Université A. MIRA de Bejaia
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Année universitaire 2023 /2024
Module : Méthodes Numériques

Série de TD N°03

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Exercice 01 : On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \\ -3x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = b$.
2. Montrer que la matrice A est inversible, et calculer sa matrice inverse A^{-1}.
3. Résoudre le système (S) en utilisant:
   a) La méthode de la matrice inverse
   b) La méthode de Cramer.

Exercice 02 : Le système d'équations linéaires $AX = b$ s'écrit sous la forme suivante :

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 6x_1 + 4x_2 = 26 \\ 8x_1 + 5x_2 + x_3 = 35 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S) en utilisant:

a) La méthode d'élimination de GAUSS.
b) La méthode de JORDAN.
2. Calculer A^{-1} la matrice inverse de A.

Exercice 03 : Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = b$ et montrer qu'il admet une solution unique.
2. A l'aide de la décomposition LU de A, résoudre le système $AX = b$ en déterminant les matrices L et U.

Solution de la série de TD N°03

Résolution des systèmes d'équations linéaires

Solution de l'exercice 01 : On considère le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 = 1 \\ -3x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$$

3. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = b$.

$$AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Montrer que la matrice A est inversible, et calculer sa matrice inverse A^{-1}.
   - Calculer la déterminant de A :

     $$\det(A) = 0\times\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

     $\det(A) \neq 0 \Rightarrow$ la matrice A est inversible.
   - Calculer La matrice inverse A^{-1} :

     On a $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} Com(A)^t$ telle que :

$$Com(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Com(A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

5. a) Résoudre le système (S) en utilisant la méthode de la matrice inverse:

$$AX = b \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow I_3X = A^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Donc la solution du système (S) est $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^t$

b) Résoudre le système (S) en utilisant La méthode de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = -2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = 5$$

Donc la solution du système (S) est $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Solution de l'exercice 02 : Soit à résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$(S)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

1. Par la méthode d'élimination de GAUSS.
2. $(S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Tout d'abord, nous écrivons la matrice augmentée du système en ajoutant la colonne du vecteur second membre

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- Etape 1 : ($a_{11} = 2 \neq 0$ est le pivot)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{4}{2} L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

- Etape 2 : ($a_{22} = 2 \neq 0$ est le pivot)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{4} L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

Résoudre le système par la remontée triangulaire

$$\begin{cases} -\frac{5}{4} x_3 = -\frac{5}{2} \\ 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

Donc la solution du système (S) est $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Par la méthode de JORDAN.

- Etape 1 : ($a_{11} = 2 \neq 0$ est le pivot)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \text{ qui donne } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

- Etape 2 : ($a_{22} = 2 \neq 0$ est le pivot)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2} L_2 \end{cases} \text{qui donne} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \end{array}\right)$$

- Etape 3 : ($a_{33} = -\frac{5}{4} \neq 0$ est le pivot)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{4}{5} L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{7}{4} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_3 \\ L_3 \end{cases} \text{qui donne} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Donc la solution du système (S) est $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. Calculer A^{-1} la matrice inverse de A :
   On écrit la matrice augmentée comme suite :

$$\left(A|I_3\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left\{ L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases} \text{qui donne} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{3}{2} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{2} L_2 \end{cases} \text{ qui donne } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{4} & -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{5}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{4} & -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 1 & -\frac{5}{4} & 1 \end{array}\right) \left\{ L_3 \leftarrow -\frac{4}{5} L_3 \right. \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{4} & -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{7}{4} & -1 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{array}\right) \begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{7}{4} L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{3}{2} L_3 \\ L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & -1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{array}\right)$$

Donc la matrice inverse de A est

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -1 & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{5} & -1 & \frac{6}{5} \\ -\frac{4}{5} & 1 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Solution de l'exercice 3 :

Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$(S) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

1. Ecrire le système (S) sous la forme matricielle $AX = b$ et montrer qu'il admet une solution unique.

   La forme matricielle $AX = b$ associée à (S) est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

   Comme $\det(A) = 1 \neq 0$ alors ce système admet une solution unique.

2. A l'aide de la décomposition LU de A, résoudre le système $AX = b$ en déterminant les matrices

L et U.

Tout d'abord, on vérifie les conditions d'applications de cette méthode.

- $\det(A_1) = 2 \neq 0$
- $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$
- $\det(A_3) = \det(A) = 1 \neq 0$

➢ Comme les mineurs principaux son non nuls alors la décomposition $A = LU$ est possible et donc on peut écrire

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} u_{11} = 2 \\ u_{12} = 3 \\ u_{13} = 1 \\ l_{21}u_{11} = 2 \\ l_{21}u_{12} + u_{22} = 4 \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = 1 \\ l_{31}u_{11} = 1 \\ l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = 2 \\ l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{11} = 2 \\ u_{12} = 3 \\ u_{13} = 1 \\ l_{21} = 1 \\ u_{22} = 1 \\ u_{23} = 0 \\ l_{31} = \dfrac{1}{2} \\ l_{32} = \dfrac{1}{2} \\ u_{33} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Les éléments des deux matrices L et U sont les suivants :

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

D'où la décomposition LU.

➢ Résolution de système :

Pour la résolution de système (S) de la forme $AX = b$, le système devient :

$$LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} LY = b & (1) \\ Ux = Y & (2) \end{cases}$$

ON résout le système (1) pour trouver le vecteur Y, puis le système (2) pour trouver le vecteur X

$$(1) \Leftrightarrow LY = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ \frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 + y_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -1 \\ y_3 = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Donc la solution de système (1) est $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$

$$(2) \Leftrightarrow UX = Y$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 = -1 \\ \frac{1}{2} x_3 = \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 7 \end{cases}$$

Donc la solution de système (S) est $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$.