II. COMPORTEMENT ELASTIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont, pour une température donnée et dans un intervalle donné de déformation, un comportement élastique linéaire.

Dans le domaine de linéarité et en admettant que la température est uniforme dans tout le volume considéré, les matériaux composites se déformes comme les autres matériaux traditionnels.

II.1. GENERALITE SUR LE COMPORTEMENT ELASTIQUE DU MATERIAU :

II.1.1. Elasticité linéaire:[2]

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \qquad \text{II.1}$$

Avec :
$$\sigma_{ii} = \sigma_\alpha \qquad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_\alpha \qquad \alpha = 1$$
$$\sigma_{ij} = \sigma_\beta \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_\beta \qquad \beta = 9 - i - j$$

Ou sous forme condensée :

$$\sigma = C\,\varepsilon \qquad \text{II.2}$$

Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la matrice de rigidité ***C***, symétrique.

Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général par 21 coefficients indépendants.

La relation d'élasticité peut s'écrite sous la forme inverse, suivant :

$$\varepsilon = S\,\sigma \quad \text{avec} \quad S = C^{-1} \qquad \text{II.3}$$

S : matrice de flexibilité ou de souplesse (symétrique).

II.1.3. Matériau anisotrope :

Dans le cas le plus général, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucune propriété de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

II.1.4. Matériau monoclinique :

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie.

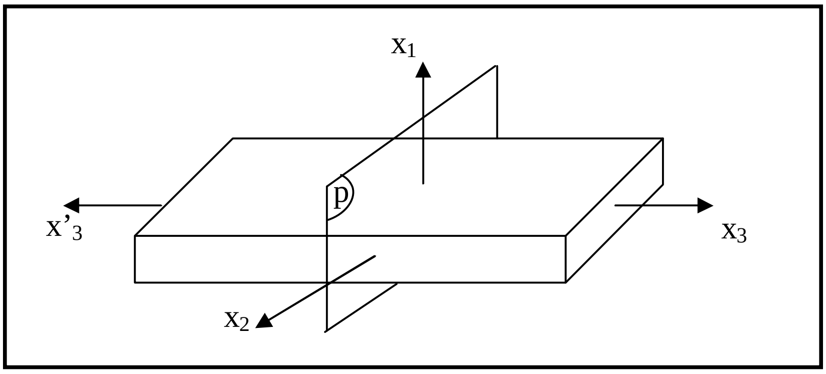

Fig. (II.1) : Plan de symétrie

La forme de la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{II.4}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

II.1.5. Matériau orthotrope :

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième.

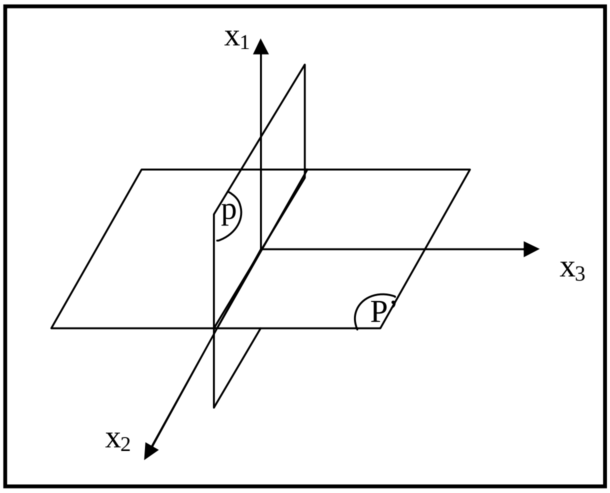

Fig. (II.2) : Matériau orthotrope

La forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{II.5}$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

II.1.6. Matériau orthotrope à isotrope transverse :

Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou isotrope transverse. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité (ou souplesse).

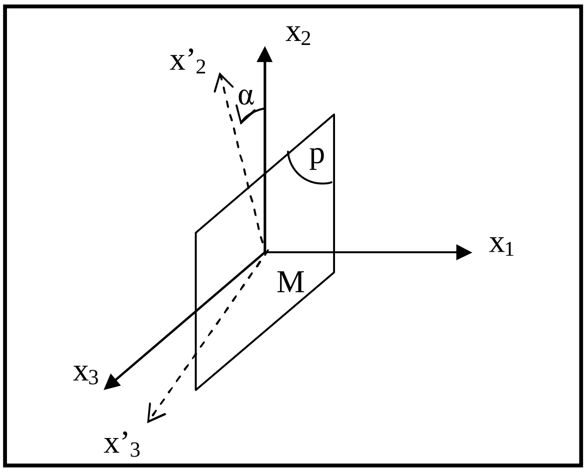

Fig. (II.3) : Plan d'isotropie

La matrice de rigidité s'écrit donc suivant :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{II.6}$$

La matrice de souplesse a la même forme.

Les propriétés du matériau orthotrope à isotrope transverse sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

II.1.7. Matériau isotrope :

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées.

Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \qquad \text{II.7}$$

La matrice de souplesse a la même forme.

Généralement, les constante de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de lamé λ et μ :

$$\begin{cases} C_{11} = \lambda + 2\mu \\ C_{12} = \lambda \end{cases} \qquad \text{II.8}$$

II.2. COMPORTEMENT ELASTIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES :

II.2.1. Comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel :[4]

La cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel peut être considérée comme constitué d'une fibre entoure d'un cylindre de matrice figure (II.4). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possèdent de plus un axe de révolution ou isotrope transverse.

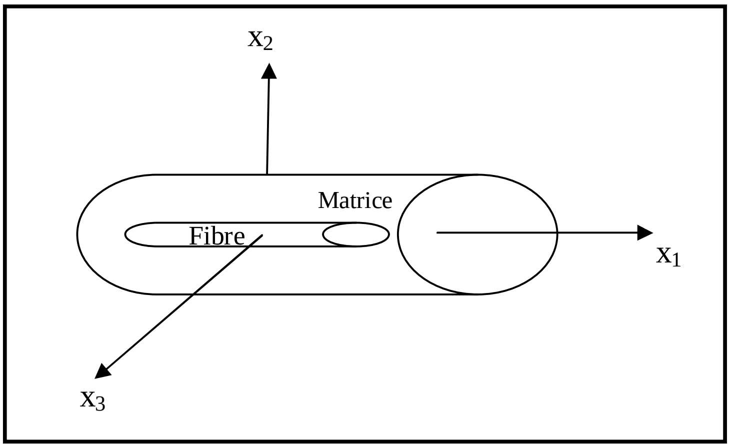

Fig. (II.4) : Composite unidirectionnel

II.2.2. Comportement élastique d'un matériau composite orthotrope :

Les matériaux composites stratifiés sont constitués de plusieurs couches de matériaux composites unidirectionnels ou de composites à base de tissus. Ces couches possèdent trois plans de symétrie orthogonaux deux à deux, et se comportent d'un point de vue élastique comme un matériau orthotrope.(paragraphe II.1.5 et II.1.6)

II.2.3. Comportement élastique d'une couche hors axes d'orthotropie : [1][4]

Le comportement élastique d'un matériau composite unidirectionnel ou tissu, exprimé dans les directions principales étant exposé précédemment: un axe suivant la direction des fibres ou de la chaîne, les deux autres axes étant orthogonaux. Or, nous avons vu que les stratifiés étaient élaborés par couches successives, dont la direction des fibres ou de la chaîne est décalée d'une couche à l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est alors nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence.

Dans ce qui suis nous considérons donc la figure II.5 une couche de matériau composite unidirectionnel ou tissu de directions principales (1,2,3), le plan (1,2) étant confondu avec le plan de la couche, et la direction 1 confondue avec la direction des fibres ou de la chaîne. L'objectif est de caractériser les propriétés élastiques de la couche, en les exprimant dans le système d'axes de référence (1',2',3) du stratifié, la direction des fibres ou de la chaîne faisant un angle θ avec la direction 1'. Ce système d'axes est usuellement référencé comme système (x,y,z).

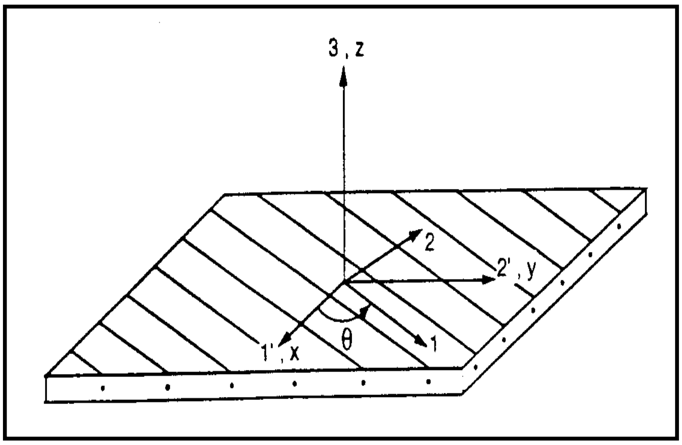

Fig. (II.5) : Axes principaux (1,2,3) d'une couche de stratifié et axes de référence (1',2',3) = (x,y,z) du stratifié

Soit :

- dans la base $(\vec{e})$: $\sigma = C\varepsilon$ II.9
- dans la base $(\vec{e}')$: $\sigma' = C'\varepsilon'$ II.10

Les relations de changement de base, relatives aux contraintes et déformations, peuvent être écrites d'une manière générale sous les formes :

$$\begin{cases} \sigma' = T\sigma \\ \varepsilon' = T\varepsilon \end{cases} \qquad \text{II.11}$$

Et en combinant les relations II.9, II.11, il vient :

$$\sigma' = T\,C\,T^{-1}\varepsilon' \qquad \text{II.12}$$

Où T est la matrice de changement de base (6×6).

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \qquad \text{II.13}$$

Le comportement élastique d'une couche, rapporté à ses axes principaux, est donné par la relation (II.9). Les matrices de rigidité C' et de souplesse S', exprimées dans la base (1',2',3), sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse, rapportées à la base (1, 2, 3), les relations de changement de base. Ces relations permettent de déterminer la matrice de rigidité C' et la matrice de souplesse S' exprimées dans la base (1',2',3).

La relation de changement de base des matrices de rigidité :

$$C' = T\,C\,T^{1} \qquad \text{II.14}$$

Sous forme matriciel :

$$\begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & 0 & 0 & C'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{23} & 0 & 0 & C'_{26} \\ C'_{13} & C'_{23} & C'_{33} & 0 & 0 & C'_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C'_{44} & C'_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C'_{45} & C'_{55} & 0 \\ C'_{16} & C'_{26} & C'_{36} & 0 & 0 & C'_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{II.15}$$

Par un raisonnement analogue, on trouve de même la relation de changement de base des matrices de rigidité :

$$S' = T\,S\,T^{-1} \qquad \text{II.16}$$

Les propriétés du matériau composite en dehors de ses axes principaux sont déterminées par 13 constantes d'élasticité indépendantes.

II.2.4. Comportement élastique d'un composite stratifié : [1]

Dans la théorie des stratifiés l'ensemble des couches constituées de fibres et de matrice est considéré comme un matériau homogène et anisotropique. Donc, des principes de la théorie d'élasticité et de la flexion des plaques sont applicables.

Dans notre présent travail, l'utilisation de la théorie des stratifiés se résume à la détermination des propriétés mécaniques de notre plaque.

II.2.4.1. Théorie classique des stratifiés :

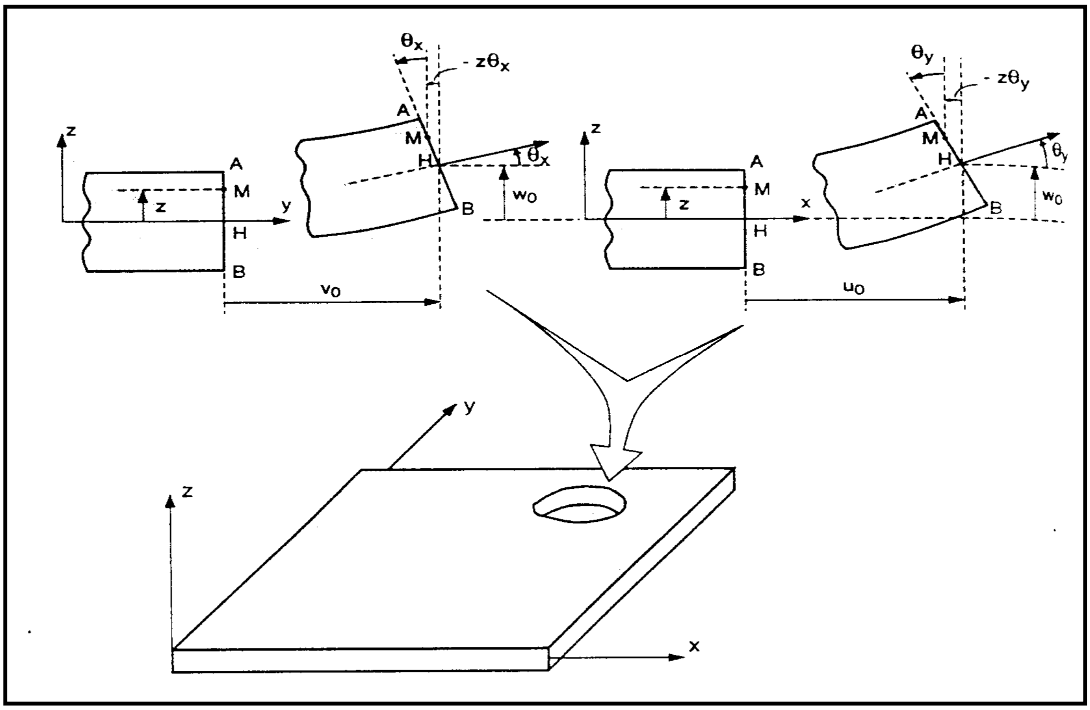

Fig. (II.5) : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés

Les particules situées avant déformation sur une normale au feuillet moyen restent après déformation suit une normale au feuillet moyen déformé.

- Le champ des déplacements s'écrit :

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z\theta_y$$
$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z\theta_x \qquad \text{avec}: \theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial y},\ \theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad \text{II.17}$$
$$w(x,y,z) = w_0(x,y)$$

- Le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \qquad \text{II.18}$$
$$\varepsilon_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\right) - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$
$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0$$

Finalement, le champ des déformations s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \varepsilon^0_{xy} \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad \text{II.19}$$

Ou sous forme abrégée :

$$\varepsilon(M) = \varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_m(x, y) + z\,k(x, y) \qquad \text{II.20}$$

Avec : $\varepsilon_m(x,y)$ déformation en membrane
$k(x,y)$ déformation en flexion et torsion

- Le champ des contraintes s'écrit :

$$\sigma(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{II.21}$$

- Les contraintes dans la couche k s'expriment suivant :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k\ \varepsilon_m(x, y) + z\,Q'_k\ K(x, y) \qquad \text{II.22}$$

Q' la matrice de rigidité réduite de la couche k (3×3).

- Résultantes en membrane dans le cadre de la théorie classique des stratifiés s'écrit :

$$N(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[Q'_k\ \varepsilon_m(x, y) + z\,Q'_k\ k(x, y)\right] dz \qquad \text{II.23}$$

Ou en définitive sous la forme :

$$N(x,y) = A\,\varepsilon_m(x,y) + B\,k(x,y)$$

$$avec: \quad A = [A_{ij}] = \sum_{k=1}^{n}\left(h_k - h_{k-1}\right)\left(Q'_{ij}\right)_k \qquad \text{II.24}$$

$$B = [B_{ij}] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(h_k^2 - h_{k-1}^2\right)\left(Q'_{ij}\right)_k$$

N : Résultantes en membrane
A : La matrice de rigidité en membrane.
B : La matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

- Le champ des moments de flexion et de torsion sous la forme suivante :

$$M_f(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\int_{h_{k-1}}^{h_k}\left[zQ'_k\ \varepsilon_m(x,y) + z^2\ Q'_k\ k(x,y)\right]dz \qquad \text{II.25}$$

Ou :

$$M_f(x,y) = B\,\varepsilon_m(x,y) + D\,k(x,y)$$

$$avec: \quad D = [D_{ij}] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(h_k^3 - h_{k-1}^3\right)\left(Q'_{ij}\right)_k \qquad \text{II.26}$$

M_f : Moments de flexion et de torsion
D : La matrice de rigidité en flexion.

II.2.4.2. Equation du Comportement d'un composite stratifié :

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moment en fonction des déformations en membrane et des courbures. Elle s'obtient en regroupant les expressions (II.24) et (II.26) suivant une seule écriture matricielle sous la forme contractée :

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_M \\ k \end{bmatrix} \qquad \text{II.27}$$

Les termes des matrices A, B et D peuvent être également exprimés en fonction de l'épaisseur e_k et la cote du centre de la couche k sous la forme:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(Q'_{ij}\right)_k e_k$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(Q'_{ij}\right)_k e_k\, z_k \qquad \text{avec} \qquad e_k = h_k - h_{k-1}, \quad z_k = \frac{\left(h_k + h_{k-1}\right)}{2} \qquad \text{II.28}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(Q'_{ij}\right)_k\left(e_k z_k^2 + \frac{e_k^3}{12}\right)$$

Q'_{ij} : est la matrice de rigidité réduite de la couche k.

Dont les rigidités réduites transformées Q' sont:

$$
\begin{aligned}
Q'_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2\left(Q_{12} + 2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta,\\
Q'_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2\left(Q_{12} + 2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta,\\
Q'_{12} &= \left(Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}\left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right),\\
Q'_{66} &= \left(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}\left(\sin^4\theta + \cos^4\theta\right),\\
Q'_{16} &= \left(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta + \left(Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta,\\
Q'_{26} &= \left(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta + \left(Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta.
\end{aligned}
\tag{II.29}
$$

Q_{ij} : étant les coefficients élastiques de la matrice de rigidité réduite en contrainte plane définis par:

$$
\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \dfrac{E_T}{E_L}\upsilon_{LT}^2}\\
Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L}Q_{11}\\
Q_{12} &= \upsilon_{LT}Q_{22}\\
Q_{66} &= G_{LT}
\end{aligned}
\tag{II.30}
$$