux forces : le poids de la masse $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$.



Le mouvement de *M* étant plan, on a priori deux inconnues, ρ(t) et θ(t) qui sont les coordonnées polaires du point M en prenant comme origine le point O et comme axe polaire, l'axe vertical orienté vers le bas. Dans notre cas, il est évident que le fil étant tendu, on a nécessairement ρ(t) = *L*. Il reste donc une seule inconnue θ(t) qu'on peut obtenir en utilisant soit le principe fondamental de la dynamique (une page de calcul!), la conservation de l'énergie mécanique totale (car par chance, la tension du fil ne travaille pas) ou bien la conservation du moment cinétique.

$\overrightarrow{OM} = L\,\vec{e}_\rho$

$\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\,\vec{v} = L\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{L}_o = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \Longrightarrow \vec{L}_o = L\,\vec{e}_\rho \wedge m\,L\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

$\vec{L}_o = m\,L^2\,\dot{\theta}\,(\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\theta)$

Le moment cinétique de la masse par rapport à O est donc $\vec{L}_o = m\,L^2\,\dot{\theta}\,\vec{e}_z$

Les moments de la tension et du poids par rapport à O sont :

$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}\;car\;\overrightarrow{OM} \parallel \vec{T}$

$\vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

$= -\left(\|\overrightarrow{OM}\|\,\|\vec{P}\|sin\theta\right)\vec{e}_z$

$= -(mg\,L\,sin\theta)\vec{e}_z$

$\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(m\,L^2\,\dot{\theta}\,\vec{e}_z\right) = m\,L^2\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_z$

En appliquant le théorème du moment cinétique on aura :

$\dfrac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_o(\vec{P}) \Longrightarrow m\,L^2\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_z = -(mg\,L\,sin\theta)\vec{e}_z$

$m\,L^2\,\ddot{\theta} = -mg\,L\,sin\theta$

$\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}sin\theta = 0$

Pour θ faible on a $sin\theta \approx \theta$ donc on écrit finalement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Cette équation différentielle du mouvement est l'équation d'un oscillateur de pulsation

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{L}}\;\; d'ou\;\; T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

T étant la période du pendule

III.8. Forces d'inertie

Dans un référentiel non inertiel, on ne peut appliquer le PFD car celui-ci n'est valable, justement, que dans les référentiels d'inertie. Cette situation est très courante, puisqu'on peut très facilement avoir un corps qui ne constituerait pas un référentiel d'inertie. Pour cela, il suffit que ce corps soit accéléré (ainsi son mouvement n'est plus rectiligne et/ou uniforme).

L'exemple le plus simple est celui d'un camion subissant une accélération non nulle par rapport à un référentiel inertiel (par exemple le sol). On peut aussi songer à un corps en mouvement circulaire : dans la mesure où ce corps subit une accélération centripète, il est donc accéléré et ne constitue donc pas un référentiel d'inertie.

Il s'avère que l'on peut tout de même continuer à employer le PFD pourvu que… aux forces normalement présentes dans le problème, on prenne la peine d'ajouter des forces additionnelles dites fictives que l'on appellera plutôt forces d'inertie.

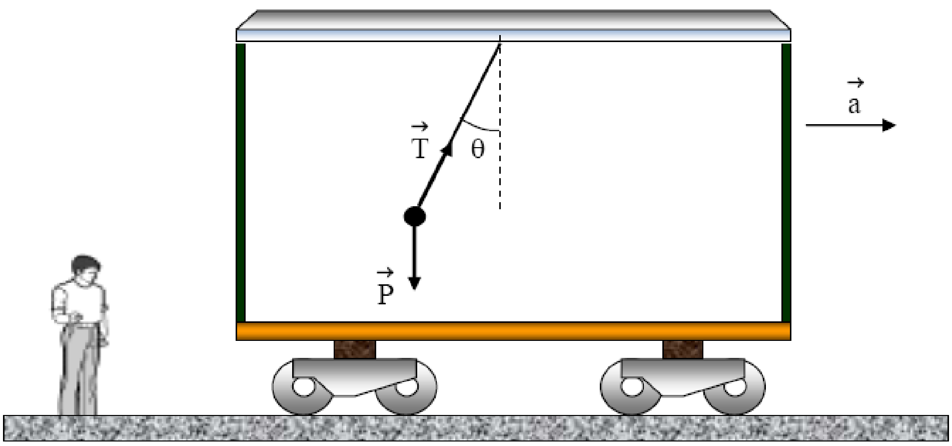
Considérons, par exemple, deux référentiels, *R* et *R*', le premier étant inertiel, le deuxième étant non inertiel. Soit un corps de masse *m*, supposé immobile dans *R*' et subissant une somme de forces appliquées $\sum \vec{F}_{ext}$. Voyons dans les deux exemples qui suivent comment cette situation peut se décliner.

Exemple 1: La statique dans un référentiel non inertiel (ou « principe de D'Alembert »)

Dans *R* on peut écrire le PFD puisque ce référentiel est inertiel. Cette somme de forces donne donc naissance à une accélération $\vec{a}$ dans *R*

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$



Dans le référentiel *R*', tout ce que l'on peut dire c'est que le corps est immobile (par hypothèse). Ainsi son accélération $\vec{a}'$, mesurée dans *R*', doit être nulle.

Pour que le PFD exprimé dans *R* puisse représenter l'immobilité du corps dans *R*' on peut remarquer que :

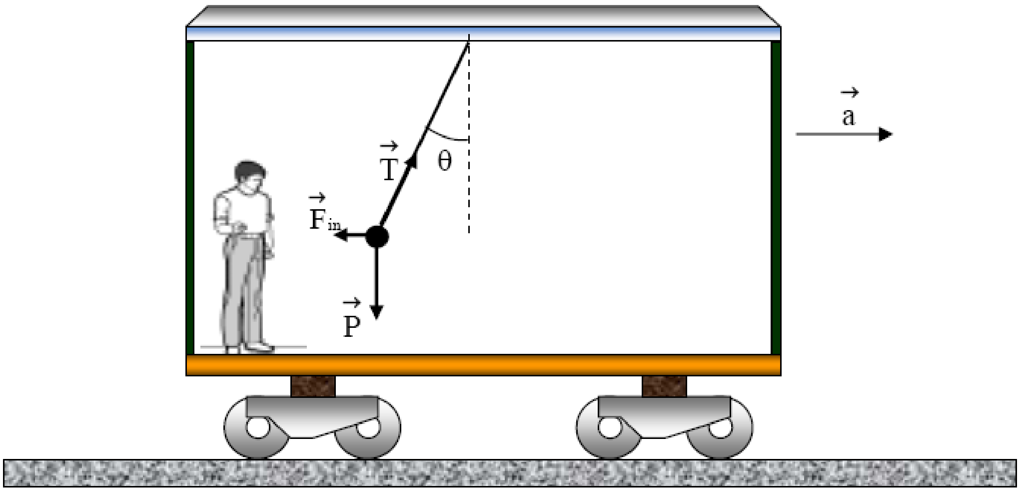
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$$

On peut donc identifier le vecteur nul au produit de la masse par l'accélération mesurée dans *R*' : $m\vec{a}' = \vec{0}$. Donc,

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = m\vec{a}'$$

Ainsi, dans le référentiel *R*', nous obtenons une relation fort semblable à celle du PFD dans un référentiel d'inertie, si ce n'est qu'aux forces du problème initial il faut ajouter une force additionnelle (la fameuse force d'inertie) d'expression $-m\vec{a}$.

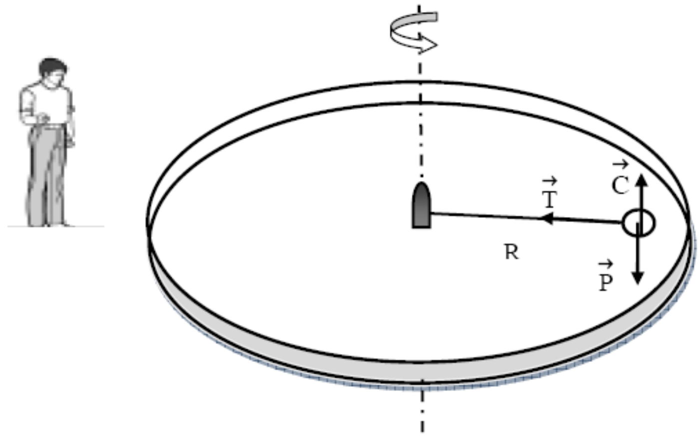
$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{in} = 0$$



Cette approche de la statique dans un référentiel non galiléen est appelée principe de D'Alembert. Le terme $-m\vec{a}$ est souvent appelé force de D'Alembert ou pseudo force.

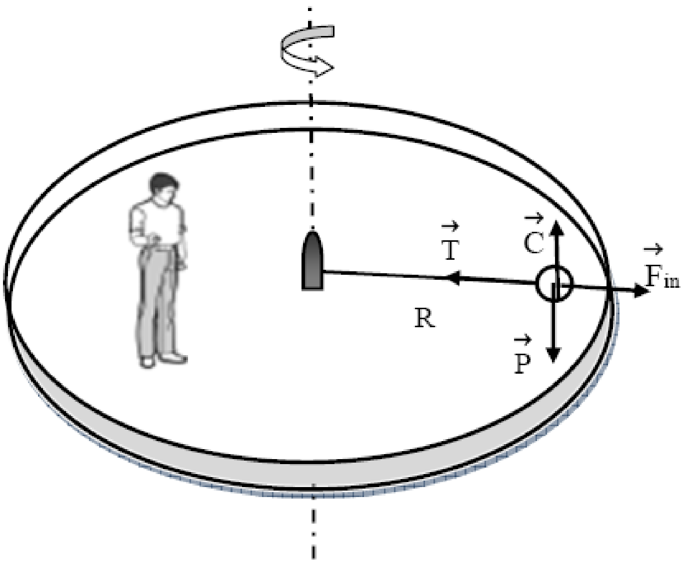
Exemple 2: La force centrifuge comme conséquence du principe de D'Alembert dans un référentiel tournant.

Un corps de masse *m* en rotation uniforme subit une accélération centripète $\vec{a}$ (purement radiale et dirigée vers l'intérieur de la trajectoire circulaire) et donc ne constitue pas un référentiel d'inertie. Dans le référentiel de ce corps, une expression du PFD peut s'écrire si on ajoute une force $-m\vec{a}$ aux forces initialement définies dans le problème. Puisque ici $\vec{a}$ est dirigée vers le centre, alors $-m\vec{a}$ est dirigée vers l'extérieur de la trajectoire : il s'agit de la fameuse force centrifuge qui est l'opposée de l'accélération centripète multipliée par la masse du corps ! Dans le référentiel tournant du corps en rotation, les forces sont compensées par la nouvelle force centrifuge et c'est ce qui explique l'immobilité du corps telle que constatée dans *R*'.



$$\underbrace{\vec{P}+\vec{C}}_{0}+\vec{T}=m\,\vec{a} \quad \text{soit} \quad \left|\vec{T}\right|=m\frac{V^2}{R}$$

$$\underbrace{\vec{P}+\vec{C}}_{0}+\vec{T}+\vec{F}_{in}=0, \quad \text{soit} \quad \vec{F}_{in}=-\vec{T}$$



Cet exemple peut s'appliquer directement au cas d'une planète en mouvement circulaire et uniforme autour d'une étoile : la planète, dans son référentiel, est en équilibre en raison de l'annulation de la force centripète (accélération centripète multipliée par la masse du corps) par la nouvelle force d'inertie centrifuge.

- **PFD dans un référentiel non galiléen**

Soient R un référentiel galiléen et R' un référentiel non galiléen. R' est mobile par rapport à R. R est le référentiel absolu. R' est le référentiel relatif. On désigne par $\overrightarrow{a_a}$ l'accélération du point M de masse m dans le repère R et par $\overrightarrow{a_r}$ l'accélération du même point dans le repère R'.

La loi de composition des accélérations donne:

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c} + \overrightarrow{a_r}$$

Le principe fondamental de la dynamique dans R s'écrit:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\overrightarrow{a_a} = m\overrightarrow{a_e} + m\overrightarrow{a_c} + m\overrightarrow{a_r}$$

Dans le repère R', le principe fondamental de la dynamique est

$$m\overrightarrow{a_r} = m\overrightarrow{a_a} - m\overrightarrow{a_e} - m\overrightarrow{a_c} = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$\vec{F}_e$ est la force d'inertie d'entraînement,

$\vec{F}_c$ est la force d'inertie de Coriolis.

Dans le référentiel non galiléen, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit de la même façon que dans le repère galiléen à condition de tenir compte des forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

Exercice 1

Un bus freine énergiquement. Son accélération dans le freinage vaut 3 m/s^2. Quelle est l'inclinaison que doivent prendre les passagers debout pour demeurer en équilibre sans se tenir ?

- Rép. 17° par rapport à la verticale

Exercice 2

Un cycliste passe à une vitesse de 36 km/h dans un virage dont le rayon de courbure est de 20 m. Quelle est son inclinaison relativement à la verticale ?

- Rép. 27°

Chapitre IV

Travail et Energie

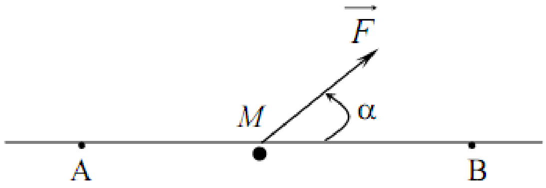
IV.1. Travail d'une force

IV.1.1. Force constante sur un déplacement rectiligne

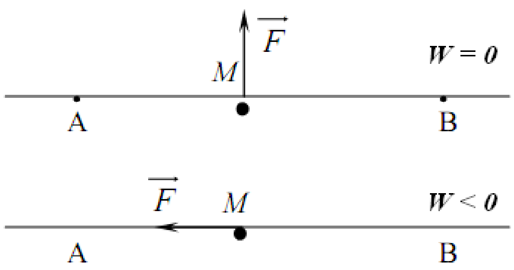
Soit une force constante agissant sur un point matériel M. Sous l'effet de $\vec{F}$, M se déplace entre les points A et B. Par définition, le travail de la force $\vec{F}$ sur le déplacement rectiligne AB est donné par :

$$w_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = F.AB\cos\alpha$$

α est l'angle que fait $\vec{F}$ avec $\overrightarrow{AB}$



Remarque



Le travail est soit positif, nul ou négatif selon la direction de la force $\vec{F}$ par rapport au déplacement.

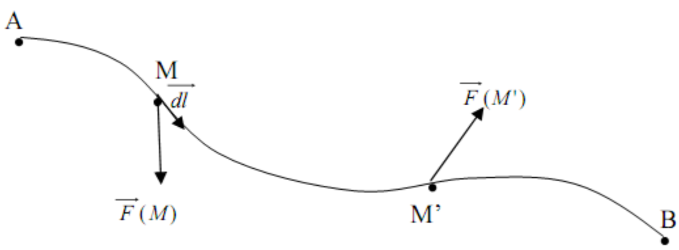
L'unité de travail, dans le système MKSA, est le Joule.

IV.1.2. Travail élémentaire

Dans le cas où la force $\vec{F}$ varie au cours de déplacement qui peut être quelconque, il n'est plus possible d'utiliser l'expression précédente. On décompose le trajet AB en une succession de déplacements élémentaires $\overrightarrow{dl} = \overrightarrow{MM'}$ infiniment petits et donc rectilignes.

Sur $\overrightarrow{MM'}$, la force $\vec{F}$ peut être considéré comme constante ; alors on définit le travail élémentaire donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$



IV.1.3. Force variable sur un déplacement quelconque

Pour obtenir le travail total sur le déplacement total, il suffit d'additionner les travaux élémentaires.

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{dl}$$

IV.1.4. Travail de la force de pesanteur

$h = z_M - z_{M'}$

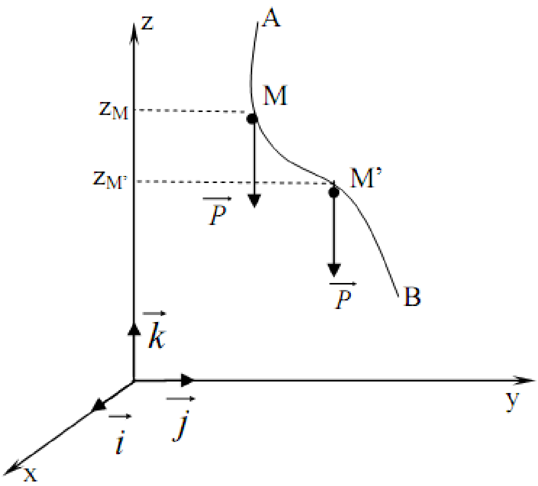
$w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot \overrightarrow{dl}$

et $\vec{P} = -P\,\vec{k}$, $\overrightarrow{dl} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$

$\Rightarrow \quad \vec{P}\,\overrightarrow{dl} = -P\,dz$

donc, $w_{\vec{P}} = \int_M^{M'} \vec{P} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_M^{M'} -P dz = -P(z_{M'} - z_M)$

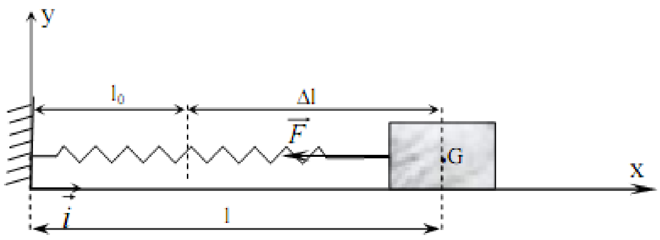
$\Rightarrow \quad w_{\vec{P}} = P(z_M - z_{M'}) = P\,h = mg\,h$



IV.1. 5. Travail d'une force élastique

$\vec{F} = -k\,\Delta l\vec{i} = -k(l - l_0)\vec{i}$

$= -k\,x\vec{i}$



$dw_{\vec{F}} = \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = -kx\vec{i}\,dx\vec{i} = -kxdx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$

Lorsque $\vec{F}$ passe de la position x_1 à x_2, on a :

$$w_{\vec{F}} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{F}\,\overrightarrow{dl} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right)$$

IV.2. Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le rapport du travail de celle-ci au temps mis pour l'accomplir. Selon la durée considérée, cette puissance est dite moyenne ou instantanée. L'unité de la puissance, dans le système MKSA, est le Watt.

Puissance moyenne : $P_{moy} = \dfrac{\Delta w_{\vec{F}}}{\Delta t}$

Puissance instantanée : $P(t) = \dfrac{dw_{\vec{F}}}{dt}$

La puissance d'une force $\vec{F}$ qui dans l'intervalle de temps dt parvient à mouvoir un mobile de la distance $\overrightarrow{dl}$ (i.e. lui confère la vitesse $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{dl}}{dt}$) peut s'écrire,

$$P(t) = \frac{dw_{\vec{F}}}{dt} = \frac{\vec{F}.\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

IV.3. Energie

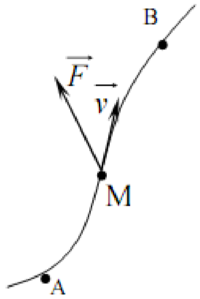
IV. 3.1. Energie cinétique

On définit l'énergie cinétique d'un point matériel *M*, de masse *m* et animé avec une vitesse $\vec{v}$, par la grandeur E_c , telle que :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Soit un point matériel *M*, de masse *m*, en déplacement entre les points *A* et *B* sous l'action d'une force extérieure $\vec{F}$. Selon le principe fondamental de la dynamique, on a :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$



Le travail élémentaire de $\vec{F}$ est donné par :

$$dw_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt$$

car $\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{dl}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{dl} = \cdot\,\vec{v}(t)\,dt$

il vient $\quad dw_{\vec{F}} = \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$

Le travail effectué entre les points *A* et *B* sera :

$$w_{\vec{F}} = \int_A^B \vec{F}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \int_A^B dE_c = E_c(B) - E_c(A)$$

IV.3.2. Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieures entre une position A et une autre position B est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \sum w_{A-B}(\vec{F}_{ext})$$

Remarque :

Dans un référentiel non inertiel R' on peut encore appliquer ce théorème mais il convient alors de prendre en compte les travaux des forces d'inertie !

IV.3.3. Forces conservatives et non conservatives

Les forces sont dites conservatives (on dit aussi que « la force dérive d'un potentiel *U*) lorsque leur travail ne dépend pas du chemin suivi mais que du point de départ et du point d'arrivée.

Exemples

- Force de pesanteur ;
- Force du poids ;
- Force de rappel des ressorts.

Les forces sont dites non conservatives lorsque leur travail dépend du chemin suivi.

Exemple

- Force de frottement.

IV.3.4. Energie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatives ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial et de l'état final. Le travail de ces forces peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle E_p

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -w_{A-B}(\vec{F}_c)$$

Avec $\vec{F}_c$: force conservative.

Lorsque la variation est très faible, $\Delta E_p \to dE_p$.

En utilisant la notion du travail élémentaire, on a :

$$dE_p = -\vec{F_c} \cdot \vec{dl}$$

D'autre part, soit le gradient ($\overrightarrow{grad}$) d'une fonction f défini par :

$$\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

La différentielle totale de f est donnée par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

On définit un point M, repéré dans le référentiel Oxyz par son vecteur $\overrightarrow{OM}$, tel que,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{i} + z\vec{k} \quad \Rightarrow \quad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$$

Alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{OM} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \cdot \left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\end{aligned}$$

Il vient, $\overrightarrow{grad} f \cdot d\overrightarrow{OM} = df$ ✦

A partir de l'équation (✦), on peut facilement remarquer que puisque

$$dE_p = -\vec{F_c} \cdot \vec{dl} \qquad \text{avec} \qquad \vec{dl} = dx\vec{i} + dy\vec{i} + dz\vec{k}$$

Alors $\vec{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$

En appliquant l'opérateur rotationnel des deux cotés de l'équation précédente on aura

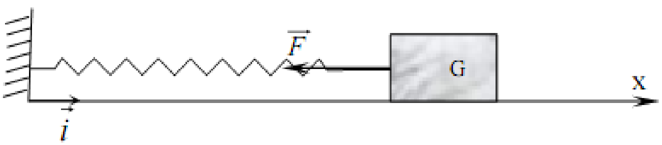
$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F_c} = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\, E_P) = \vec{0}$$

On peut vérifier si une force est conservative sans pour autant déterminer E_P

IV.3. 5. Exemples de forces conservatives

✓ *Force élastique*

$\vec{F} = -k\, x\vec{i}$



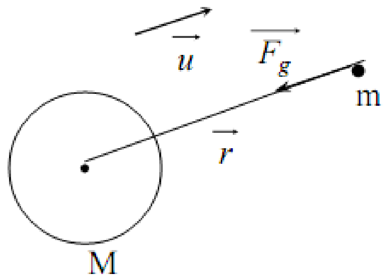
$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dE_p}{dx} = k\, x$$

$$\Rightarrow \qquad E_p = \int k\, x\, dx = \frac{1}{2}k\, x^2 + cste$$

✓*Force gravitationnelle*

$\overrightarrow{F_g}$ est une force conservatrice.



$$\overrightarrow{F_g}(r) = -G\frac{M\,m}{r^2}\vec{u}$$

$$= -G\frac{M\,m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{r}}{r}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{F_g} = -G\frac{M\,m}{r^3}\vec{r}$$

$$\overrightarrow{F_g} = -\overrightarrow{grad}\,E_p(r) = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE_p}{dr} = G\frac{M\,m}{r^2}$$

$$E_p(r) = \int G\frac{M\,m}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow \quad E_p(r) = -G\frac{M\,m}{r} + cste$$

IV. 3.6. Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum w_{A-B}\left(\overrightarrow{F_C}\right) + \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

$\overrightarrow{F_C}$: Forces conservatives. $\overrightarrow{F_{NC}}$: Forces non conservatives

Alors $\quad E_c(B) - E_C(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

puisque $\quad \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_C}) = \left(E_p(A) - E_p(B)\right)$

il vient $\quad E_c(B) + E_p(B) - \left(E_C(A) + E_p(A)\right) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$

On introduit une nouvelle quantité qu'on va l'appeler *Energie Total* du système

Symbolisée par (E), telle que,

$$E = E_c + E_p = Energie\,Cinétique + Energie\ Potentielle$$

Alors, entre les deux points A et B

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

- ✓ **Théorème de l'énergie mécanique**

La variation de l'énergie mécanique d'un système, en mouvement entre deux points *A* et *B*, est égale à la somme des travaux des forces extérieures non conservatives appliquées à ce système,

$$E(B) - E(A) = \sum w_{A-B}(\overrightarrow{F_{NC}})$$

Cependant, lorsque le système est isolé (c'est dire, il ne subit aucune force extérieure non conservative) l'énergie mécanique se conserve.

IV.4. Stabilité d'un système

IV.4.1. Définition de la stabilité

Pour un système soumis uniquement à une force conservative $\overrightarrow{F_C}$, il est intéressant de savoir s'il existe ou pas des états d'équilibre. La forme locale de l'énergie potentielle permet d'écrire que:

$$\overrightarrow{F_c} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

Dans le cas où l'énergie ne dépend que d'une variable x, cela revient à dire que:

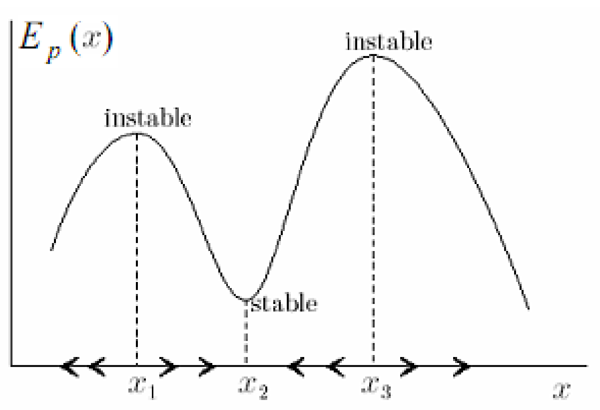
$$\overrightarrow{F_c} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{i}$$

La condition d'équilibre, pour n'importe quel système soumis à un ensemble de forces, est que la somme ou la résultante de l'ensemble des forces est égale à zéro ($\sum\vec{F} = \vec{0}$)

Dans le cas d'un système soumis uniquement à une force conservative $\overrightarrow{F_c}$ celle-ci devrait être nulle, il vient:

$$F_c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dE_p}{dx} = 0$$

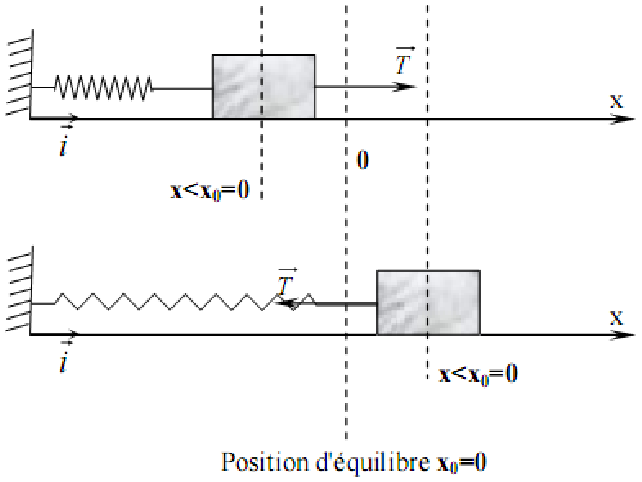
Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle. En d'autre terme, l'énergie potentielle devrait être maximale ou minimale pour que le système soit en équilibre.



Un équilibre est dit stable si, à la suite d'une perturbation qui a éloigné le système de cette position, celle-ci y retourne spontanément. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.

IV.4.2. Condition de stabilité

Soit le cas de la figure ci-dessous, cas où l'énergie potentielle ne dépend que d'une variable x.



Supposant que la dérivée de l'énergie potentielle à x_0 est nulle

$$\left(\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \right)$$

Pour une perturbation amenant le système à $x < x_o$, la valeur algébrique de la force doit être positive pour ramener le système vers x_o, $F_c > 0$

Donc

$$\frac{dE_p}{dx} < 0 \qquad puisque \qquad F_c = -\frac{dE_p}{dx}$$

Dans le cas contraire $x > x_o$, la force doit être négative et donc $\frac{dE_p}{dx} > 0$

L'énergie potentielle E_P décroît avant x_o et est croissante après x_o . Elle présente donc un minimum pour $x=x_o$ Dans ce cas, la fonction $\frac{dE_P}{dx}$ est une fonction croissante qui s'annule pour $x=x_o$. La condition de stabilité, c'est-à-dire, E_P minimale, peut donc se traduire par $\frac{d^2E_P}{dx^2} > 0$ au voisinage de x_o et donc pour $x=x_o$. Dans le cas contraire, la position sera une position d'équilibre instable.

Equilibre stable pour $x=x_0$ $\Leftrightarrow$ $E_p(x_0)$ minimale

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} > 0$$

Equilibre instable pour $x=x_0$ $\Leftrightarrow$ $E_p(x_0)$ maximale

$$\Downarrow$$

$$\left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{x=x_0} = 0 \qquad et \qquad \left.\frac{d^2E_p}{dx^2}\right|_{x=x_0} < 0$$

Un système, livré à lui-même, évolue spontanément vers un état d'équilibre qui correspond à une position pour laquelle l'énergie potentielle est minimale.