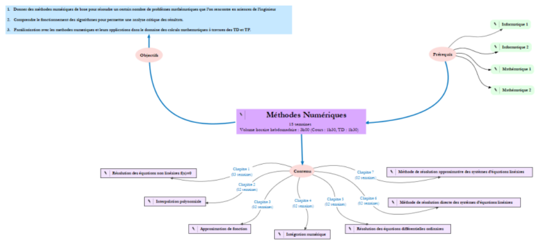
Méthodes Numériques



Cours de méthodes numériques

Dr. Nacim nait mohand

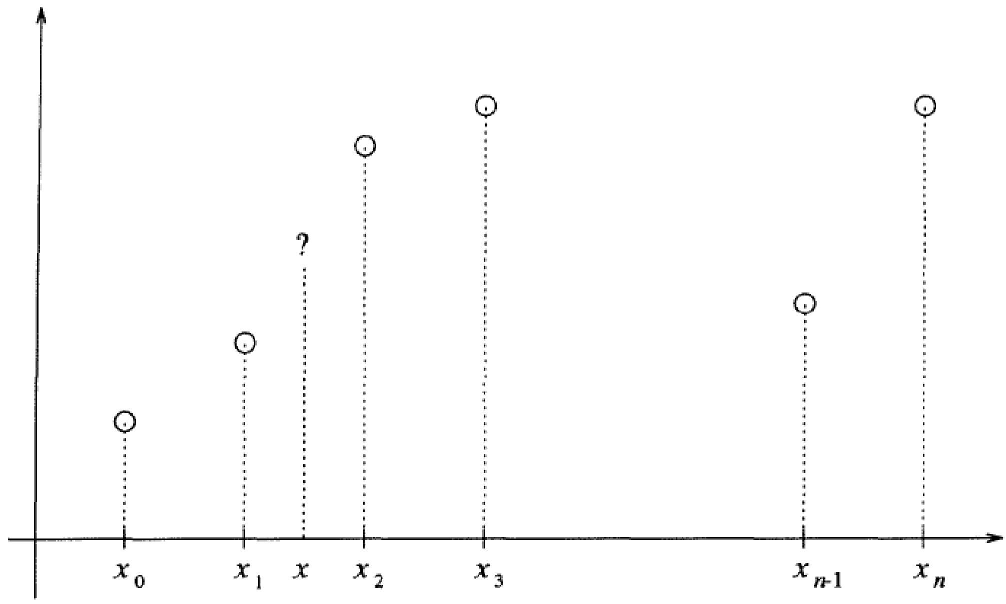
Mars 2019
1.0

Table des matières

Chapitre 2 : Interpolation Polynomiale

I

L'interpolation polynomiale est un sujet très important dans l'analyse numérique. Le problème d'interpolation peut être posé ainsi : à partir d'une fonction f connue seulement en $n+1$ points de la forme suivante $(x_i, f(x_i))_{n=0,1,...,n}$, il est question de construire une bonne approximation de f et ce pour tout x. Donc il s'agit à partir des ces *points d'interpolations* $(x_i, f(x_i))_{n=0,1,...,n}$ de construire le *polynôme d'interpolation* de degré suffisamment élevé dont la courbe passe par tous les points d'interpolation.



Problème interpolation

Thèoreme

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polynôme $P_n(x)$ d'interpolation *unique* interpolant f est que les points d'interpolation soient *distincts*.

1. Interpolation de Lagrange

Dans cette section, nous allons présenter le polynôme d'approximation de $Lagrange$. Nous allons exposer dans un premier temps ce polynôme dans le cas où on a deux points d'interpolation de la fonction f "*Interpolation linéaire*", par la suite nous traitons le cas où nous connaissions trois points d'interpolations de f "*Interpolation quadratique*" et nous terminons par la présentation du cas général où nous connaissions n points d'interpolation de f "*Interpolation de Lagrange cas générale*".

1.1. Interpolation linéaire

Considérons deux points $(x_0, f(x_0))$ et $(x_1, f(x_1))$ d'interpellation d'une fonction f. On approche la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in [x_1, x_2]$ par l'ordonnée du point de même abscisse x se trouvent sur la droite soignante les deux points d'interpolation. Dans ce cas le polynôme d'interpolation est du premier degré donné par cette expression :

$$P_1(x) = f(x_0)\,\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\,\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

1.2. Interpolation quadratique

Considérons trois points $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ d'interpellation d'une fonction f. On approche la valeur de f pour tout $x \in [\min(x_0, x_1, x_2),\ \max(x_0, x_1, x_2)]$ par l'ordonnée du point de même abscisse x se trouvant sur la parabole passante par les trois points d'interpolation.Dans ce cas le polynôme d'interpolation est du second degré, donné par cette expression :

$$P_2(x) = f(x_0)\,\frac{(x - x_1)\,(x - x_2)}{(x_0 - x_1)\,(x_0 - x_2)} + f(x_1)\,\frac{(x - x_0)\,(x - x_2)}{(x_1 - x_0)\,(x_1 - x_2)} + f(x_2)\,\frac{(x - x_0)\,(x - x_1)}{(x_2 - x_0)\,(x_2 - x_1)}$$

1.3. Interpolation de Lagrange : Cas général

Considérons $n + 1$ points $(x_i, f(x_i))_{i=0,1,\ldots,n}$ d'interpellation d'une fonction f. On approche la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in [\min((x_i)_{i=0,1,\ldots,n})],\ \max((x_i)_{i=0,1,\ldots,n})]$ par l'ordonnée du point de même abscisse x se trouvent sur la courbe soignante les $n + 1$ points d'interpolation. Dans ce cas le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ de degré n est donné par cette expression :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, L_i(x).$$

où : $L_i(x),\ i = 0, 1, \ldots, n$ sont les coefficients de Lagrange de degré n, donnés par ces expressions :

$$L_i(x) = \prod_{k=0,\ k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k},\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Exemple

Nous allons déterminer le polynôme interpolation de Lagrange passant par les quatre points $(x_i, f(x_i))_{i\in\{0,1,2,3\}}$:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0	-1
1	2	2
2	3	9
3	5	87

Le polynôme d'interpolation sera un polynôme de degré 3.

Les coefficients de Lagrange

i	$L_i(x)$
0	$\frac{x-2}{0-2}\,\frac{x-3}{0-3}\,\frac{x-5}{0-5} = \frac{1}{30}\,(x^3+10x^2-31x+30)$
1	$\frac{x-0}{2-0}\,\frac{x-3}{2-3}\,\frac{x-5}{2-5} = \frac{1}{6}\,(x^3-8x^2+15x)$
2	$\frac{x-0}{3-0}\,\frac{x-2}{3-2}\,\frac{x-5}{3-5} = -\frac{1}{6}\,(x^3-7x^2+10x)$
3	$\frac{x-0}{5-0}\,\frac{x-2}{5-2}\,\frac{x-3}{5-3} = -\frac{1}{30}\,(x^3-5x^2+6x)$

Le polynôme d'interpolation $P_3(x)$

$$P_3(x) = f(x_0)\,L_0(x) + f(x_1)\,L_1(x) + f(x_2)\,L_2(x) + f(x_3)\,L_3(x) = \frac{53}{3}x^3 - 7x^2 - 1.$$

2. Interpolation de Newton

On dispose de $n+1$ point d'interpolation $(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \ldots,\ (x_n, y_n)$. Le polynôme $P_n(x)$ d'interpolation de Newton est donné par cette expression :

$$P_n[x] = y[x_0] + (x-x_0)\,\delta\,y[x_0, x_1] + (x-x_0)\,(x-x_1)\,\delta^2[x_0, x_1, x_2] + \ldots + (x-x_0)\,(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})\,\delta^n[x_0, x_1, \ldots, x_n].$$

où :

$y[x_i] = y_i$

$\delta[x_i, x_j] = \dfrac{y[x_j] - y[x_i]}{x_j - x_i}$

$\delta^2[x_i, x_j, x_k] = \dfrac{\delta[x_j, x_k] - \delta[x_i, x_j]}{x_k - x_I}$

$\vdots$

$$\delta^n[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] = \frac{\delta^{n-1}[x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}] - \delta^{n-1}[x_{i_0}, \ldots, x_{i_{n-1}}]}{x_{i_n} - x_{i_0}}$$

Exemple

Considérons les points d'interpolation :(1,0), (2,1), (4,6), (5,0), (8, 2) et (10,5) de la fonction f.

Le polynôme d'interpolation de Newton est donnée par cette expression :

$$P_5(x) = \frac{1}{9600}(-287x^5 + 7123x^4 - 6092x^3 + 202748x^2 + 205520x + 9600)$$

3. Erreur d'interpolation polynomiale

Fondamental : Théorème de l'erreur d'interpolation

Soit $f \in f^{(n+1)}([a,b])$ et soit P_n le polynôme d'interpolation de f sur les points $(x_i, f(x_i))_{i=0,1,\ldots,n}$, pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi \in [\min(x, x_i),\ \max(x, x_i)]$ Tel que :

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{\gamma_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)\ !}(\xi)$$

où : $\gamma_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j)$

Si on pose$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)(x)}|$, on obtient $|E(x)| < \dfrac{|\gamma_{n+1}|}{(n+1)!}\ M_{n+1}$.