

CHAPITRE 6

Notion de Matrice Associée à une Application Linéaire et Calcul Algébrique sur les Matrices avec Exercices Corrigés

Soit \mathbb{K} un corps commutatif.

Soit E et F deux \mathbb{K} espaces vectoriels de dimension finies n et m , f une application linéaire de E dans F , soit $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ une base de E , $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ une base de F , les vecteurs $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ sont de vecteurs dans F comme $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$ est une base de F , alors $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ s'écrivent donc comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$. On a pour tout $j = 1, \dots, n$.

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \dots + a_{mj}e'_m.$$

$$\left(\begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_n) \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \begin{array}{l} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_m \end{array}$$

Le tableau suivant :

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right]$$

est appelé matrice associée à f relativement aux bases B et B' . On note la matrice (a_{ij}) où i désigne l'indice de ligne et j l'indice de colonne.

On introduit maintenant la notion de matrice et les opérations algébriques des matrices.

1. Espace vectoriel des matrices

DÉFINITION 1.1. On appelle une matrice dans \mathbb{K} de type (n, p) un tableau rectangulaire A d'éléments de \mathbb{K} ayant n lignes et p colonnes.

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{array} \right)$$

On note a_{ij} l'élément qui se trouve à la ligne numéro i et la colonne j et on note la matrice A par $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. L'ensemble des matrices de type (n, p) est noté $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

(1) Pour $n = 1$, on dit que A est une matrice ligne, $A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p})$.

(2) Pour $p = 1$ on dit que A est une matrice ligne, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1p} \end{pmatrix}$.

(3) Pour $n = p$, on dit que A est une matrice carrée d'ordre n et on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

EXEMPLE 1.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, A_1 est une matrice de type $(4, 3)$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, A_2 est une matrice de type $(2, 4)$.

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$, A_3 est une matrice carrée d'ordre 2.

DÉFINITION 1.3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ deux matrices de types (n, p) ,

(1) On dit que $A = B$ si $\forall i = 1, \dots, n, \forall j = 1, \dots, p; a_{ij} = b_{ij}$.

(2) La transposée de la matrice A est une matrice notée A^t définie par

$$A^t = (a_{ji})_{1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq n},$$

autrement dit A^t c'est la matrice de type (p, n) obtenue en remplaçant les lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes et on a : $(A^t)^t = A$.

EXEMPLE 1.4. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A_1^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow A_2^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$.

THÉORÈME 1.5. En munissant l'ensemble $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ par les opérations suivantes :

$$\begin{aligned}
 (+) : \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \\
 \left(\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \right) \right) &\rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2p} + b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

et

$$(\cdot) : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$$

$$\left(\lambda, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Alors $(\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \times p$, sachant que l'élé-

ment neutre de l'addition est la matrice nulle $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

2. Produit de deux matrices

DÉFINITION 2.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{(p,m)}(\mathbb{K})$, on définit le produit de la matrice A par B comme étant une matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$, avec $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{ip}b_{pj}$.

REMARQUE 2.2. (1) L'élément c_{ij} de la matrice C se calcule en additionnant le produit des éléments de la ligne i de la matrice A par les éléments de la colonne j de la matrice B .

(2) Le produit de deux matrices ne peut se faire que si le nombre de colonnes de la matrice A correspond au nombre de lignes de la matrice B .

EXEMPLE 2.3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A est de type $(2, 3)$ et B de type $(3, 4)$ ainsi C sera de type $(2, 4)$.

$$\begin{aligned}
 C = A.B &= \begin{pmatrix} 1.1 + 1.2 + 0.1 & 1.2 + 1.0 + 0.1 & 1.0 + 1.1 + 0.0 & 1.1 + 1.1 + 0.0 \\ 2.1 + 2.2 + 0.1 & 2.2 + 2.0 + 0.1 & 2.0 + 2.1 + 0.0 & 2.1 + 2.1 + 0.0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

REMARQUE 2.4. Le produit de deux matrices n'est pas commutatif voici un exemple :

$$A.B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \neq B.A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Matrices carrées

DÉFINITION 3.1. Soit A une matrice carrée d'ordre n , $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$,

- (1) La suite des éléments $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$ est appelée la diagonale principale de A .
- (2) La trace de A est le nombre $Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.
- (3) A est dite matrice diagonale si $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$ c'est à dire que les éléments de A sont tous nuls sauf la diagonale principale.
- (4) A est dite matrice triangulaire supérieure (resp inférieure) si $a_{ij} = 0, \forall i > j$, (resp $i < j$), c'est à dire les éléments qui sont au dessous (resp au dessus) de la diagonale sont nuls).
- (5) A est dite symétrique si $A = A^t$.

EXEMPLE 3.2. (1) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A_1 est une matrice diagonale.

(2) $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, A_2 est une matrice triangulaire inférieure.

(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 7 & 40 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, A_3 est une matrice triangulaire supérieure.

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix} = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 12 & 1 \\ -2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, A_4 est une matrice symétrique.

PROPOSITION 3.3. Le produit des matrices est une opération interne dans $\mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et il admet un élément neutre la matrice nommée matrice identité notée I_n définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 3.4. Soit $A \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ on dit que A est inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{(n,n)}(\mathbb{K})$ telle que $A.B = B.A = I_n$.

EXEMPLE 3.5. Montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et ceci en cherchant la matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que

$$\begin{aligned} A.B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B.A \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a-b \\ c & 2c-d \end{pmatrix} \\ &B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Les Déterminants

DÉFINITION 4.1. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ une matrice dans $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{K})$, on appelle déterminant de A le nombre réel donné par : $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. On le note $\det(A)$ ou $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,

EXEMPLE 4.2. Calculons le $\det(A)$,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-1) - 0.(2) = -1.$$

DÉFINITION 4.3. De même, on définit le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

EXEMPLE 4.4.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.0 \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &\Leftrightarrow |A| = -1 + 0 - 12 = -13 \end{aligned}$$

PROPOSITION 4.5. Pour calculer le déterminant d'une matrice A on peut développer A suivant n'importe quelle ligne ou colonne.

Suivant cette proposition il vaut mieux choisir la ligne ou colonne contenant le plus de zéros.

EXEMPLE 4.6. On reprend la même matrice de l'exemple précédent mais calculer suivant la troisième ligne on aura :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 12 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 0 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 12 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 0 - 13 + 0 = -13$$

on calcule juste un déterminant au lieu de trois.

DÉFINITION 4.7. De même, on définit le déterminant d'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K}),$$

par

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

DÉFINITION 4.8. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, le déterminant suivant la j -ème colonne est :

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j} D_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} D_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} D_{nj}, j = 1, \dots, n.$$

Le déterminant suivant la i -ème ligne est :

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} D_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} D_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} D_{in}, i = 1, \dots, n.$$

Où A_{ij} représente ce que nous appelons le déterminant mineur du terme a_{ij} , le déterminant d'ordre $n - 1$ obtenu de $\det(A)$ en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne.

PROPOSITION 4.9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a :

- (1) $\det(A) = \det(A^t)$.
- (2) $\det(A) = 0$ si deux lignes de A sont égales (ou deux colonnes).
- (3) $\det(A) = 0$ si deux lignes de A sont proportionnelles (ou deux colonnes le sont).
- (4) $\det(A) = 0$ si une ligne est combinaison linéaire de deux autres lignes de A (même chose pour les colonnes).

(5) $\det(A)$ ne change pas si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire d'autres lignes (même chose pour les colonnes).

(6) Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$.

EXEMPLE 4.10. (1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$, car la ligne 1 est égale à la ligne

3, $L_1 = L_3$.

(2) $|B| = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -15 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, car $L_1 = 3 * L_4$.

(3) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 0$, car $C_1 = C_2$.

DÉFINITION 4.11. Soit V_1, V_2, \dots, V_n , n vecteurs de \mathbb{R}^n on appelle déterminant des vecteurs (V_1, V_2, \dots, V_n) et on le note $\det(V_1, V_2, \dots, V_n)$ le déterminant dont les colonnes sont les vecteurs V_1, V_2, \dots, V_n .

EXEMPLE 4.12. Soit $V_1 = (1, 1, 0)$, $V_2 = (0, -1, 1)$, $V_3 = (0, 0, 1)$, alors

$$\det(V_1, V_2, V_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

PROPOSITION 4.13. Soit V_1, V_2, \dots, V_n , n vecteurs de \mathbb{R}^n on (V_1, V_2, \dots, V_n) est une base de $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \det(V_1, V_2, \dots, V_n) \neq 0$

EXEMPLE 4.14. Soit $V_1 = (1, 2, 0)$, $V_2 = (0, -1, 1)$, $V_3 = (0, 0, 1)$, forment une base de \mathbb{R}^3 , car $\det(V_1, V_2, V_3) = -1 \neq 0$.

4.1. Le rang d'une matrice.

DÉFINITION 4.15. Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, on appelle rang de A et on note $\text{rg}A$ l'ordre de la plus grande matrice carrée B prise (extraite) dans A telle que $\det B \neq 0$.

EXEMPLE 4.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $\det A = 2 \neq 0$, $\text{rg}A = 2$.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\det A = 0 \neq 0$, $\text{rg}A = 1$.

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\text{rg}A < 4$ ($\text{rg}A \leq 3$) la plus grande matrice carrée contenue

dans A est d'ordre 3, dans cet exemple on a : 4 possibilités :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det C_1 = \det C_2 = 0$ et $\det C_3 = \det C_4 = 0$ donc le $\text{rg} A < 3$ et on a :

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} A = 2.$$

THÉORÈME 4.17. le rang d'une matrice est égale au nombre maximale de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

DÉFINITION 4.18. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle cofacteur d'indice i et j de A le scalaire

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

Avec A_{ij} est la matrice déduite de A par suppression de la ligne i et la colonne j .

La matrice $C = (c_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la matrice des cofacteurs et la matrice C^t est appelée la comatrice de A .

EXEMPLE 4.19. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$. Calculons les cofacteurs de A

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \det(A_{13}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \det(A_{23}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \det(A_{31}) = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \det(A_{32}) = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \det(A_{33}) = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

donc la matrice des cofacteurs est donnée par :

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

et la comatrice et

$$C^t = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 4.20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0,$$

et dans ce cas la matrice inverse de A est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C^t.$$

Où C^t est la comatrice de A .

EXEMPLE 4.21. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(A) = 2 \neq 0$ donc elle est inversible, de plus

$$A^{-1} = \frac{1}{2} C^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $A^{-1}A = I_3 = AA^{-1}$.

5. Relations entre une application linéaire et sa matrice Associée

DÉFINITION 5.1. La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est appelée la matrice de f suivant les bases B et B' et elle est parfois notée $\mathcal{M}_{(B, B')}(f)$. Si $E = F$ et $B = B'$, on dit que A est la matrice de f suivant la base B et on la note $\mathcal{M}_{(B)}(f)$.

EXEMPLE 5.2. (1)

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + z, x - y)$$

\mathbb{R}^3 sa base canonique $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ et \mathbb{R}^2 sa base canonique $B' = \{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$,

$$f(e_1) = f(1, 0, 0) = (1, 1) = v_1 + v_2$$

$$f(e_2) = f(0, 1, 0) = (1, -1) = v_1 - v_2.$$

$$f(e_3) = f(0, 0, 1) = (1, 0) = v_1$$

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

(2)

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x + y, x - y)$$

$B = \{e_1 = (1, 2), e_2 = (-1, 1)\}$ et $B' = \{v_1 = (0, 2), v_2 = (-2, 1)\}$, On doit chercher les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$?

$$f(e_1) = f(1, 2) = (3, -1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

$$f(e_2) = f(-1, 1) = (0, -2) = \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2,$$

$$(3, -1) = \lambda_1(0, 2) + \lambda_2(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$(0, -2) = \lambda_3(0, 2) + \lambda_4(-2, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = -1 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$M_{(B, B')}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ \frac{1}{4} & -1 \\ -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

PROPOSITION 5.3. Soient E et F deux \mathbb{K} -espace vectoriels de dimensions finies n et m , $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $B' = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ une base de F , alors la donnée d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{(n, m)}(\mathbb{K})$ donne une unique application linéaire f de E dans F la matrice suivant les bases, B et B' est A

EXEMPLE 5.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, A est la matrice de f suivant la base canonique de \mathbb{R}^2 , (e_1, e_2) ,

$$f(e_1) = e_1 + 2e_2 \Rightarrow f(1, 0) = (1, 0) + 2(0, 1) = (1, 2),$$

$$f(e_2) = -e_1 \Rightarrow f(0, 1) = -(1, 0) = (-1, 0),$$

$$f(x, y) = f(x(1, 0) + y(0, 1)) = xf(1, 0) + yf(0, 1)$$

$$\Leftrightarrow f(x, y) = x(1, 2) + y(-1, 0) = (x - y, 2x).$$

REMARQUE 5.5. Si \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n sont munis de leurs bases canoniques alors l'application linéaire f de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m associée à une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est donnée par

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 5.6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$

$$f(x, y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - y, 2x).$$

THÉORÈME 5.7. Soit E, F et G des \mathbb{K} -espaces vectoriels munis respectivement par les bases $B, B', B'', f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$, deux applications linéaires, alors

$$M_{(B, B'')} (g \circ f) = M_{(B', B'')} (g) M_{(B, B')} (f)$$

REMARQUE 5.8.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + 2z, x - y), (x, y) \rightarrow (x - y, 2x + y)$$

où $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ sont munis de leurs bases canoniques alors

$$g \circ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow g \circ f(x, y, z)$$

avec $M(g \circ f) = M(g)M(f),$

$$M(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(g \circ f) = M(g)M(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$g \circ f(x, y, z) = M(g \circ f) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (2y + 2z, 3x + y + 4z).$$

THÉORÈME 5.9. Soit $f; E \rightarrow F, B$ est une base de E et B' est une base de F , on a alors :

$$f \text{ bijective} \Leftrightarrow \det M_{(B, B')} (f) \neq 0$$

et on a dans ce cas $M_{(B, B')} (f^{-1}) = (M_{(B, B')} (f))^{-1}.$

EXEMPLE 5.10.

$$f; \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$$

Montrons que f est bijective et calculer son inverse $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A, \det(A) = 2 \neq 0 \Leftrightarrow f$ est bijective.

$$(M_B(f))^{-1} = \frac{1}{\det(A)} C_A^t$$

$$C_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C_A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M_{(B,B')}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M_B(f^{-1}),$$

$$f^{-1}(x, y) = M_{(f^{-1})} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right).$$

PROPOSITION 5.11. Si $A \in \mathcal{M}_{(n,m)}(\mathbb{K})$ associée à une application linéaire f de E dans F la matrice suivant les bases, B de E et B' de F , alors

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f), \text{rg}(A) = \text{rg}(A^t).$$

6. Matrices et Changements de Bases

DÉFINITION 6.1. Soit E un e.v et soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases pour E , la matrice de passage de la base B' à la base B est par définition la matrice $M_{(B,B')}(Id_E)$ où Id_E est l'application identité

$$Id_E : E \rightarrow E$$

$$x \rightarrow x.$$

Les vecteurs de base de B peuvent s'exprimer dans B' selon les relations

$$(S) : \begin{cases} e_1 = a_{11}e'_1 + a_{12}e'_2 + \dots + a_{1n}e'_n \\ e_2 = a_{21}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{2n}e'_n \\ e_3 = a_{31}e'_1 + a_{32}e'_2 + \dots + a_{3n}e'_n \\ \vdots \\ e_n = a_{n1}e'_1 + a_{n2}e'_2 + \dots + a_{nn}e'_n \end{cases}$$

On appelle matrice de passage de B' à B la matrice carrée P définie par

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

EXEMPLE 6.2. $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$, $e'_3 = (1, 0, 0)$ et $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 ,

$$\begin{aligned} Id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}_B^3 &\rightarrow \mathbb{R}_{B'}^3 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y, z), M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}) \\ Id(e_1) = (1, 0, 0) &= \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1) \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = -0.5, \lambda_3 = 0.5 \end{aligned}$$

$$Id(e_2) = (0, 1, 0) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 \Rightarrow \lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = -0.5,$$

$$Id(e_3) = (0, 0, 1) = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + \lambda_3 e'_3 \Rightarrow \lambda_1 = -0.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 0.5,$$

$$\text{donc } M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 6.3. La matrice de passage d'une base B à une base B' est la matrice inverse de la matrice de passage de B' vers B :

$$M_{(B', B)}(Id_{\mathbb{R}^3}) = (M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1}$$

REMARQUE 6.4. Soit E un *e.v* et soit $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases pour E . Les vecteurs de base de B' peuvent s'exprimer dans B selon les relations

$$(S) : \begin{cases} e'_1 = b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + \dots + b_{1n}e_n \\ e'_2 = b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + \dots + b_{2n}e_n \\ e'_3 = b_{31}e_1 + b_{32}e_2 + \dots + b_{3n}e_n \\ \dots\dots\dots \\ e'_n = b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + \dots + b_{nn}e_n \end{cases}$$

On appelle matrice de passage de B à B' la matrice carrée P^{-1} définie par

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

EXEMPLE 6.5.

$$M_{(B, B')}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, M_{(B', B)}(Id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice de passage de la base B à la base B' .

THÉORÈME 6.6. Soit $f : E \rightarrow F$, B_1, B'_1 deux bases pour E , B_2, B'_2 bases de F . Si P désigne la matrice de passage de B_1 à B'_1 , et Q désigne la matrice de passage de B_2 à B'_2 , alors

$$M_{(B'_1, B'_2)}(f) = Q^{-1}M_{(B_1, B_2)}(f)P.$$

EXEMPLE 6.7.

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \rightarrow (x + y + z, x - y)$$

On munit \mathbb{R}^3 de la base canonique $B_3 = (e_1, e_2, e_3)$

On munit \mathbb{R}^2 de la base canonique $B_2 = (v_1, v_2)$,

$$M_{(B_3, B_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On munit \mathbb{R}^3 de la base canonique $B'_3 = (e'_1, e'_2, e'_3)$, avec $e'_1 = (1, 0, 1)$, $e'_2 = (1, 1, 0)$, $e'_3 = (0, 1, 1)$

On munit \mathbb{R}^2 de la base canonique $B'_2 = (v'_1, v'_2)$, avec $v'_1 = (-1, 1)$, $v'_2 = (1, 1)$,

$$\mathbb{R}_{B_3}^3 \xrightarrow{P} \mathbb{R}_{B'_3}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{B_2}^2 \xrightarrow{Q^{-1}} \mathbb{R}_{B'_2}^2$$

$$P = M_{(B'_3, B_3)}(Id_{\mathbb{R}^3}),$$

$$P = (M_{(B_3, B'_3)}(Id_{\mathbb{R}^3}))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q = M_{(B'_2, B_2)}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, Q^{-1} = M_{(B_2, B'_2)}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

ainsi :

$$M_{(B'_3, B'_2)}(f) = Q^{-1} M_{(B_3, B_2)} P$$

$$\Leftrightarrow M_{(B'_3, B'_2)}(f) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_{(B'_3, B'_2)}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_{(B'_3, B'_2)}(f) = \begin{pmatrix} -0.5 & -1 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

7. Diagonalisation

DÉFINITION 7.1. Soit $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur colonne $v \neq 0$ tel que $Av = \lambda v$. Le vecteur v est appelé vecteur propre associé à la valeur λ .

EXEMPLE 7.2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

on a : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$ sont des valeurs propres de A , en effet :

$$\begin{aligned} Av_1 = \lambda_1 v_1 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow x = -2y \text{ alors} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Av_2 = \lambda_2 v_2 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = 0, x \in \mathbb{R} \text{ alors} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à $\lambda_2 = 2$.

PROPOSITION 7.3. Soit $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si et seulement si $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id_n) = 0$.

$P_A(\lambda)$ est appelé le polynôme caractéristique de A .

EXEMPLE 7.4. (1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det(A - \lambda Id_2) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2. \end{aligned}$$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= -(2 - \lambda)^2(1 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1. \end{aligned}$$

DÉFINITION 7.5. Soit $A \in M_{(n,n)}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A , l'ensemble E_λ défini par :

$$E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n \text{ ou } \mathbb{C}^n / Av = \lambda v\}$$

est appelé l'espace propre associé à la valeur propre alors E_λ est un sous espace vectoriel de E .

EXEMPLE 7.6. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont 2 une solution double et 1 simple.

(1) Pour $\lambda = 2$, on a

$$E_2 = \{v \in \mathbb{R}^3 / Bv = 2v\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{cases} x + z = 2x \\ -x + 2y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z - x = 0 \\ -x + z = 0 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = z \end{cases}$$

donc $E_2 = \{(x, y, x) / x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$ s.e.v de \mathbb{R}^3 , $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ est une base de E_2 , car les vecteurs sont libres.

(2) Pour $\lambda = 1$, on a

$$E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 / Bv = v\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\}$$

$$\begin{cases} x + z = x \\ -x + 2y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases}$$

donc $E_1 = \{(x, x, 0) / x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1, 0) / y \in \mathbb{R}\}$ s.e.v de \mathbb{R}^3 , $\{(1, 1, 0)\}$ est une base de E_1 .

DÉFINITION 7.7. On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P est une matrice diagonale D telle que ; $A = PDP^{-1}$. (où P est la matrice de passage.)

THÉORÈME 7.8. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A d'ordre de multiplicités respectives m_1, \dots, m_p , alors si

(1) $\dim E_{\lambda_i} = m_i, i = 1, 2, \dots, p$.
ou

(2) $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dots + \dim E_{\lambda_p} = n$

Alors la matrice A est diagonalisable et la matrice diagonale D associée à A est donnée par :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_p & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_p \end{pmatrix}$$

chaque λ_i se répète m_i fois, la matrice P est formé des vecteurs propres.

REMARQUE 7.9. Si la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distincts alors A est diagonalisable et la matrice diagonale D associée à A est :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 7.10. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ admet les valeurs propres $\lambda_1 = 2$ double et $\lambda_2 = 1$ simple la matrice diagonale D est donnée par ; $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la matrice de passage est donnée par : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Systèmes d'équations linéaires

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On appelle système de n équations linéaires à p inconnus à coefficients dans \mathbb{K} , tout système de la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

où les $(x_j)_{j=1,\dots,p}$ sont les inconnues, les $(a_{ij}), b_j \in \mathbb{K}$.

1) Forme matricielle du système :

Posons $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ Le système (S) devient ;

$$AX = B.$$

Si f est une application linéaire de \mathbb{K}^p dans \mathbb{K}^n telle que A soit la matrice associée à f suivant les bases canoniques et si on note par $X = (x_1, \dots, x_p)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$, le système (S) devient $f(X) = B$.

2) Solution du système :

DÉFINITION 8.1. On appelle solution du système (S) tout élément $X = (x_1, \dots, x_p)$ vérifiant les n équations de (S) ceci revient à trouver un vecteur X tel que $AX = B$ ou encore un élément $X \in \mathbb{K}^p$ tel que $f(X) = B$.

EXEMPLE 8.2.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 4 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

3) Rang d'un système linéaire :

Le rang d'un système linéaire est le rang de la matrice $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$. Si r est le rang du système linéaire (S) , alors $r \leq n$ et $r \leq p$.

8.1. Système de Cramer.

DÉFINITION 8.3. Le système (S) est dit de Cramer si $n = p = r$ c'est à dire, (S) est un système de n équations à n inconnus et telle que

$$\det A \neq 0.$$

THÉORÈME 8.4. Tout Le système de Cramer admet une solution donnée par : $X = A^{-1}B$.

EXEMPLE 8.5.

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\det A = 1 \neq 0, \operatorname{rg} A = 2,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

THÉORÈME 8.6. Dans un système de Cramer, la solution est donnée par les formules :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}, i = 1, \dots, n.$$

Où les A_i est la matrice réduite de A , en remplaçant la colonne i par le vecteur B .

EXEMPLE 8.7.

$$(S) : \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\det A = 4 \neq 0, \operatorname{rg} A = n = p = 3$ ((S) est un système de cramer).

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = 9/7.$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-7} = -5/7.$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-7} = -1/7.$$

3) Cas où $n = p$ et $r < n$:

Si on considère maintenant un système de n équations à n inconnus, mais $\operatorname{rg} A < n$ c'est à dire

$$\det A = 0,$$

dans ce cas on extrait une matrice M de A sachant que c'est la plus grande matrice carrée inversible c'est à dire $\det M \neq 0$ contenue dans A et d'ordre r c'est ce qu'on appelle une sous-matrice, les inconnus associés à M deviennent des inconnus principales et les $(n-r)$ autres inconnus deviennent des paramètres où bien ce qu'on appelle valeurs arbitraires et on considère le système suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n) = b'_2 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n) = b'_r \end{cases}$$

ce dernier est un système de cramer, donc il admet une seule solution (x_1, \dots, x_r) qui dépend de (x_{r+1}, \dots, x_n) . Si cette solution vérifie les $(n-r)$ équations restantes, alors le système globale admet une infinité de solutions. Si par contre (x_1, \dots, x_r) ne vérifie pas une seule équation parmi les $(n-r)$ équations restantes alors le système globale n'admet de solution.

EXEMPLE 8.8.

$$(S) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 0$ (S) n'est pas un système de Cramer comme $|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Alors $\text{rg} A = 2$ et on considère x, y les inconnus et z paramètre, alors on obtient le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 3 - 2z \\ 2x + 2y = 2 - z \end{cases}$$

qui est un système de Cramer et admet une unique solution (x, y) dépendante de z .

$$x = 1/8 \begin{vmatrix} 3 - 2z & -1 \\ 2 - z & 2 \end{vmatrix} = 1 - (5/8)z$$

$$y = 1/8 \begin{vmatrix} 3 & 3 - 2z \\ 2 & 2 - z \end{vmatrix} = 1/8z$$

Reste à voir si (x, y) vérifie $x - 3y + z = 1$ (équation restante) on a : $1 - 5/8z - 3/8z + z = 1 \Rightarrow 1 = 1$ (vraie $\forall z \in \mathbb{R}$) donc le système admet une infinité de solutions données par :

$$(1 - 5/8z, 1/8z, z)/z \in \mathbb{R}.$$

3) Cas où $n \neq p$:

Si le nombre d'équations n'est pas égale au nombre d'inconnus, alors on cherche d'abord le rang de A et on procède comme précédemment. Si M est une matrice contenue dans A et d'ordre r et $\det M \neq 0$ alors on considère le système de r équations à r inconnus correspondant à M qui est un système de Cramer.

Si la solution vérifie les équations restantes alors le système global admet une infinité de solutions sinon il n'admet aucune solution.

EXEMPLE 8.9.

$$(S) : \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \\ x - 5y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

le rang de $A \leq 2$ choisissons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = 8 \neq 0 \Rightarrow \text{rg} M = 2.$$

on prend le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11/8 \\ y = 1/8 \end{cases}$$

on a l'équation restante :

$$x - 5y = -5 \Rightarrow 11/8 - 5/8 = 6/8 = 3/2 \neq -5$$

alors le système n'admet pas de solutions.

Bibliographie

- [1] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, Problèmes Corrigés de mathématiques , DEUG MIAS/SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2002.
- [2] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, les mathématiques en Licence, 1^{ère}. Tome 1 : Cours+ exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.
- [3] E. Azouly, J. Avignant, G. Auliac, les mathématiques en Licence, 1^{ère}. Tome 2 : Cours+ exos, MIAS.MASS.SM, Ediscience(Dunod pour la nouvelle édition) Paris 2003.
- [4] R. Godement Cours d'algèbre. Hermann, 1966.
- [5] M. H. Mortad, Exercices Corrigés d'Algèbre, Première Année L.M.D., Edition "Dar el Bassair"(Alger-Algérie),2012
- [6] M. Queysanne, Algèbre, collection U, Armand Colin, 1971.