

# - TD 2 - Algèbre 2 -

## Exercices Corrigés

**EXERCICE** 1. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$$

(1)  $A$  est-elle inversible ? si oui déterminer son inverse  $A^{-1}$ .

(2) Calculer  $A^2 - A - 2I_3 = 0$ , avec  $I_3$  est la matrice identité.

**SOLUTION**. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{pmatrix}$$

(1)  $A$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -18 & -19 & 9 \\ -30 & -30 & 14 \end{vmatrix} = c_2 = -c_1 + c_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -18 & -1 & 9 \\ -30 & 0 & 14 \end{vmatrix}$$

calculons suivant la colonne 2,

$$\det A = (-1)^{1+2}(1) \begin{vmatrix} -18 & 9 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(-1) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

d'où le résultat.

$A^{-1}$  est donnée par :  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^t$  où  $C^t$  est la comatrice de  $A$ .

$$c_{11} = \begin{vmatrix} -19 & 9 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = 4, c_{21} = - \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = 6, c_{31} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -19 & 9 \end{vmatrix} = -3,$$

$$c_{12} = - \begin{vmatrix} -18 & 9 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = -18, c_{22} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -30 & 14 \end{vmatrix} = -20, c_{32} = - \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -18 & 9 \end{vmatrix} = 9,$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} -18 & -19 \\ -30 & -30 \end{vmatrix} = -30, c_{23} = - \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -30 & -30 \end{vmatrix} = -30, c_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -18 & -19 \end{vmatrix} = 13,$$

ainsi

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -18 & -30 \\ 6 & -20 & -30 \\ -3 & 9 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -18 & -20 & 9 \\ -30 & -30 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ -18 & -20 & 9 \\ -30 & -30 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3/2 \\ -9 & -10 & 9/2 \\ -15 & -15 & 13/2 \end{pmatrix}.$$

(2) Calculons  $A^2 - A - 2I_3 = 0$ ,

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ -18 & -17 & 9 \\ -30 & -30 & 16 \end{pmatrix}, A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

D'où le résultat, on peut remarquer que  $A(A - I_3) = 2I_3 \Rightarrow AB = I_3$ , avec  $B = 1/2(A - I_3) = A^{-1}$ .

**EXERCICE** 2. Soit  $A$  une matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = a.I_3 + b.A$ .

(2) En déduire que  $A$  est inversible et donner son inverse.

**SOLUTION.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouvons  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $A^2 = a.I_3 + b.A$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi  $a = 2, b = 1$ .

(2)

$$\det A = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

d'où  $A$  est inversible.

$$A^2 - A = 2I_3 \Rightarrow A(A - I_3) = 2I_3 \Rightarrow A(1/2(A - I_3)) = I_3$$

ainsi  $A^{-1} = 1/2(A - I_3)$

$$A^{-1} = 1/2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**EXERCICE** 3. Soit la matrice associée à l'application  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^3$  suivant la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer l'application  $f$ .

- (2) Déterminer  $\ker f$  et  $\text{Im} f$  et leur dimension,  $f$  est-elle bijective ?
- (3) Soit  $S = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, -1, 0)\}$
- Montrer que  $S$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - Donner la matrice associée à  $f$  suivant la base  $S$ .

**SOLUTION.** (1) Déterminons l'application  $f$ .

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y + 5z, 3x + 2z, x + y + 4z).$$

$$(2) \ker f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$$

$$\ker f = \{(0, 0, 0)\}.$$

alors  $\dim \ker f = 0$ , ( $f$  est injective).

$$\text{Im} f = \{f(x, y, z) / (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{Im} f = \{x(1, 3, 1) + y(-1, 0, 1) + z(5, 2, 4) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

la famille  $\{(1, 3, 1), (-1, 0, 1), (5, 2, 4)\}$  est libre car  $\det((1, 3, 1), (-1, 0, 1), (5, 2, 4)) = 23 \neq 0$ , alors  $\dim \text{Im} f = 3$ , ( $f$  est surjective), d'où  $f$  est bijective.

- (3) Soit  $S = \{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (2, -1, 0)\}$
- $S$  est une base de  $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \det(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ ,

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =_{C_3=C_1+C_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

b) On note  $A'$  la matrice associée à  $f$  suivant la base  $S$ .  $A' = P^{-1}AP$ , avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et faisons un changement de base } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 & 11/2 & 7 \\ 7/2 & -1/2 & -6 \\ -7/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$

**EXERCICE** 4. Soit la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
- Montrer que  $A$  est diagonalisable.
- Déterminer  $P$ , calculer  $A^k$ .

**SOLUTION.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

déterminons les valeurs propres de  $A$ , soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2)$$

les valeurs propres sont 1, 2 et -4.

(2)  $A$  est diagonalisable car elle admet trois valeurs propres distinctes.

(3) Cherchons les vecteurs propres.

• Pour  $\lambda = 1$  :

$$E_1 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Av = v\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = x \\ 3x - 2y = y \\ -2x + 2y + z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

$E_1 = \{x(1, 1, 1) / x \in \mathbb{R}\}$ ,  $v_1 = (1, 1, 1)$  est vecteur propre associé à 1.

• Pour  $\lambda = 2$  :

$$E_2 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Av = 2v\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = 2x \\ 3x - 2y = 2y \\ -2x + 2y + z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y = 0 \\ -2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4/3y \\ z = (-2/3)y \end{cases}$$

$E_2 = \{y(4/3, 1, -2/3) / y \in \mathbb{R}\}$ ,  $v_2 = (4, 3, -2)$  est vecteur propre associé à 2.

• Pour  $\lambda = -4$  :

$$E_{-4} = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / Av = -4v\} \Rightarrow \begin{cases} 2y - z = -4x \\ 3x - 2y = -4y \\ -2x + 2y + z = -4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -(2/3)y \\ x = z \end{cases}$$

$E_{-4} = \{x(1, -2/3, 1) / x \in \mathbb{R}\}$ ,  $v_3 = (2, -3, 2)$  est vecteur propre associé à -4.

Ainsi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^{-1}, \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \text{ alors}$$

$$A^k = PD^kP^{-1} = \frac{-1}{30} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

où

$$P^{-1} = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} 0 & -12 & -18 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \det(P) = -30, C_p^t = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -12 & 0 & 6 \\ -18 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

vous pouvez calculer  $P^{-1}$  en utilisant le changement de base.

$$A^k = \frac{-1}{30} \begin{pmatrix} -5 \cdot 2^{k+2} - 10(-4)^k & -12 + 12(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+2} - 2(-4)^k \\ -15 \cdot 2^k - 15(-4)^k & -12 + 15(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+1} + 3(-4)^k \\ 5 \cdot 2^{k+1} - 10(-4)^k & -12 + 15(-4)^k & -18 + 5 \cdot 2^{k+1} - 2(-4)^k \end{pmatrix}$$

**EXERCICE** 5. Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

**SOLUTION.**

$$(S) : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det A = 1 \neq 0, \text{rg} A = n = p = 3$  ((S) est un système de cramer), il admet une solution unique donnée par :

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -1.$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{1} = -2.$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1} = 6.$$

**EXERCICE** 6. Résoudre le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} 3x + y - 2z + 3t = 0 \\ -x + 2y - 4z + 6t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

**SOLUTION.**

$$(S) : \begin{cases} 3x + y - 2z + 3t = 0 \\ -x + 2y - 4z + 6t = 2 \\ 2x - y + 2z - 3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -4 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

le  $\text{rg}A \leq 3$ . On prend  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\det M = 7 \neq 0$ . On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + y = 2z - 3t \\ -x + 2y = 2 + 4z - 6t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2/7 \\ y = 2z - 3t + 6/7 \end{cases}$$

si on remplace dans la troisième équation on aura :

$$2x - y + 2z - 3t = -4/7 - 2z + 3t - 6/7 + 2z - 3t = -10/7 \neq 0$$

donc le système n'admet aucune solution.

$$(S_2) : \begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 2 \\ x - 3y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0$ .  $(S_2)$  n'est pas un système de Cramer.

Comme  $|A'| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$ . Alors  $\text{rg}(A) = 2$ .

On considère  $x, y$  les inconnues principales et  $z$  un paramètre, alors on obtient le système :

$$\begin{cases} 3x - y = 3 - 2z \\ 2x + 2y = 2 - z \end{cases}$$

qui est un système de Cramer, il admet une unique solution  $(x, y)$  dépendante de  $z$ .

$$x = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 3 - 2z & -1 \\ 2 - z & 2 \end{vmatrix} = 1 - \frac{5}{8}z$$

$$y = \frac{1}{8} \begin{vmatrix} 3 & 3 - 2z \\ 2 & 2 - z \end{vmatrix} = \frac{1}{8}z$$

Reste à voir si  $(x, y)$  vérifie :  $x - 3y + z = 1$  (ég. restante).

ona :  $1 - \frac{5}{8}z - 3 \cdot \frac{1}{8}z + z = 1 \Rightarrow 1 = 1$  (vraie  $\forall z \in \mathbb{R}$ ). Donc le système admet une infinité de solutions  $(1 - \frac{5}{8}z, \frac{1}{8}z, z) \mid z \in \mathbb{R}$ .