Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes
Département de Recherche Opérationnele

Master 2 Mathémtiques Financières

Solution de la série 4 (2023-2024)

Exercice 1:

$$f(z) = \sin z, \quad f'(z) = \cos z, \quad f''(z) = -\sin z, \quad f'''(z) = -\cos z,$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'où avec $z_0 = \frac{\pi}{4}$,

$$f(z) = \sin z = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + f''(z_0)\frac{(z-z_0)^2}{2!} + f'''(z_0)\frac{(z-z_0)^3}{3!} + \ldots$$

Autre méthode. Soit $u = z - \frac{\pi}{4}$ ou $z = u + \frac{\pi}{4}$. On a alors,

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin\left(u + \frac{\pi}{4}\right) = \sin u \cos\frac{\pi}{4} + \cos u \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin u + \cos u). \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \ldots\right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \ldots\right)\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots\right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + \left(z - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} - \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots\right\}.
\end{aligned}$$

ii) La singularité de $\sin z$ la plus proche de $\frac{\pi}{4}$ est à l'infini, la série converge donc pour toutes les valeurs finies de z, i.e. $|z| < \infty$. Ceci peut aussi être établi par la critère de d'Alembert.

Exercice 2:

Nous avons $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)(z+5)} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{z+2} - \dfrac{1}{z+5}\right)$

Nous avons $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \ 2 < |z| < 5\}$

Alors $\cancel{\frac{1}{5} < \frac{1}{|z|} < \frac{1}{2} < 1}$ ~~et~~ $\dfrac{|z|}{5} < 1$ et $\dfrac{2}{|z|} < 1$

Nous avons $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ pour $|x| < 1$.

- $$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z\left(1+\frac{2}{z}\right)}$$
$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$
$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n \quad \text{car } \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} \quad \cdots\cdots (1)$$

- $$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{5\left(1+\frac{z}{5}\right)}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{z}{5}}$$
$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{5}\right)^n \quad \text{car } \left|\frac{z}{5}\right| < 1$$

- Alors $$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+5}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{5^{n+1}}\right]$$
$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3 \times 5^{n+1}} z^n}_{\text{Série de Laurent sur } \Delta.}$$

Exercice 3:

Solution . i) Soit $z-1=u$. Alors, $z=1+u$ et

$$\begin{aligned}
\frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}e^{2u} \\
&= \frac{e^2}{u^3}\left\{1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\ldots\right\} \\
&= \frac{e^2}{u^3}+\frac{2e^2}{u^2}+\frac{2e^2}{u}+\frac{4e^2}{3}+e^2u+\ldots \\
&= \frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{e^2}{(z-1)}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2e^2}{3}(z-1)+\ldots
\end{aligned}$$

Le point $z=1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple. La série converge pour toute valeur de $z \neq 1$.

ii) Soit $z+2=u$ ou $z=u-2$. D'où,

$$\begin{aligned}
(z-3)\sin\frac{1}{z+2} &= (u-5)\sin\frac{1}{u} \\
&= (u-5)\left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^5}-\ldots\right\} \\
&= 1-\frac{5}{u}-\frac{1}{3!u^2}+\frac{5}{3!u^3}+\frac{1}{5!u^4}-\frac{1}{4!u^5}-\ldots \\
&= 1-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{6(z+2)^2}+\frac{5}{6(z+2)^3}+\frac{1}{120(z+2)^4}-\frac{1}{24(z+2)^5}-\ldots,
\end{aligned}$$

$z=-2$ est une singularité essentielle (point singulier essentiel).

b) Soit $z+2=u$. D'où

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=\frac{u-2}{(u-1)u}=\frac{2-u}{u}\cdot\frac{1}{1-u}=\frac{2-u}{u}\left(1+u+u^2+u^3+...\right)$$
$$=\left(\frac{2}{u}+2+2u+2u^2+...\right)-\left(1+u+u^2+u^3+...\right)$$
$$=\frac{2}{u}+1+u+u^2+...=\frac{2}{z+2}+1+(z+2)+(z+2)^2+...$$

Le point $z=-2$ est un pôle simple. La série converge pour toute valeur de z telle que $0<|z+2|<1$.