TD n°2 (Polymères et composites)

Exercice 1

Les propriétés mécaniques du cobalt peuvent être améliorées en incorporant des particules de carbure de tungstène.
Sachant que les modules d'élasticité respectifs sont 200 GPa et 700 GPa, illustrer la variation du module d'élasticité du composite en fonction de la fraction volumiques du carbure de tungstène en termes de limites supérieure et inférieure.

Exercice 2

Pour certains composites époxy-fibre de verre, le rapport critique longueur de vibre par rapport au diamètre de fibre est de 40. Déterminez la résistance de l'interface fibre-matrice, sachant que les caractéristiques de la fibre de verre sont :
Résistance mécanique : 3.45 GPa.

Exercice 3

a. Pour les composites à renforts fibreux, l'efficacité du renfort dépend de la longueur « l » des fibres en accord avec la relation $\eta = \frac{l-2x}{l}$. Ou x représente la distance depuis l'extrémité de la fibre. Tracer l'évolution de η en fonction de « l » pour « l » allant jusqu'à 50 mm et pour x= 1.25 mm.
b. Quelle-est la longueur requise pour assurer une efficacité de 90%.

Exercice 4

Nous considérons un composite constitué de 45% de fibres longues et orientées d'aramide et 55% de polycarbonate, qui constitue la matrice. Les caractéristiques mécaniques des deux constituants sont reportées dans le tableau qui suit :

	Module d'élasticité (GPa)	Résistance mécanique (MPa)
Fibre d'aramide	131	3600
polycarbonate	2.4	65

Aussi la contrainte dans le polycarbonate à la rupture des fibres est de 35 MPa. Calculer pour ce composite :
a. La résistance mécanique en traction, et
b. Le module d'élasticité longitudinale.

Exercice 5

Est-il possible de produire un composite époxy-fibre d'aramide de modules longitudinal et transversal respectifs de 35 GPa et 5.17 GPa ? Justifier votre réponse ? Nous supposerons que le module d'élasticité de l'époxy vaut 3.5 GPa

Exercice 6

Nous désirons réaliser un composite polyester-fibre de verre de résistance à la traction supérieur ou égale à 1250 MPa. La densité maximale autorisée est de 1,8. En exploitant les données du tableau, dire si un tel composite est possible en considérant que la contrainte dans la matrice à la rupture de la fibre vaut 20 MPa.

	densité	Résistance mécanique (MPa)
Fibre de verre	2.5	3500
polyester	1.35	50

Exercice 7

Il est demandé de réaliser un composite époxy-fibres discontinues de verre présentant une résistance mécanique de 1200 MPa pour une fraction volumique de fibre de 0.35. Calculer la résistance mécanique des fibres sachant que le diamètre moyen des fibres est de 15 µm et que la longueur moyenne est de 5 mm. La résiatnce de l'interface est estimée à 80 MPa et la contrainte dans la matrice à la rupture du composite vaut 6.55 MPa.

Exercice 8

Nous souhaitons concevoir un arbre de diamètre « d » et de longueur 1.25 m, qui répondra à une contrainte de rigidité en flexion de en termes de flèche maximale (0.2 mm) pour un chargement centré donné (1700 N). Nous disposons d'une nuance d'acier et de 3 matériaux composites à matrice époxy et renforcés par des fibres longues axiales. La fraction de fibre dans les composites est fixée à 40%. Il existe différents types de renfort : verre, carbone standard, carbone intermédiaire et carbone haut module. Parmi tous les matériaux à disposition choisir celui qui donnera l'arbre le plus léger tout en respectant la contrainte de rigidité en flexion.

matériau	Acier	Fibre de verre	Fibre de carbone standard	Fibre de carbone intermédiaire	Fibre de carbone haut module	Résine époxy
Module d'élasticité (GPa)	210	72.5	230	285	400	2.4
densité	7.8	2.5	1.8	1.8	1.8	1.35

Exercice 9.

Exprimer le rapport de charge $\frac{F_r}{F_m}$ entre le renfort et la matrice en fonction des fractions volumiques et des modules d'élasticités respectifs.

Corrigé TD 2 (polymères et composites).

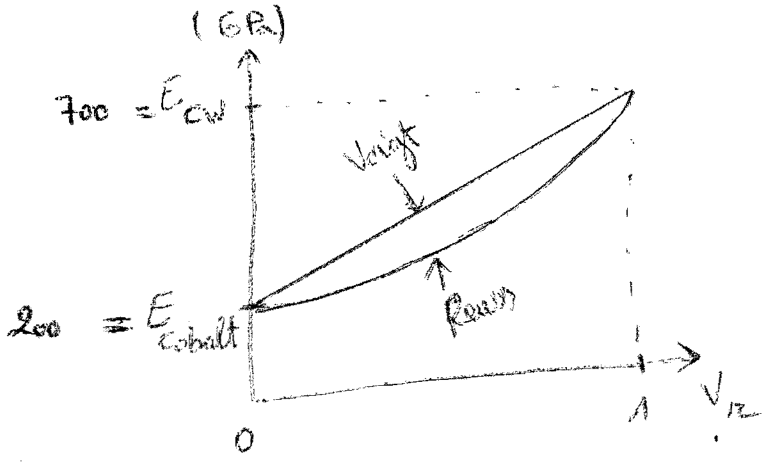
Ex 1

Les limites en question sont celles de :

Voigt : $E_c = V_R E_R + (1 - V_R) E_m$

Reuss : $\dfrac{1}{E_c} = \dfrac{V_R}{E_R} + \dfrac{1 - V_R}{E_m}$.

E_{CW} : module du carbure de Tungstène



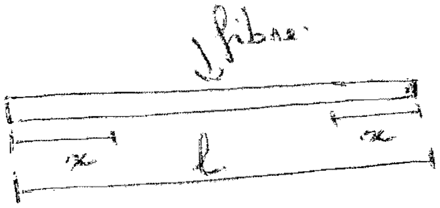
Ex 2

Rapport critique $\dfrac{\ell}{\phi} = 40$ nous savons que $\tau_c = \dfrac{\sigma_f \phi}{2 \ell_c} = \dfrac{\sigma_f}{2 \times 40} = \dfrac{\sigma_f}{80}$

avec $\sigma_f = 3.45$ GPa $\quad \tau_c = \dfrac{3450}{80} = 43,12$ MPa.

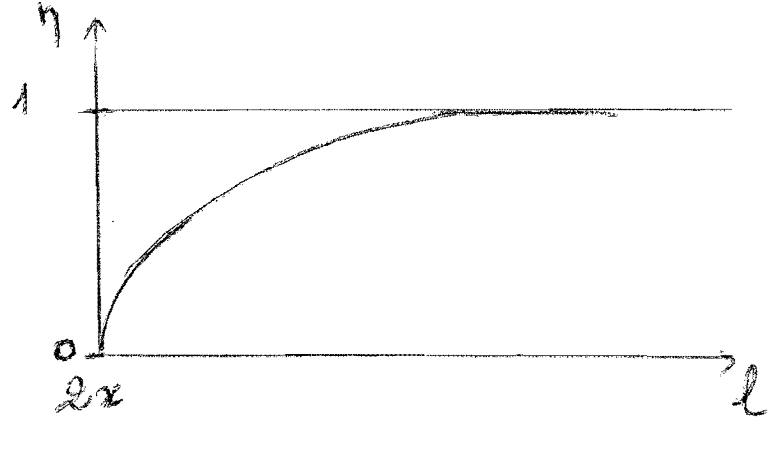
Ex 3

$\eta = \dfrac{\ell - 2x}{\ell}$



pour rappel x pourra représenter la longueur critique divisée par 2

a/



l'efficacité $\eta \longrightarrow 1$ qd $\ell \longmapsto \infty$.

b/ pour $x = 1,25$ mm. $\eta = 90\%$.

$\ell = \dfrac{2x}{1 - \eta}$ A.N $\ell = \dfrac{2 \times 1,25}{1 - 0,9} = 20 \times 1,25 = 25$ mm.

cet exercice met en avant le choix de $15 \ell_c$

Ex4

$V_f = 45\%$

a/ nous pouvons nous contenter de la résistance longitudinale puisque aucune précision n'a été fournie dans ce cas :

$$R_{comp} = 0{,}45 \times 3600 + 0{,}55 \times 35 = 1639 \text{ MPa}$$

. la considération de la valeur de 35 MPa pour la matrice revient au fait que la rupture est apparue à cette valeur d'après les données.

b/ le module longitudinal indique le module au sens de Voigt.

$$E_{l_{comp}} = 0{,}45 \times 131 + 0{,}55 \times 2{,}4 = 60{,}27 \text{ GPa}.$$

Ex5

pour vérifier il suffit de calculer les fractions nécessaires pour chaque module et de les comparer, s'il y a égalité donc c'est possible. sinon c'est impossible.

$$V_{f_l} = \frac{E_l - E_m}{E_f - E_m} \quad , \quad V_{f_t} = \frac{E_t - E_m}{E_f - E_m} \, \frac{E_f}{E_t}$$

A.N $\quad V_{f_l} = \dfrac{35 - 3{,}5}{131 - 3{,}5} = 0{,}24 \quad , \quad V_{f_t} = \dfrac{5{,}17 - 3{,}5}{131 - 3{,}5} \, \dfrac{131}{5{,}17} = 0{,}33.$

E_f voir tableau exercice 4

les formules dérivent des expressions des modules au sens de Voigt et de Reuss.

Nous notons $V_{f_l} \neq V_{f_t}$ donc ce couple (E_l, E_t) n'est pas possible.

poussons le raisonnement plus loin exprimons E_l en fonction de E_t ou vice-versa

$$V_{f_l} = V_{f_t} \iff \frac{E_l - E_m}{E_f - E_m} = \frac{E_f}{E_t} \, \frac{E_t - E_m}{E_f - E_m} \iff E_t = E_f \, \frac{E_t - E_m}{E_l - E_m}$$

Ex 6

l'analyse peut se faire selon deux schémas:

- déterminer la ~~...~~ fraction critique pour la résistance minimale et estimer la densité et la comparer avec la valeur requise
- faire l'inverse qui consiste à calculer la fraction nécessaire (max) pour assurer la densité et calculer et comparer la résistance par rapport à la consigne de 1250 MPa.

$d_{comp} = d_f V_f + (1-V_f)\, d_m$ pour $d_{comp} = 1.8$ nous obtenons $V_f = \dfrac{d_{comp} - d_m}{d_f - d_m}$

$= \dfrac{1,8 - 1,35}{2,5 - 1,35}$

dans ce cas aussi il faut faire attention à la contrainte

dans la matrice au moment de la rupture des fibres $= 0,39$.

$R_{comp} = 0,35 \times 3500 + 0,65 \times \underline{\underline{20}} = 1382\ MPa$.

cette valeur et supérieure à 1250 MPa donc la réponse est "oui"

Ex 7

le concept de fibres discontinues nous met dans l'embarras du choix entre les différentes expressions de Résistance mécanique vus dans le cours, la solution viendra en se référant au concept de rapport critique déjà évoqué dans l'exercice 2

le rapport de 40 étant le seuil critique (cas époxy-fibre de verre)

donc calculons le rapport $\dfrac{\ell}{\phi} = \dfrac{5}{15.10^{-3}} = 333,333$ qui est largement supérieur à 40, la longueur critique dans notre cas sera $40\phi = \ell_c$

$40 \times 15\,10^{-3} = 0,6\ mm$.

Vérifions le rapport $\dfrac{\ell}{\ell_c} = \dfrac{5}{0,6} = 8,33$.

donc pour notre calcul de résistance nous aurons à exploiter la relation établie pour $\ell_c < \ell < 15\ell_c$.

$$R_m = V_f\,\sigma_f\left(1-\frac{\ell_c}{2\ell}\right) + \sigma'_m\,(1-V_f).$$

$$\sigma_f = \frac{R_m - \sigma'_m(1-V_f)}{V_f\left(1-\frac{\ell_c}{2\ell}\right)} = \frac{1200 - 6{,}55(1-0{,}35)}{0{,}35\left(1-\frac{0{,}6}{2\times 5}\right)} = \underline{3634\ \text{MPa}}$$

Ex 9

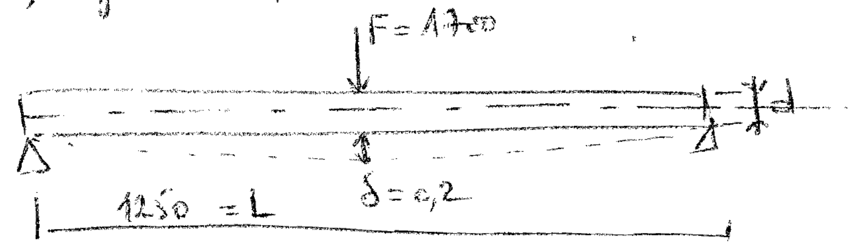
$$\frac{F_r}{F_m} = \frac{\sigma_r S_r}{\sigma_m S_m} = \frac{E_r\,\varepsilon\,S_r}{E_m\,\varepsilon\,S_m} = \frac{E_r}{E_m}\frac{S_r}{S_m} = \frac{E_r}{E_m}\frac{S_r\ell/V}{S_m\ell/V} = \frac{E_r V_r}{E_m V_m}$$

ce calcul se base sur le cas d'une sollicitation longitudinale ou les déformations sont les mêmes dans les deux phases.

$$\boxed{\frac{F_r}{F_m} = \frac{V_r E_r}{V_m E_m}}$$

Ex8

$\delta = \frac{FL^3}{48EI}$ (RDM) flexion 3 points



$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$m = L \times \frac{\pi d^2}{4}\rho$$

$$\delta \Rightarrow I = \frac{FL^3}{48E\delta} = \frac{\pi d^4}{64} \iff d = \sqrt[4]{\frac{FL^3\times 64}{48E\delta\pi}}$$ injectons "d" dans l'expression de la masse

$$m = \frac{L\pi}{4}\sqrt{\frac{FL^3\times 64}{48E\delta\pi}}\times\rho$$ dans cette expression seules les contraintes dimensionnelles et les caractéristiques des matériaux apparaissent.

$$m = \sqrt{\frac{L^5\pi\times 64}{16\times 48\times\delta}}\,\frac{\rho}{\sqrt{E}} = \sqrt{\frac{L^5\pi}{12\delta}}\sqrt{\frac{\rho^2}{E}}$$ ← cette quantité est dite indice de performance si nous souhaitons l'arbre le plus léger il faudra minimiser $\frac{\rho^2}{E}$ ou maximiser $\frac{E}{\rho^2}$

Calculons $\frac{E}{\rho^2}$ des differents materiaux

mais avant nous calculons ~~E_{Eq}~~ les modules et densité des differents composits

$E_{V-E} = 72,5 \times 0,4 + 2,4 \times 0,6 = 30,44 GPa$

$E_{CS-E} = 230 \times 0,4 + 2,4 \times 0,6 = 93,44 GPa$

$E_{CI-E} = 285 \times 0,4 + 2,4 \times 0,6 = 115,44 GPa$

$E_{CH-E} = 400 \times 0,4 + 2,4 \times 0,6 = 161,44 GPa$

$\rho_{V-E} = [2,5 \times 0,4 + 1,35 \times 0,6] \times 1000 \times$
$= 1670 \ kg/m^3$

$\rho_{C-E} = [1,8 \times 0,4 + 1,35 \times 0,6] \times 1000.$
$= 1395 \ kg/m^3$

V-E : Verre epoxy
CS-E : Carbone standar-ep
CI-E : Carbone intermediaire-ep
CH-E : Carbone haut module - epoxy

materiau	Acier	V-E	CS-E	CI-E	CH-E
$\frac{E}{\rho^2}$	3,45	10,85	48,01	59,32	82,95

en conclusion nous notons que les composits dépassent l'acier qui presente pourtant un module de Young plus élevé, mais la prise en consideration de ~~la contrainte~~ l'objectif de masse minimale l'a recalé à l'arriere du groupe. Le meilleur candidat et le composite renforcé par des fibres de carbone à haut module.