

**UNIVERSITE ABDERRAHMANE MIRA BEJAIA**  
**FACULTE DE TECHNOLOGIE**

**METHODE**  
**DES ÉLÉMENTS FINIS**  
**Cours et exercices**

**Par Abdelhamid BECHEUR**

## **Préambule**

Cet ouvrage est le fruit d'efforts pédagogiques accomplis à l'issue d'un certain nombre d'années d'enseignements de cette matière. Son objectif est de faire partager des connaissances jugées essentielles. Son ambition est de faire découvrir et aimer aux étudiants et aux praticiens de la simulation numérique, une méthode aussi bénéfique que celle de la méthode des éléments finis.

Par ailleurs, cette méthode a toujours été une spécialité commune aussi bien au domaine de la construction mécanique qu'à celui de la famille de la construction (travaux publics et génie civil). En effet, la vérification et le dimensionnement des pièces mécaniques, sont souvent effectués en faisant recours aux logiciels de simulations numériques basés sur la MEF. En toute évidence, les structures relevant du domaine de la construction, sont également conçues et calculées par des logiciels également basés sur cette méthode. Cela étant dit, cet ouvrage consiste d'abord à rappeler les notions de base concernant la théorie de l'élasticité, et à présenter, par la suite, les trois techniques les plus utilisées en éléments finis que sont : les techniques de transformations entre espaces de coordonnées, d'interpolations nodales et d'intégration numériques. Les formulations intégrales ainsi que les calculs utilisant principalement les éléments bidimensionnels seront également traités dans les chapitres suivants. Les derniers chapitres concernent les calculs bidimensionnels de structures formées de barres, et de poutres.

Constituant une première ébauche, de nombreuses améliorations et enrichissements seront effectués à l'avenir. A cet effet, toutes remarques et suggestions seront les bienvenues.

L'auteur

Abdelhamid BECHEUR

# Sommaire

## Chapitre 01

## Rappels de la théorie de l'élasticité

<b>1</b>	<b>Les principaux tenseurs utilisés</b>	<b>11</b>
1.1	Tenseur des déplacements	11
1.2	Tenseur des déformations	11
1.3	Tenseur des contraintes	11
<b>2</b>	<b>Relations déplacements – déformations</b>	<b>12</b>
<b>3</b>	<b>Relations contraintes – déformations</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Cas bidimensionnel de l'élasticité plane</b>	<b>13</b>
4.1	Etat des contraintes planes	13
4.2	Etat des déformations planes	14
4.3	Etat de la symétrie axiale de révolution	15
<b>5</b>	<b>Le problème posé en élasticité tridimensionnelle</b>	<b>15</b>
5.1	Introduction	15
5.2	Equations d'équilibre	16
5.3	Conditions aux limites	17
<b>6</b>	<b>Energie de déformation élastique</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Principe des travaux virtuels</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Contraintes principales</b>	<b>19</b>
<b>9</b>	<b>Contraintes de Von-Mises</b>	<b>19</b>

## Chapitre 02 : Concepts de base de la méthode des éléments finis

<b>1</b>	<b>Principe fondamental</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>Formulation intégrale</b>	<b>20</b>
<b>3</b>	<b>Maillage</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Utilité du maillage</b>	<b>21</b>
<b>5</b>	<b>Transformation en un système d'équations linéaires</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Types d'éléments finis</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Règles de construction (ou de génération) des maillages</b>	<b>23</b>
<b>8</b>	<b>Raffinement des maillages</b>	<b>25</b>

## Chapitre 03

## Les transformations entre espaces de coordonnées

<b>1</b>	<b>Principe</b>	<b>26</b>
----------	-----------------	-----------

<b>2</b>	<b>Matrice Jacobienne</b>	<b>26</b>
<b>3</b>	<b>Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul intégral</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul des dérivées partielles</b>	<b>27</b>
<b>5</b>	<b>Exemples d'application</b>	<b>28</b>

## **Chapitre 04 Les techniques d'interpolation nodales en EF**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>32</b>
<b>2</b>	<b>Méthodes utilisées pour effectuer une interpolation nodale</b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>Le degré d'interpolation et son intérêt</b>	<b>32</b>
<b>4</b>	<b>Interpolation directe sur l'élément réel du maillage</b>	<b>35</b>
4.1	Schéma d'interpolation directe linéaire- cas de l'élément barre	37
4.2	Cas de l'interpolation nodale de degré élevé ou polynômes de Lagrange :	38
<b>5</b>	<b>Interpolation nodale utilisant les éléments de référence</b>	<b>40</b>
5.1	Principe des éléments de référence :	41
5.2	Quelques types d'éléments de référence utilisés en EF	41
5.3	Fonctions de forme et relations entre éléments réels et de référence	43
5.4	Interpolation nodale dans l'élément de référence	49
5.5	Éléments isoparamétriques	49
5.6	Démarche à suivre	50
5.7	Exemples	51
<b>6</b>	<b>Forme particulière de la matrice Jacobienne en éléments finis</b>	<b>60</b>

## **Chapitre 05 Techniques d'intégrations numériques en éléments finis**

<b>1</b>	<b>Principes utilisés</b>	<b>65</b>
<b>2</b>	<b>Calcul d'intégrales sur des éléments 1D à une dimension</b>	<b>65</b>
<b>3</b>	<b>Calcul d'intégrales sur des éléments 2D à deux dimensions</b>	<b>71</b>
<b>4</b>	<b>Calcul d'intégrales sur des éléments 3D à trois dimensions</b>	<b>90</b>

## **Chapitre 06 : Schéma global de résolution et Formulations intégrales**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>91</b>
<b>2</b>	<b>Schéma global de résolution</b>	<b>92</b>
<b>3</b>	<b>Méthode des résidus pondérés – formes intégrales</b>	<b>94</b>
3.1	Définition du Résidu d'équilibre	94
3.2	Forme intégrale forte	94

3.3	Forme intégrale faible :	95
<b>4</b>	<b>Méthode de Galerkin</b>	<b>98</b>
4.1	Hypothèse de Galerkin	98
4.2	Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin	98
4.3	Prise en compte des forces ponctuelles	99
<b>5</b>	<b>Application à l'élément barre</b>	<b>100</b>
5.1	Equations d'équilibre	100
5.2	Forme intégrale forte	101
5.3	Forme intégrale faible	101
5.4	Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin	102
5.5	Seconde méthode : utilisation directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles	102
<b>6</b>	<b>Exemples</b>	<b>103</b>

## Chapitre 07      Rigidités élémentaires et forces nodales équivalentes

<b>1</b>	<b>Forme générale</b>	<b>110</b>
1.1	Introduction du maillage dans la forme intégrale faible	110
1.2	Introduction de l'interpolation nodale du champ de solution recherché ou Matrice [N]	110
1.3	Introduction de la matrice [B] reliant le vecteur-déformations $\{\varepsilon\}$ au vecteur-déplacements nodaux $U_n(i)$	113
1.4	Matrice de rigidité élémentaire et vecteur force élémentaire	114
<b>2</b>	<b>Matrices de rigidités élémentaires et vecteurs forces élémentaires d'un élément barre</b>	<b>115</b>
<b>3</b>	<b>Calcul de la matrice B pour les éléments les plus utilisés :</b>	<b>117</b>
3.1	Cas de l'élément unidimensionnel à deux nœuds SEG2 (linéaire):	117
3.2	Cas de l'élément unidimensionnel à trois nœuds SEG3 (quadratique) :	118
3.3	Cas de l'élément triangulaire à trois nœuds TRI3 (linéaire) :	119
<b>4</b>	<b>Matrice de rigidité d'un élément triangulaire en contraintes planes :</b>	<b>122</b>
<b>5</b>	<b>Calcul de forces nodales équivalentes à des charges réparties :</b>	<b>123</b>
5.1	Charges nodales équivalentes à des forces de volume-cas de l'élément barre 1D :	123
5.2	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire TRI3 :	124
5.3	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI3 adjacents :	127

5.4	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire quadratique TRI6 :	128
5.5	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI6 adjacents :	129
<b>6</b>	<b>Calculs en état bidimensionnel de déformations planes : cas de la modélisation d'une digue de barrage d'eaux avec un élément triangulaire TRI3</b>	<b>130</b>
<b>7</b>	<b>Calculs en état bidimensionnel 2D de contraintes planes : cas de la modélisation d'une plaque rectangulaire avec un élément quadrangulaire QUA4</b>	<b>138</b>
<b>8</b>	<b>Exercices corrigés</b>	<b>144</b>
8.1	Exercice 01 : barre tendue de section variable	144
8.2	Exercice 02 Forces nodales équivalentes au poids propre d'une barre de sections variables	147
8.3	Exercice 03 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur un élément TRI6	149

## **Chapitre 08 Modélisation et calculs de structures formées de barres**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>153</b>
<b>2</b>	<b>Quelques rappels de la théorie de la résistance des matériaux</b>	<b>153</b>
2.1	Définition d'une barre	153
2.2	Définition d'une poutre	153
2.3	Structures en treillis	154
<b>3</b>	<b>Element fini de barre</b>	<b>154</b>
<b>4</b>	<b>Element fini de ressort</b>	<b>155</b>
<b>5</b>	<b>Systèmes formés de barres continues unidimensionnelles</b>	<b>156</b>
<b>6</b>	<b>Systèmes bidimensionnels formés de barres disposées en treillis</b>	<b>159</b>
6.1	Matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre dans l'espace 2d	159
6.2	Matrice de rigidité élémentaire de l'élément ressort dans l'espace 2d	160
6.3	Transformations entre repères local et global	160
6.4	Exemple 01 : cas d'une structure en treillis formée de barres	161

## **Chapitre 09 Modélisation et calculs de structures formées de poutres**

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>169</b>
<b>2</b>	<b>L'élément poutre</b>	<b>170</b>
<b>3</b>	<b>Matrice de rigidité élémentaire</b>	<b>172</b>
<b>4</b>	<b>Matrice de rigidité dans le repère global</b>	<b>173</b>

<b>5 Exemples</b>	<b>175</b>
5.1 Exemple 01 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge ponctuelle en son milieu	175
5.2 Exemple 02 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge uniformément répartie	178
5.3 Exemple 03 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge ponctuelle non centrée	182
5.4 Exemple 04 : cas d'une structure bidimensionnelle formant une rampe uniformément chargée	184
<b>Références bibliographiques</b>	<b>193</b>

## Chapitre 01 :

### Rappels d'élasticité linéaire

#### 1 Les principaux tenseurs utilisés

##### 1.1 Tenseur des déplacements

On considère d'abord le tenseur  $U_i$  du champ des déplacements qui est un vecteur noté  $U_i$  et qui a pour composantes (en 3D) :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

##### 1.2 Tenseur des déformations

On considère ensuite le tenseur  $\varepsilon_{ij}$  du champ des déformations (appelé tenseur de Green-Lagrange linéarisé) qui est une matrice symétrique notée  $[\varepsilon]$  et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (01)$$

Il faut faire attention au fait que l'on utilise également d'autres composantes de déformations notées :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2 \cdot \varepsilon_{xy} ; \\ \gamma_{xz} &= 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (02)$$

On utilise également une notation du tenseur des déformations (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas les composantes sont les suivantes :  $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz} \rangle$

##### 1.3 Tenseur des contraintes

On considère le tenseur  $\sigma_{ij}$  du champ des contraintes (appelé tenseur de Cauchy-Euler) qui est une matrice symétrique notée  $[\sigma]$  et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (03)$$

On utilise également une notation du tenseur des contraintes (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas les composantes sont les suivantes :  $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz} \rangle$

On rappelle qu'une surface élémentaire de vecteur normal unitaire  $\vec{n}$  subissant un champ de contraintes  $[\sigma]$  dont le vecteur contraintes  $\vec{T}$  tel que :

$$\{T\} = [\sigma] \cdot \{n\} \quad (04)$$

Ainsi, si les composantes des vecteurs  $\vec{T}$  et  $\vec{n}$  sont les suivantes :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

On aura les relations :

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ T_y &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ T_z &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned} \quad (05)$$

## 2 Relations déplacements – déformations

A partir de la connaissance du champ de vecteurs déplacements, on peut déterminer le champ des tenseurs de déformations en utilisant les relations suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (07)$$

Ainsi, on peut déduire que :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Ou bien, en utilisant les notations indicielles :  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$

Les déformations constituent donc les sommes des dérivées premières des déplacements. Ceci est particulièrement important dans l'interprétation des résultats des calculs E F car dans cette méthode (la MEF), on calcule les déformations en dérivant les composantes des déplacements.

Par ailleurs, ces relations déplacements-déformations impliquent six conditions de compatibilité entre les composantes du tenseur des déformations (ou équations de Beltrami) et qui sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} = 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 & \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (08)$$

## 3 Relations contraintes – déformations

En utilisant la loi de Hooke, on peut ensuite déterminer facilement les composantes du tenseur des contraintes de la manière suivante :

$$\{\sigma\} = [H].\{\varepsilon\} \quad (09)$$

La matrice  $[H]$  est appelée matrice de Hooke. Dans le cas tridimensionnel d'un matériau homogène et isotrope défini par un module de Young E et un coefficient de Poisson, cette matrice  $[H]$  peut être obtenue comme suit :

$$[H] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} a & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & a & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \text{ avec } a = (1-\nu) \text{ et } b = \frac{1-2\nu}{2} \quad (10)$$

On peut réécrire la relation précédente, en utilisant la relation de Lamé comme suit :

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] + \lambda.(Tr[\varepsilon]).[I]$$

Les coefficients  $\lambda$  et  $G$  sont connus sous le nom de coefficients de Lamé tels que  $\lambda$  est le module de compressibilité et  $G$  le module de cisaillement avec :

$$\lambda = \frac{\nu.E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sur la relation précédente, on voit bien que la définition du coefficient de compressibilité  $\lambda$  impose des valeurs limites au coefficient de Poisson telles que  $0 \leq \nu < 0.5$ . Par exemple, pour  $\nu = 0.5$ , le matériau est considéré comme incompressible puisque dans ce cas  $\lambda \simeq \infty$ .

## 4 Cas bidimensionnel de l'élasticité plane

Dans certains cas de géométries et de chargements, le calcul tridimensionnel 3D peut être simplifié et réduit à un calcul bidimensionnel 2D. Pour cela, il existe essentiellement trois cas de calculs.

### 4.1 Etat des contraintes planes

Dans ce cas, le tenseur des contraintes  $[\sigma]$  est réduit en tout point du solide (dont le plan moyen se trouve dans le plan défini par le repère  $(O,x,y)$ ) à des composantes nulles suivant la direction perpendiculaire  $Oz$ . Donc toutes les composantes portant l'indice  $z$  sont nulles, c'est-à-dire :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Ainsi au lieu d'écrire le tenseur des contraintes sous cette forme :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , la simplification consiste à ne considérer les calculs que selon les deux directions  $x$  et  $y$  du plan  $(O, x,y)$  et le tenseur des contraintes se trouve réduit à :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$

Toutefois, le tenseur des déformations correspondant est égal à :  $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$  tel que  $\varepsilon_z \neq 0$ .

Par ailleurs, en remplaçant les composantes nulles par leurs valeurs dans (9) et en tenant compte de (10), la relation contraintes – déformations dans le cas des états de contraintes planes, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (11)$$

Cela étant dit, ce cas est généralement rencontré (voir figure 01) dans le calcul des pièces mécaniques dont l'épaisseur définie selon z peut être considérée comme faible devant les autres dimensions (exemple : cas des clés à fourche de serrage)

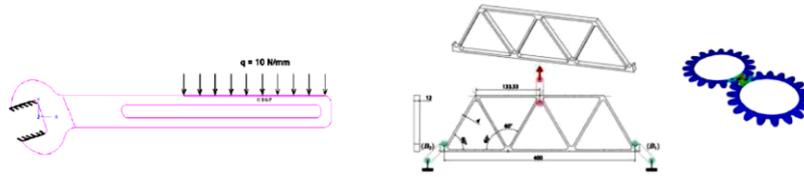


Figure 01 : exemple de cas de calcul 2D en contraintes planes

## 4.2 Etat des déformations planes

Dans ce cas, le tenseur des déformations  $[\varepsilon]$  est réduit en tout point du solide (dont le plan moyen se trouve dans le plan défini par le repère  $(O,x,y)$ ) à des composantes nulles suivant la direction perpendiculaire Oz, donc toutes les composantes portant l'indice z sont nulles, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

Ainsi au lieu d'écrire le tenseur des déformations sous cette forme :  $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , la simplification consiste à ne considérer les calculs que selon les deux directions x et y du plan  $(O, x, y)$  et le tenseur des déformations se trouve réduit à :  $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$

Toutefois, le tenseur des contraintes correspondant est :  $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$  tel que  $\sigma_z \neq 0$ .

Par ailleurs, en remplaçant les composantes nulles par leurs valeurs dans (9) et en tenant compte de (10), la relation contraintes – déformations dans le cas des états de déformations planes, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{DP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

avec  $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

Cela étant dit, ce cas est généralement rencontré dans le calcul des structures dont l'épaisseur (plus précisément la longueur) définie selon z est infiniment grande devant les autres dimensions (exemple : cas des conduites de pipeline soumises à des pressions internes dues au fluide transporté et dont la longueur est infiniment grande devant les dimensions de la section transversale).

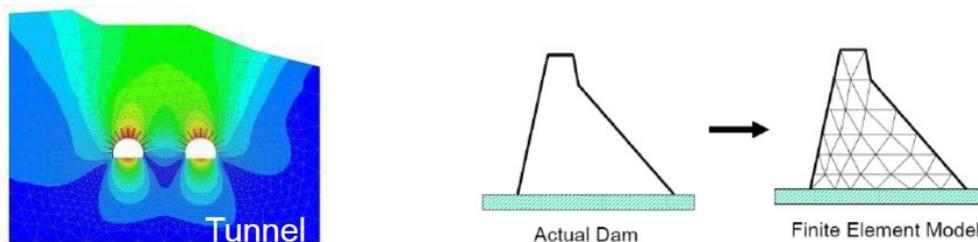


Figure 02 : cas de calculs en déformations planes de tunnels ou de digue de barrages

### 4.3 Etat de la symétrie axiale de révolution

Dans ce cas, si pour toute section perpendiculaire à l'axe de symétrie de révolution  $z$  de la structure, les tenseurs des contraintes  $[\sigma]$  et des déformations  $[\varepsilon]$  sont constants en tout point de cette section, les calculs 3D peuvent être réduits aux calculs bidimensionnels 2D axisymétriques, dont l'axe des abscisses constitue la direction radiale (selon le rayon) et l'axe des ordonnées constitue l'axe  $z$  de symétrie de révolution. Il est important de noter que cette simplification des calculs, n'est valable que si les chargements appliqués sur cette structure vérifient eux aussi la condition de symétrie de révolution autour de l'axe  $z$ .

L'exemple le plus simple est celui du réservoir cylindrique vertical soumis à la fois au poids propre vertical de ses parois et aux pressions hydrostatiques du fluide stocké. En effet, malgré leur variabilité selon la hauteur (ou la direction  $z$ ), ces pressions appliquées sur les parois du réservoir selon les directions radiales sont constantes au niveau de chaque section horizontale. Ce qui permet d'adopter le modèle 2D de calcul axisymétrique. Toutefois, dès que les charges appliquées deviennent non symétriques (telles que les pressions extérieures dues au vent qui viennent s'appliquer sur le réservoir), le modèle de calcul axisymétrique n'est plus valable. Ainsi, on voit clairement que les conditions de simplification vers le cas axisymétriques ne concernent pas uniquement la géométrie de la structure, mais concernent également le chargement appliqué.

Pour la formulation, ceci sort du cadre de ce cours (qui n'est qu'un rappel) et l'étudiant est invité à revoir son cours d'élasticité.

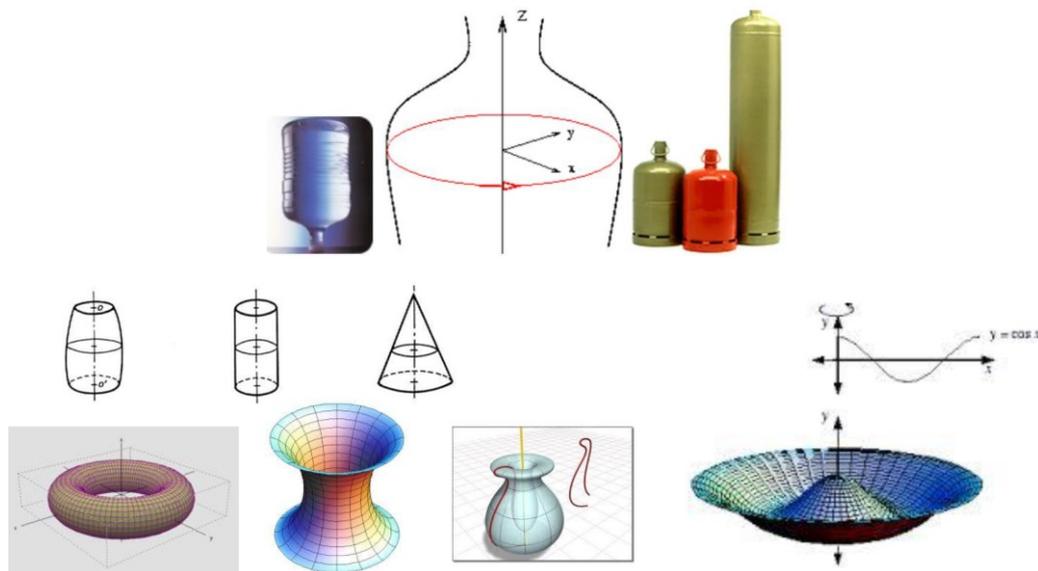


Figure 03 : cas des objets 3D présentant des axes de symétrie de révolution ou objets axisymétriques

## 5 Le problème posé en élasticité tridimensionnelle

### 5.1 Introduction

De manière globale, la résolution complète d'un problème en élasticité tridimensionnelle, consiste à déterminer les valeurs de 15 inconnues scalaires à l'aide de 15 équations fondamentales. Les 15 inconnues scalaires sont :

- 3 composantes du vecteur déplacement  $\vec{U}$
- 6 composantes du tenseur de déformation  $[\varepsilon]$
- 6 composantes du tenseur des contraintes  $[\sigma]$

Les quinze (15) équations fondamentales sont :

- 6 équations vues précédemment pour relier les déplacements  $\vec{U}$  aux déformations  $[\varepsilon]$
- 6 équations vues précédemment pour relier les déformations  $[\varepsilon]$  aux contraintes  $[\sigma]$
- 3 équations décrivant l'équilibre interne des forces appliquées sur un élément infiniment petit du solide et qui peut être assimilé à un point M du solide au niveau macroscopique.

Les éléments finis dits « formulés en déplacements » (ce qui est le cas de la quasi-totalité des logiciels de calculs utilisés en ingénierie), consiste à formuler le problème avec seulement 3 inconnues scalaires (que sont les composantes du vecteur déplacement  $\vec{U}$ ). La solution recherchée est donc un champ de déplacements  $\vec{U}(x, y, z)$  qui est transformée par la suite en un champ de déformations puis en un champ de contraintes et ce, grâce aux relations vues précédemment (déplacements – déformations et déformations-contraintes).

## 5.2 Equations d'équilibre

Considérons un domaine  $\Omega$  délimité par une frontière  $\Gamma$  telle que  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$  où  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_F$  sont deux parties disjointes. Le champ de déplacement en frontière est donné sur  $\Gamma_D$ . Pour simplifier davantage, nous supposons que  $\Omega$  est fixé (ou bloqué) sur  $\Gamma_D$ . Sur la frontière  $\Gamma_F$ , une densité de forces surfaciques (par unité de surface) notée  $f_s$  est appliquée.  $\Omega$  est également soumise à une densité de forces volumiques (par unité de volume) notée  $f_V$  (figure 03). La notation  $\mathbf{n}$  représente le vecteur normale, unitaire et sortant de  $\Gamma$ .

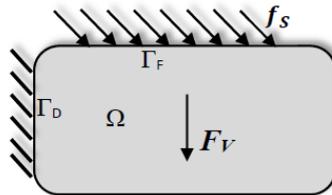


Figure 03 : position du problème

Comme mentionné auparavant, la solution recherchée est donc le champ de déplacements  $\vec{U}(x, y, z)$  à l'intérieur du domaine  $\Omega$  avec pour composantes :

$$\{U(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Sur  $\Gamma_F$ , on impose des efforts de surface  $\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{s_x} \\ f_{s_y} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix}$

et dans  $\Omega$ , on impose des efforts de volume  $\{F_V\} = \begin{Bmatrix} F_{V_x} \\ F_{V_y} \\ F_{V_z} \end{Bmatrix}$

On rappelle que le vecteur normal unitaire sortant  $\vec{n}$  sont les suivantes :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Ainsi, si on considère un élément de volume infinitésimal de dimensions  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  tel que représenté en figure 04, et après avoir écrit les équations d'équilibre en translation ainsi qu'en rotation, on obtient finalement en (13) le système d'équations aux dérivées partielles qui représentent les équations d'équilibre :

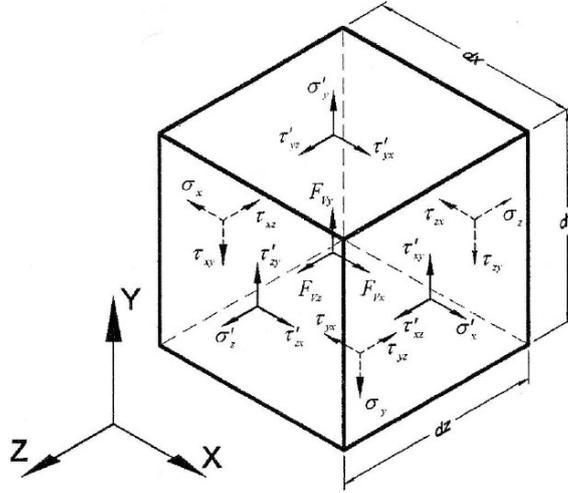


Figure 04 : Efforts subis par l'élément de volume infinitésimal dont l'évolution entre deux faces parallèles est à titre d'exemple  $\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ , etc.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

### 5.3 Conditions aux limites

Concernant les conditions aux limites (ou aux frontières), on a des CL en déplacements imposés sur  $\Gamma_D$  et des CL en densités de forces imposées sur  $\Gamma_F$ , telles que :

- Sur  $\Gamma_D$  on a :  $\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}$  avec  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  des valeurs connues et très souvent nulles aux appuis.
- Sur  $\Gamma_F$  les efforts de surface appliqués vérifient les relations suivantes :
  - $\{f_S\} = [\sigma] \cdot \{n\}$  (14)

avec :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{Sz} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

On aura les relations :

$$\begin{aligned} f_{Sx} &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ f_{Sy} &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ f_{Sz} &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned} \quad (15)$$

## 6 Energie de déformation élastique

Lorsque le domaine  $\Omega$  se déforme tout en restant dans le domaine élastique, il emmagasine une quantité d'énergie (sous la forme d'énergie potentielle) appelée énergie de déformation élastique notée  $W_{el}$  et qui se calcule à partir de la connaissance des champs de contraintes et de déformations à l'intérieur du domaine  $\Omega$  en utilisant l'expression suivante :

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz}) d\Omega \quad (16)$$

## 7 Principe des travaux virtuels

Soit une particule de matière soumise à un système de forces réelles  $\vec{F}_i$  en équilibre telles que  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$  et que l'on applique à cette particule un déplacement virtuel  $\delta \vec{U}$ . Le théorème des travaux virtuels énonce que le travail virtuel  $\delta W$  de ce déplacement est nul avec :

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{U} = 0$$

Ce principe applicable aux particules de matières peut être étendu au cas d'un corps déformable  $\Omega$  et de frontière  $\Gamma$ , en équilibre et constitué d'un nombre infini de particules élémentaires, soumis à des déplacements imposés sur  $\Gamma_D$ , à des efforts de surface  $\vec{f}_S$  sur  $\Gamma_F$  et à des efforts de volume  $\vec{F}_V$  à l'intérieur de  $\Omega$ . Etant en état de déformation élastique et en état d'équilibre, on superpose au champ de déplacements réels ce corps  $\vec{U}$  un champ de déplacements virtuels  $\delta \vec{U}$  quelconque mais cinématiquement admissible, c'est-à-dire que le nouveau champ  $(\vec{U} + \delta \vec{U})$  vérifie encore les conditions cinématiques de déplacements imposés sur  $\Gamma_D$  et que  $\delta \vec{U}$  est dérivable. Ceci implique que  $\delta \vec{U} = \vec{0}$  sur  $\Gamma_D$  et est quelconque ailleurs et a des composantes notées  $\langle \delta U \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle$ .

Ce champ de déplacements virtuels engendre un champ de déformations virtuelles noté  $\langle \delta \varepsilon \rangle$  dont les composantes sont  $\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{xz} \quad \delta \gamma_{yz} \rangle$ . Ainsi, le théorème des travaux virtuels, établit que le travail virtuel externe total (dû aux forces extérieures) est égal au travail virtuel interne total (dû aux efforts intérieurs) telle que :

$$W = - \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \{ F_S \} d\Gamma = 0 \quad (17)$$

Cette expression a une importance particulière en EF car elle est à la base de la formulation de la plupart des éléments finis utilisés dans la pratique. Par ailleurs, cette expression ne s'applique pas dans le cas de la présence de forces ponctuelles. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire d'introduire dans l'expression précédente un terme supplémentaire représentant le travail virtuel total de  $m$  forces ponctuelles  $\vec{F}_p^i$  dont le point d'application subit un déplacement virtuel  $\delta \vec{U}_p^i$  et telle que :

$$W = - \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \{ F_S \} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta \vec{U}_p^i \cdot \vec{F}_p^i = 0 \quad (18)$$

## 8 Contraintes principales

Pour un état de contraintes donné par le tenseur  $[\sigma]$  écrit dans un repère  $(O,x,y,z)$  qui n'est à priori pas principal, on peut déterminer dans un premier temps les valeurs des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  qui ne sont rien d'autres que les valeurs propres de la matrice  $[\sigma]$  et qu'on peut obtenir en résolvant le système d'équations suivant :  $\det([\sigma] - \sigma_i[I])=0$   $i=1,2,3$  avec  $[I]$  la matrice identité  $(3 \times 3)$ .

Pour sa part la détermination du repère principal  $(0, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  portant respectivement les contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  obtenues précédemment, consiste à déterminer les composantes des vecteurs  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$  qui ne sont rien d'autres que les vecteurs propres de  $[\sigma]$  et qu'on peut obtenir en résolvant pour chaque valeur propre  $\sigma_i$  ( $i=1,2,3$ ), le système d'équations :

$$([\sigma] - \sigma_i[I])\{\vec{n}_i\} = \{\vec{0}\} \text{ avec } \|\vec{n}_i\| = \sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2}$$

## 9 Contraintes de Von-Mises

Le critère de Von-Mises constitue l'un des critères les plus utilisés en conception mécanique, notamment pour les matériaux ductiles et isotropes. Ce critère consiste à fixer un seuil sur la densité volumique d'énergie de distorsion élastique et de déduire une contrainte équivalente appelée aussi contrainte de Von-Mises. Notée  $\sigma_{VM}$ , cette contrainte équivalente sera comparée par la suite, soit avec la limite élastique  $f_y$  (éventuellement réduite par un coefficient de sécurité  $\gamma_M$ ), soit avec une limite de rupture donnée par un règlement ou une norme de calcul.

Ainsi la vérification en un point quelconque d'une pièce mécanique est généralement comme suit :

$$\sigma_{VM} \leq \frac{f_y}{\gamma_M}$$

avec  $\gamma_M$  : un coefficient de sécurité  $> 1$

et  $f_y$  la limite élastique du matériau.

La valeur de  $\sigma_{VM}$  peut être obtenue de deux manières différentes :

- soit à partir des contraintes non principales données par le tenseur  $[\sigma]$  telle que :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2}}$$

- soit à partir des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  obtenues en utilisant les formules du paragraphe précédent telles que :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}}$$

Remarque : Nous comparons généralement la valeur maximale  $\sigma_{VM,Max} = \text{Max}(\sigma_{VM,i})$  avec  $i = 1, N$ . Avec  $N$  le nombre total de nœuds du maillage sur lequel le calcul éléments finis a été effectué. Toutefois, en présence de singularités (ou de points singuliers que nous verrons plus loin), cette démarche n'est pas correcte.

## Chapitre 02 :

### Concepts de base de la méthode des éléments finis

#### 1 Principe fondamental

Le principe fondamental de la MEF est de transformer un problème continu (modélisé mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites) en un problème discret qui est modélisé mathématiquement par un système d'équations linéaires. La solution d'un problème continu est un champ continu d'une grandeur physique (par exemple : le champ de vecteurs déplacements en mécanique) alors que la solution d'un problème discret est un ensemble de valeurs prises par cette grandeur physique en des points particuliers appelés « nœuds du maillage ».

En élasticité linéaire, le système d'EDP est constitué d'équations d'équilibre du domaine  $\Omega$  avec des conditions aux limites de type déplacements imposés sur  $\partial_1\Omega$  et de type efforts imposés sur  $\partial_2\Omega$  telles que la frontière  $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$  et  $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$  (voir figure 1a). Le problème consiste à chercher sur  $\Omega$  le champ de vecteurs déplacements  $\{U(u, v, w)\}$  qui est solution de ce système d'équations tout en vérifiant les conditions aux limites. Obtenu sous forme discrète (uniquement aux nœuds du maillage), ce champ sera ensuite utilisé pour calculer le champ de déformations (en utilisant les relations cinématiques déformations-déplacements) ainsi que le champ de contraintes (en utilisant les relations de comportement contraintes-déformations). Cela permet également de calculer les réactions en zones d'appuis où les déplacements ont été imposés (sur  $\partial_1\Omega$ )

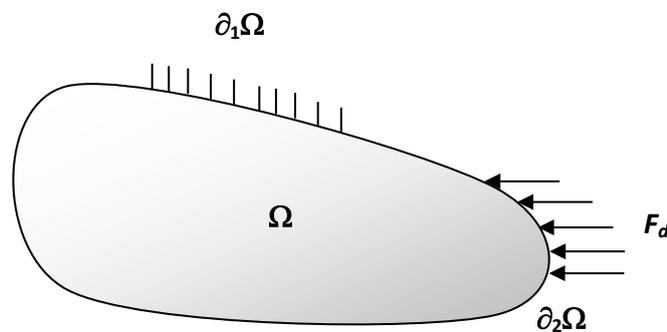


Figure 01a : Schéma de la structure à modéliser par éléments finis

#### 2 Formulation intégrale

La MEF consiste à transformer selon différentes méthodes l'ensemble des équations aux dérivées partielles et conditions aux limites en une formulation intégrale qui consiste en une seule équation faisant intervenir des intégrales de type :

$$\int_{\Omega} [ \ ] dV + \int_{\partial\Omega} [ \ ] dS = 0$$

Nous verrons plus loin le contenu des crochets. La méthode la plus utilisée pour obtenir cette formulation intégrale est connue sous le nom de : « méthode des résidus pondérés ».

### 3 Maillage

Cette opération consiste à subdiviser le domaine  $\Omega$  en un ensemble d'éléments de formes simples. En 2D, le domaine  $\Omega$  est subdivisé soit en triangles, soit en quadrangles. En 3D, la subdivision se fait principalement en utilisant des tétraèdres, des pentaèdres ou prismes ainsi que des hexaèdres ou cubes. Les éléments finis ainsi définis sont connectés entre eux par des points situés sur leurs contours et sommets. Ces points sont appelés « nœuds ». Chaque nœud possède des degrés de liberté qui sont les composantes du vecteur déplacement  $\{U\}$  qui est l'inconnue recherchée en ce point. Le nombre de nœuds du maillage multiplié par le nombre de ddl par nœud représente le nombre total d'inconnues du système d'équations à résoudre. Par conséquent, ce nombre désigne la taille du modèle de calcul par EF ainsi que le temps de calcul. Par ailleurs, le nombre d'éléments des modèles 3D sont souvent de l'ordre de milliers (voir de dizaines de milliers) d'éléments.

Dans la pratique, il existe un grand nombre de types d'éléments finis utilisés. Ces éléments se distinguent principalement par leur géométrie ainsi que par leur comportement pris en compte dans leur formulation mathématique. Par exemple, les éléments finis de type « barre » et ceux de type « poutre » sont identiques géométriquement mais leurs comportements sont différents. En effet, l'élément barre travaille uniquement à la traction-compression tandis que l'élément « poutre » travaille à la traction, compression, flexion et torsion.

### 4 Utilité du maillage

L'opération de maillage du domaine  $\Omega$  permet de :

- 1- de calculer plus facilement les intégrales sur le domaine  $\Omega$ ; ceci consiste en la sommation des intégrales calculées sur chaque élément.
- 2- de pouvoir exprimer mathématiquement la solution recherchée comme un assemblage de solutions de forme assez simple sur chaque élément. Autrement dit, on cherche la solution  $\{U(x, y, z)\}$  sur le domaine  $\Omega$  sous la forme de l'union de  $N$  solutions  $\{U_i(x, y, z)\}$  des  $N$  éléments du maillage. L'indice  $i$  est celui de l'élément considéré tel que :

$$\{U_i(x, y, z)\} = \begin{pmatrix} u_i(x, y, z) \\ v_i(x, y, z) \\ w_i(x, y, z) \end{pmatrix}$$

En général, les composantes  $u_i$ ,  $v_i$  et  $w_i$  sont de nature polynomiale et sont exprimées en utilisant le principe de l'interpolation nodale que nous verrons au chapitre 5.

### 5 Transformation en un système d'équations linéaires

L'introduction de l'interpolation nodale dans la formulation intégrale mentionnée dans le paragraphe (2) et l'utilisation de méthodes d'intégrations numériques conduisent finalement à transformer les EDP de départ en un système linéaire d'équations de la forme :

$$[K]\{U_{Nd}\} = \{F_{Nd}\}$$

Avec

$[K]$  : une matrice complètement connue appelée matrice de rigidité globale du système

$\{F_{Nd}\}$  : le vecteur représentant les forces nodales équivalentes appliquées aux nœuds du maillage. Il est connu également sous le nom de vecteur force globale.

$\{U_{Nd}\}$  : un vecteur représentant les déplacements aux nœuds du maillage. Il est connu également sous le nom de vecteur déplacement global.

Il est à noter que la grande majorité des composantes de  $\{F\}$  sont connues sauf aux zones d'appuis (réactions d'appuis inconnues). Par contre, la grande majorité des composantes de  $\{U_{Nd}\}$  sont inconnues sauf en zones d'appuis (déplacements bloqués).

## 6 Types d'éléments finis

Comme déjà précisé précédemment, les types d'éléments finis se distinguent par leurs formes géométriques et par leurs comportements. Une liste assez complète mais pas exhaustive, des différentes formes d'éléments utilisés sera présentée dans le présent chapitre.

Ils sont subdivisés en trois grandes catégories (figure 01b) :

- 1- Les éléments unidimensionnels 1D qui selon leur degré sont des segments de droite ou de courbe
- 2- Les éléments à deux dimensions 2D qui selon leur degré sont des morceaux de plan ou de surface
- 3- Les éléments à trois dimensions 3D qui selon leur degré sont des morceaux de volume bornés par des faces planes ou non planes.

Les modèles 1D et 2D sont des modèles simplifiés de modèles 3D qui sont de tailles importantes. Toutefois, cette simplification doit se faire sous condition. Par exemple, les éléments de type « plaque » et « coque » sont géométriquement une portion de surface à laquelle est associé un paramètre d'épaisseur qui est supposée petite devant les autres dimensions. De la même manière, les éléments de type « poutre » et « arc » sont géométriquement une portion de courbe à laquelle est associée une section transversale dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur de cette poutre (ou de cet arc). Ces éléments (plaques, coques, poutre et arcs) ne fourniront des résultats précis que si ces hypothèses sont bien vérifiées.

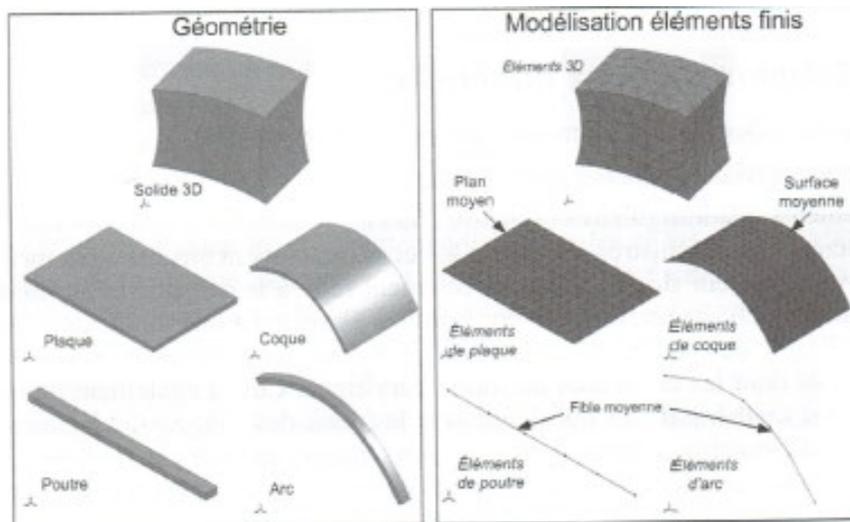


Figure 01b : Différentes catégories de modélisation par EF

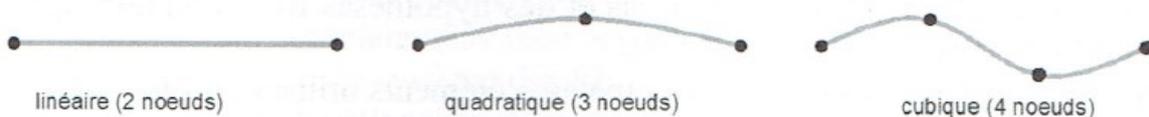


Figure 02 : Trois types d'éléments unidimensionnels 1D

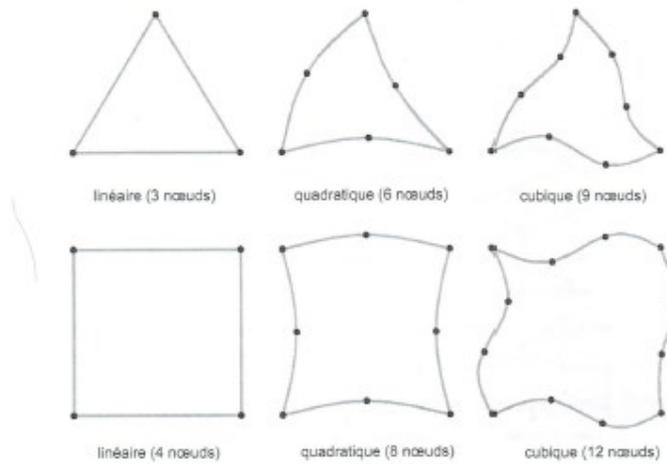


Figure 03 : Types d'éléments finis utilisés en 2D

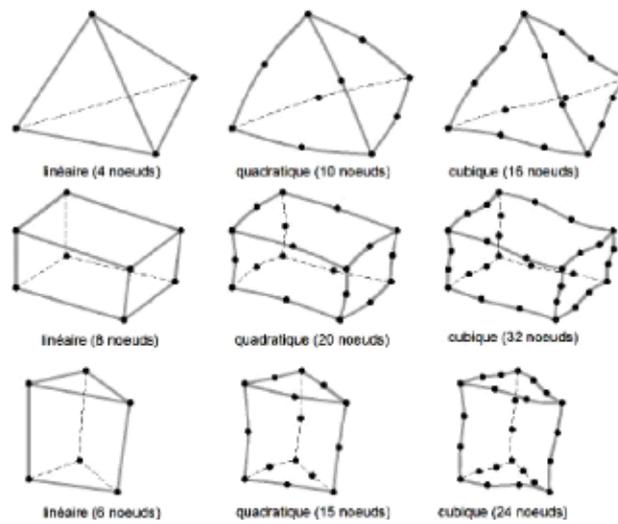


Figure 04a : Types d'éléments finis utilisés en 3D.

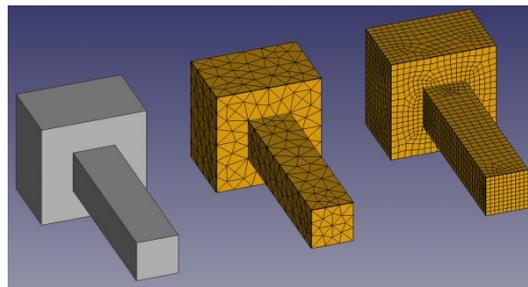


Figure 4b : Exemple de la géométrie d'une pièce à sections variables avec génération de maillages composés d'éléments prismatiques (au milieu) et d'éléments cubiques (à droite)

## 7 Règles de construction (ou de génération) des maillages

Le domaine  $\Omega$  peut être maillé avec différents types d'éléments (1D rectiligne ou curviligne, 2D plan ou surfacique et 3D). Toutefois, cette opération de maillage doit respecter un certain nombre de règles concernant la manière dont ces éléments doivent se connecter les uns aux autres. Elles sont comme suit :

- 1- Le maillage doit recouvrir la totalité du domaine  $\Omega$

- 2- Deux éléments voisins d'un maillage ne doivent pas se chevaucher (ou se recouvrir totalement ou partiellement) et leur connexion doit se faire sur leur frontière commune. Ils peuvent être connectés par un nœud commun, une arête commune de même degré ou une face commune de même degré (voir les figures 05 à 08)
- 3- Les connexions entre éléments de degrés différents sont proscrites (ou interdites). Pour bien comprendre, il suffit de voir la figure 09 illustrant la connexion entre un élément triangulaire linéaire de type TRI3 avec un élément triangulaire quadratique (de degré 2) de type TRI6 à six nœuds. Cette figure montre qu'il y a soit chevauchement, soit création de vides inadéquats.
- 4- Les nœuds communs peuvent représenter soit la continuité de la matière, soit la liaison mécanique entre les éléments. On peut dans certains cas particuliers avoir des nœuds « doubles » qui ont les mêmes coordonnées (cas du problème de contact par exemple).

Il est à noter qu'un maillage vérifiant toutes ces règles est dit « conforme ».

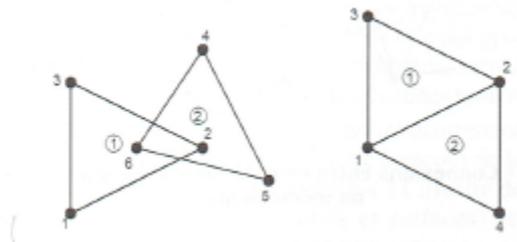


Figure 05 : connexion entre deux éléments triangulaires

**Notation** : les nœuds sont généralement numérotés sans être encerclés. Par contre, les numéros des éléments sont soit encerclés, soit mis entre parenthèses.

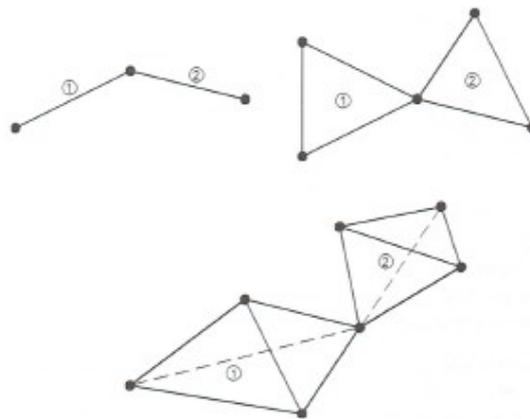


Figure 06 : connexions entre deux éléments par un nœud commun

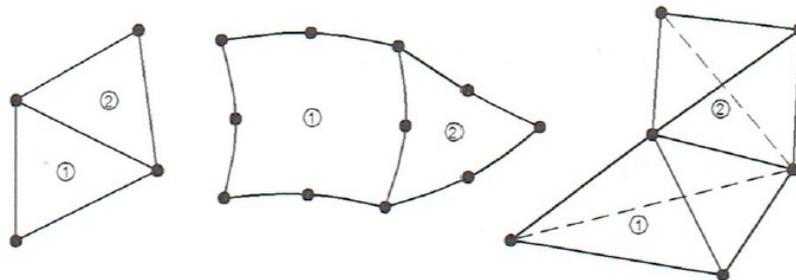


Figure 07 : connexion entre deux éléments par une arête commune de même degré.

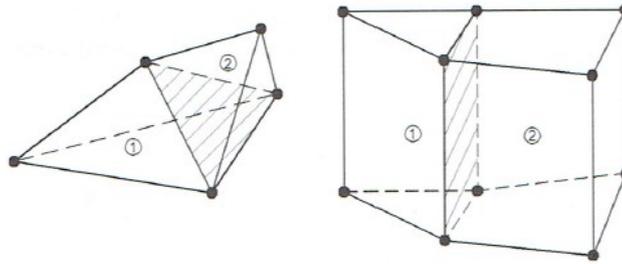


Figure 08 : connexion entre deux éléments par une face commune de même degré

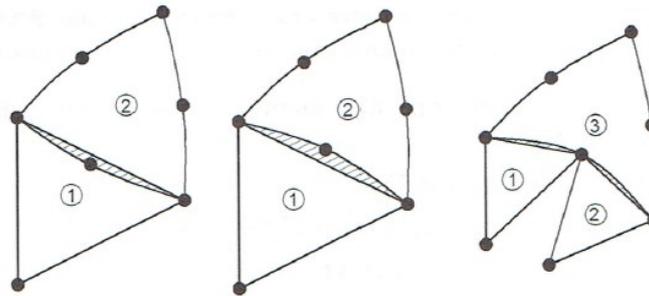


Figure 09 : connexions inadéquates entre éléments de degrés différents.

## 8 Raffinement des maillages

Le raffinement de maillage consiste à diminuer la taille des éléments. En effet, cette opération est effectuée en augmentant le nombre d'éléments du maillage et donc la taille du modèle ainsi que le temps de calcul. D'autre part, cette diminution de la taille permet d'augmenter la précision des calculs. Cette méthode est connue sous le nom de méthode  $-h$ . Une autre méthode connue sous le nom de méthode  $-p$  consiste à enrichir le degré des fonctions d'interpolation pour augmenter la précision. Autrement dit, il s'agit d'utiliser des éléments de degrés plus élevés. Une autre technique connue sous le nom « d'adaptation de maillage », consiste à utiliser localement la méthode  $-h$ . Cette solution consiste à raffiner localement le maillage en des zones où les erreurs de discrétisation sont importantes et à déraffiner (c'est-à-dire augmenter localement la taille des éléments) le maillage en des zones où ces erreurs de discrétisation sont faibles.



Figure 10 : Erreurs de discrétisation et raffinement de maillages

## Chapitre 03

### Les transformations entre espaces de coordonnées

#### 1 Principe

Considérons les deux espaces de coordonnées suivants. Le premier est l'espace de coordonnées cartésiennes classique, défini par les coordonnées  $(x, y, z)$ . Cet espace est également appelé « espace réel ». On met en relation cet espace réel de coordonnées cartésiennes avec un autre espace de coordonnées tridimensionnelle que nous appellerons espace de coordonnées paramétriques (ou espace de référence en éléments finis). Cet espace est décrit par les coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Un exemple très courant de ce type de transformation entre espaces de coordonnées est l'utilisation de coordonnées cylindriques. Dans le cas des coordonnées cylindriques, les coordonnées que l'on considère (avec les notations habituellement utilisées) sont  $\xi = r$ ,  $\eta = \theta$ ,  $\zeta = z$ .

On établit la relation entre les deux espaces en considérant les fonctions :

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\z &= z(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}\tag{01}$$

Cela permet de déterminer les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  du point correspondant au point de coordonnées  $(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'espace de coordonnées paramétriques. Dans le cas de coordonnées cylindriques, ces relations sont :

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos(\theta) \\y &= r \cdot \sin(\theta) \\z &= z\end{aligned}\tag{02}$$

#### 2 Matrice Jacobienne

Dans plusieurs situations de calcul, nous avons souvent besoin (en vue de les simplifier) de faire des transformations d'opérateurs différentiels (des dérivées simples ou partielles) et intégraux (des intégrales simples ou multiples) entre les deux espaces de coordonnées. La matrice Jacobienne  $[J]$  permet assez facilement d'exprimer la transformation des opérateurs différentiels et intégraux entre les deux espaces de coordonnées :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}\tag{03}$$

En effet, nous verrons plus loin dans ce chapitre, que la MEF utilise ces transformations (intégrales et dérivées) dans les opérations de passage entre les éléments réels du maillage et éléments de référence. Ce qui permet de faciliter les calculs aussi bien manuellement que sur ordinateur (réduction du temps CPU des calculs).

### 3 Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul intégral

Concernant la transformation des intégrales, on utilise le déterminant de la matrice Jacobienne  $det[J]$  qui est utilisé de la manière suivante. Soit une fonction  $F(x, y, z)$  qui se transforme dans l'espace des coordonnées paramétriques en une fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (04)$$

On transforme les intégrales entre les deux espaces en utilisant l'expression générale :

$$\begin{aligned} \int_V F(x, y, z). dx. dy. dz &= \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta, \zeta). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \end{aligned} \quad (05)$$

On déduit également de cette équation la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx. dy. dz = det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \quad (06)$$

Remarque : Si on applique la relation précédente au cas des coordonnées cylindriques, on retrouve la relation bien connue entre les deux éléments infinitésimaux cartésiens et cylindriques :

$$dx. dy. dz = det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta = r. dr. d\theta. dz \quad (07)$$

En effet, si on considère la transformation avec le système de coordonnées cylindrique, la matrice  $[J]$  s'écrira :

$$\begin{aligned} [J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial \theta} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial z} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi  $det[J]. = 1. (r. \cos^2(\theta) + r. \sin^2(\theta)) = r. (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = r$

### 4 Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul des dérivées partielles

En ce qui concerne la transformation des dérivées partielles entre espaces de coordonnées, on utilise l'inverse de la matrice Jacobienne notée  $[j]$  :

$$[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \quad (08)$$

Par la suite, cette matrice inverse  $[j]$  peut être utilisée de la manière suivante. Si la transformation de la fonction  $F(x, y, z)$  dans l'espace de coordonnées paramétriques en une fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  s'effectue

telle que  $(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta))$ , les transformations des dérivées entre les deux espaces s'effectuent en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix} = [j] \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \quad (09)$$

Ceci permet de donner les trois relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= j_{11} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{12} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{13} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= j_{21} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{22} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{23} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= j_{31} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{32} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{33} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi, on peut transformer les dérivées partielles en  $(x, y, z)$  en des dérivées partielles en  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

## 5 Exemples d'application

### Exemple 01 :

On considère dans le plan, le cas de la transformation entre les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  et polaires  $(r, \theta)$ .

1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation

2- Donner son déterminant

3- Soit la fonction  $F(x, y) = x^2 y$  avec  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 2xy$ . Retrouver ce résultat en passant par des dérivées par rapport aux variables  $(r, \theta)$ .

### Solution

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met :  $\xi = r$  et  $\eta = \theta$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Mais on sait que :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta$$

Cela nous permet d'écrire :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial r} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial(r \cos \theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial(r \sin \theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

2/ Calculons le déterminant :

$$\det[J] = (\cos \theta \times r \cos \theta) - (-r \sin \theta \times \sin \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta).$$

Mais on sait que :

$$(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1.$$

Donc

$$\det[J] = r$$

Calculons ensuite

$$[J]^{-1} \quad \text{ou bien} \quad [j]$$

Tel que

$$[j] = \frac{1}{\det[J]} (\text{Com } [J])^T$$

Pour cela la comatrice de [J] est :

$$\text{Com } [J] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [J] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Et

$$(\text{Com } [J])^T = \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \Rightarrow (\text{Com } [J])^T = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Donc

$$[j] = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta \\ r \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}$$

Finalement

$$[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix}$$

3/ Le résultat, en passant par les dérivés, par rapport aux variables  $(r, \theta)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = [j] \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

où :

$$F(x, y) = x^2 y = (r \cos \theta)^2 (r \sin \theta) = r^2 \cos^2 \theta r \sin \theta \Rightarrow \varphi(r, \theta) = r^3 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 3r^2 \cos^2 \theta \sin \theta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = r^3 (\cos^2 \theta)' \sin \theta + r^3 \cos^2 \theta (\sin \theta)' = r^3 (-2 \cos \theta \sin \theta) \sin \theta + r^3 \cos^2 \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + r^3 \cos^3 \theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos \theta (3r^2 \cos^2 \theta \sin \theta) - \frac{\sin \theta}{r} (-2r^3 \cos \theta \sin^2 \theta + r^3 \cos^3 \theta).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2r^2 \sin \theta \cos^3 \theta + 2r^2 \cos \theta \sin^3 \theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2r^2 \sin \theta \cos \theta = 2(r \cos \theta)(r \sin \theta) = 2xy$$

Avec  $(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 1$  ;  $(r \cos \theta) = x$  et  $(r \sin \theta) = y$

Finalement, on retrouve :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2xy = 2(r \cos \theta)(r \sin \theta)$$

**Exemple 02 :**

On considère dans l'espace le cas de la transformation entre l'espace de coordonnées cartésiennes (x,y, z) et celui des coordonnées cylindriques (r, θ, z).

- 1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation.
- 2- Donner son déterminant
- 3- Donner sa matrice inverse.

**Solution**

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met :  $\xi = r$  ;  $\eta = \theta$  et  $\zeta = z$

$$x = x(\xi, \eta, \zeta) = x(r, \theta, z) = r \cos \theta \quad ; \quad y = y(\xi, \eta, \zeta) = y(r, \theta, z) = r \sin \theta$$

$$\text{et } z = z(\xi, \eta, \zeta) = z(r, \theta, z) = z$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2/ Donc comme déjà vu ci-dessus, le déterminant de [J] est :

$$\det[J] = r$$

3/ La matrice inverse.

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} (\text{Com } [J])^T$$

On commence par le calcul de la comatrice de  $[J]$  ou bien la matrice des cofacteurs.

$$\text{Com } [J] = \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} r \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} -r \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} -r \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} \sin \theta & 0 \\ r \cos \theta & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 \\ -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\text{Com } [J] = \begin{bmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \Rightarrow (\text{com } [J])^T = \begin{bmatrix} r \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ r \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$[j] = \frac{1}{r} (\text{Com}[J])^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{\sin \theta}{r} & 0 \\ \sin \theta & \frac{\cos \theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Chapitre 04

### Les techniques d'interpolation nodales en EF

#### 1 Introduction

Si on considère un élément quelconque d'un maillage, l'interpolation nodale en EF consiste à calculer une valeur approchée d'une grandeur en n'importe quel point à l'intérieur de cet élément et ce, en fonction des valeurs connues de cette grandeur aux nœuds de cet élément.

Du point de vue mathématique, l'interpolation nodale consiste également à trouver l'expression d'une fonction à partir de la connaissance de valeurs de cette fonction en un certain nombre de points. En effet, considérons le cas d'une fonction à une seule variable  $u(x)$  dont l'expression est a priori inconnue mais dont les valeurs sont connues en  $n$  points d'abscisses respectifs  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , tels que :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < \dots < x_n \quad \text{et} \quad u(x_1) = u_1, u(x_2) = u_2, \dots, u(x_n) = u_n.$$

Donc  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  sont des valeurs connues et l'expression de  $u(x)$  inconnue. Le problème consiste donc à trouver une « expression approchée » de  $u(x)$ . A cet effet, l'interpolation nodale est une méthode qui consiste à déterminer cette expression approchée de  $u(x)$  mais sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  tout en vérifiant les conditions  $u(x_i) = u_i$  et  $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$  avec  $i = 1, n - 1$ .

#### 2 Méthodes utilisées pour effectuer une interpolation nodale

Pour réaliser cette interpolation nodale, on peut procéder par deux méthodes différentes. La première est une méthode dite directe où l'on interpole directement dans l'élément (ou dans l'intervalle pour le cas 1D). Toutefois, cette méthode directe n'est facile à utiliser que dans le cas unidimensionnel (1D) où la fonction à interpoler est à une seule variable. Par contre, cette méthode d'interpolation directe est particulièrement difficile dans les cas bidimensionnel 2D de fonctions à deux variables  $u(x, y)$ , ainsi que dans le cas tridimensionnel 3D de fonctions à trois variables  $u(x, y, z)$ .

Pour remédier à cette difficulté, il existe une seconde méthode qui est assez facile et que nous verrons plus loin au paragraphe 4. Cette seconde méthode utilise les éléments dits «de référence ». En effet, au lieu d'interpoler directement dans l'élément réel, cette méthode consiste à interpoler en premier dans l'élément de référence, puis en utilisant les relations entre cet élément de référence et l'élément réel, on retrouve facilement l'expression de la fonction d'interpolation dans l'élément considéré du maillage.

#### 3 Le degré d'interpolation et son intérêt

La quasi-totalité des logiciels de calculs basés sur la MEF, proposent (indirectement) à l'utilisateur de choisir entre deux degrés d'interpolation. Le premier est dit linéaire de degré 1. Le second est dit quadratique de degré 2. De manière plus claire, reprenons l'exemple mathématique précédent et qui consistait à déterminer l'expression de la fonction à une seule variable  $u(x)$  sur une série de  $(n - 1)$  intervalles successifs  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i = 1, n - 1$ . En effet, pour déterminer  $u(x)$ , nous devons supposer comme étant connue l'allure de la variation de  $u(x)$  ou bien plus précisément son degré de variation à l'intérieur de chaque intervalle. Autrement dit, nous devons adopter un schéma d'interpolation. Par exemple, si nous supposons que la variation de  $u(x)$  entre les points d'abscisses respectifs  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , se fait de manière linéaire (selon l'allure d'un segment de droite) alors  $u(x)$  aura pour expression celle d'une fonction polynomiale de degré 1, de la forme :

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1. \quad \text{sur l'intervalle } [x_i, x_{i+1}] \quad (01)$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs des coefficients  $a_0$  et  $a_1$  qui sont deux inconnues à déterminer en résolvant le système d'équations ci-dessous sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i = 1, n - 1$ . Donc chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  aura ses propres coefficients  $a_0$  et  $a_1$  tel que :

$$\begin{cases} u(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i = u_i \\ u(x_{i+1}) = a_0 + a_1 \cdot x_{i+1} = u_{i+1} \end{cases} \quad (02)$$

Donc en adoptant un schéma d'interpolation linéaire de degré 1, il suffit d'avoir deux nœuds aux extrémités de chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  pour trouver l'expression approchée de  $u(x)$  sur cet intervalle.

Par ailleurs, il est important de rappeler que les valeurs trouvées (après résolution) des coefficients  $a_0$  et  $a_1$  ne sont valables que sur l'intervalle considéré  $[x_i, x_{i+1}]$ . Donc chaque intervalle aura ses propres valeurs  $a_0$  et  $a_1$ .

### Exemple 01 :

Soit un exemple unidimensionnel 1D d'un ensemble de 09 points compris entre 0 et  $2\pi$  dont les valeurs respectives sont :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_4 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x_5 = \pi$ ,  $x_6 = \frac{5\pi}{4}$ ,  $x_7 = \frac{3\pi}{2}$ ,  $x_8 = \frac{7\pi}{4}$ ,  $x_9 = 2\pi$ . La fonction  $u(x)$  dont l'expression est a priori inconnue possède les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} u(x_1) = u(0) = u_1 = 0, & \quad u(x_2) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \quad u(x_3) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3 = 1, \\ u(x_4) = u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = u_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_5) = u(\pi) = u_5 = 0 & \quad u(x_6) = u\left(\frac{5\pi}{4}\right) = u_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u(x_7) = u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = u_7 = -1 & \quad u(x_8) = u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = u_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_9) = u(2\pi) = u_9 = 0. \end{aligned}$$

En adoptant un schéma d'interpolation linéaire, qui consiste à résoudre le système de deux équations (02) sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i = 1, (9 - 1)$  les expressions approchées de  $u(x)$  seront comme suit :

$$u(x) = \begin{cases} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)x \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{2}{\pi}(2 - \sqrt{2})x + (\sqrt{2} - 1) \text{ pour } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi}(2 - \sqrt{2})x + (3 - \sqrt{2}) \text{ pour } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ -\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)x + 2\sqrt{2} \text{ pour } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases} \text{ et } u(x) = \begin{cases} -\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)x + 2\sqrt{2} \text{ pour } \pi \leq x \leq \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ -\frac{2}{\pi}(2 - \sqrt{2})x + (5 - 3\sqrt{2}) \text{ pour } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)x - (1 + 3\sqrt{2}) \text{ pour } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ \left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)x - 4\sqrt{2} \text{ pour } \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Soit  $u_{ex}(x) = \sin(x)$  la solution exacte du problème précédent. Les représentations graphiques de cette solution exacte ainsi que de l'expression approchée en pointillés de  $u(x)$  (figure 01 ci-dessous) montrent l'écart entre ces deux solutions en dehors des nœuds et mettent clairement en évidence le caractère approché de cette interpolation linéaire.

Par ailleurs, si on désire augmenter la précision de nos calculs, l'une des démarches couramment utilisées, consiste à adopter un schéma d'interpolation de degré plus élevé. Dans notre cas, le degré le plus élevé par rapport au degré 1 du schéma précédent sera le degré 2 où  $u(x)$  variera de manière quadratique dans chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , c'est-à-dire que  $u(x)$  doit avoir pour expression une fonction polynomiale de degré 2, de la forme :

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 \quad (03)$$

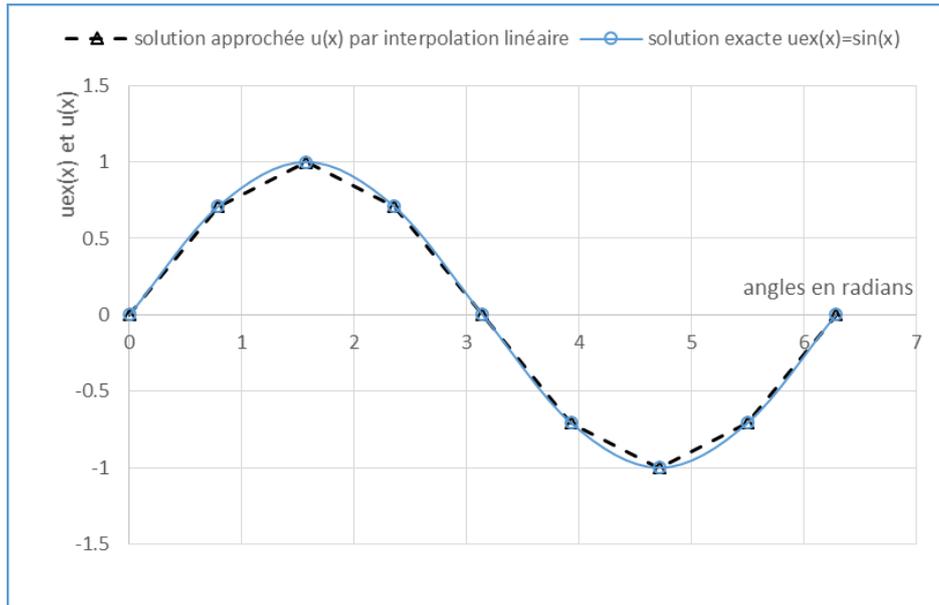


Figure 01 : schéma d'interpolation linéaire de la fonction  $u_{ex}(x) = \sin(x)$

Pour trouver les valeurs des trois inconnues  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sur chaque intervalle, nous avons besoin de trois équations. A cet effet, au lieu de considérer des intervalles à deux nœuds d'abscisses respectifs  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , il faut considérer cette fois des intervalles de type « à trois nœuds » :  $x_{i-1}, x_i$  et  $x_{i+1}$  appartenant à l'intervalle  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  avec  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  et telle que

$$u(x_{i-1}) = u_{i-1}, \quad u(x_i) = u_i \quad \text{et} \quad u(x_{i+1}) = u_{i+1},$$

$u_{i-1}, u_i$  et  $u_{i+1}$  étant des valeurs connues.

Ce qui permet d'avoir un système de trois équations à inconnues  $a_0, a_1$  et  $a_2$  faciles à déterminer en résolvant le système :

$$\begin{cases} u(x_{i-1}) = a_0 + a_1 \cdot x_{i-1} + a_2 \cdot x_{i-1}^2 = u_{i-1} \\ u(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 = u_i \\ u(x_{i+1}) = a_0 + a_1 \cdot x_{i+1} + a_2 \cdot x_{i+1}^2 = u_{i+1} \end{cases} \quad (04)$$

Finalement, on peut remarquer qu'en adoptant un schéma d'interpolation quadratique de degré 2, il fallait avoir au minimum trois nœuds dans chaque intervalle pour trouver l'expression approchée de  $u(x)$ . Ainsi, on arrive à la conclusion que plus on augmente le degré de l'interpolation (c'est-à-dire plus on désire augmenter la précision de nos calculs), plus on a besoin de nœuds à l'intérieur de l'intervalle considéré (c'est-à-dire de données).

### Exemple 02 :

Reprenons l'exemple précédent et adoptons un schéma d'interpolation quadratique de degré 02 mais en ne considérant cette fois que quatre intervalles (ou éléments) à trois nœuds (ou points) chacun. Le premier intervalle  $[x_1, x_3]$  contient les nœuds  $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{2}$ . Le second intervalle  $[x_3, x_5]$  contient les nœuds  $x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \frac{3\pi}{4}, x_5 = \pi$ . Le troisième intervalle  $[x_5, x_7]$  contient les nœuds

$x_5 = \pi, x_6 = \frac{5\pi}{4}, x_7 = \frac{3\pi}{2}$ . Le quatrième intervalle  $[x_7, x_9]$  contient les nœuds  $x_7 = \frac{3\pi}{2}, x_8 = \frac{7\pi}{4},$  et  $x_9 = 2\pi$ .

La fonction  $u(x)$  de degré 2 possède les valeurs suivantes aux 09 nœuds :

$$\begin{aligned}
u(x_1) = u(0) = u_1 = 0, & \quad u(x_2) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \quad u(x_3) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3 = 1, \\
u(x_4) = u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_5) = u(\pi) = u_5 = 0 & \quad u(x_6) = u\left(\frac{5\pi}{4}\right) = u_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
u(x_7) = u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = u_7 = -1 & \quad u(x_8) = u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = u_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_9) = u(2\pi) = u_9 = 0.
\end{aligned}$$

La résolution du système (04) de trois équations sur chacun des quatre intervalles précédents, donne les quatre expressions suivantes et dont la représentation graphique est illustrée sur la courbe en petits pointillés :

$$u(x) = \begin{cases} 1.164x - 0.3357x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0.3431 + 0.9456x - 0.3357x^2 & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0.6971 - 0.3274x + 0.3357x^2 & \text{pour } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0.5941 - 0.3055x + 0.3357x^2 & \text{pour } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

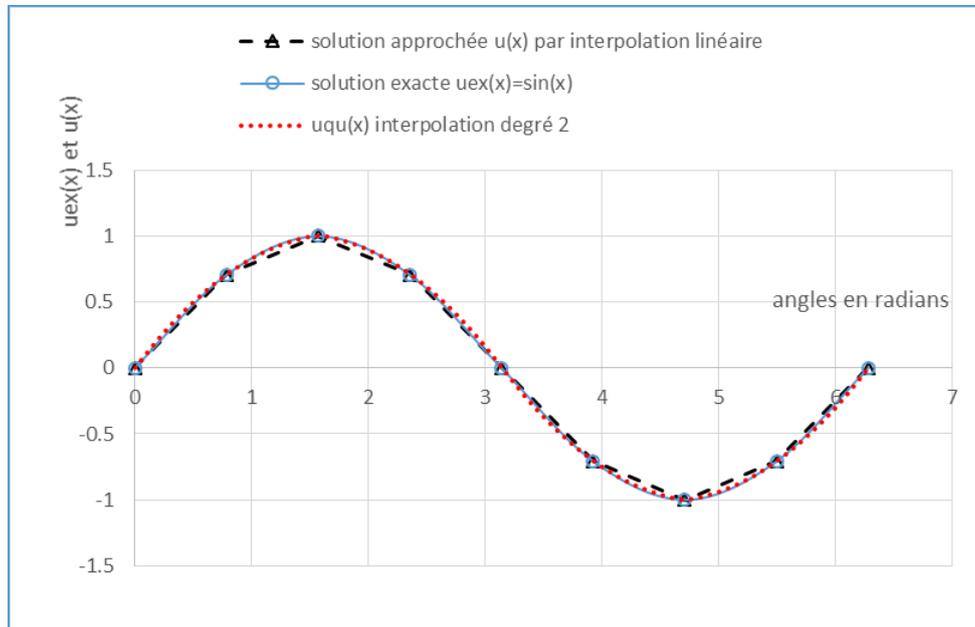


Figure 02 : schémas d'interpolations linéaires et quadratiques de la fonction  $u_{ex}(x) = \sin(x)$

Ainsi, on voit bien sur la figure 02 précédente que la courbe obtenue en utilisant l'interpolation de degré 2 est plus proche de la solution exacte que celle obtenue avec interpolation linéaire de degré 1. Ceci a permis de mettre en évidence l'augmentation de la précision en augmentant le degré du polynôme d'interpolation.

#### 4 Interpolation directe sur l'élément réel du maillage

Pour cette méthode d'interpolation directe dans un élément, nous commencerons d'abord par donner la formule générale utilisant les fonctions d'interpolations et ce, pour les trois cas 1D, 2D et 3D. En effet, soit un point M quelconque situé à l'intérieur d'un élément ou sur sa frontière. Soit  $n$  le nombre total de nœuds que contient cet élément. Soit une grandeur physique  $U$  dont les valeurs sont connues aux  $n$  nœuds de cet élément. Ces valeurs sont notées:  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ . La valeur approchée de  $U$  au point M peut être obtenue par interpolation directe en utilisant, selon le cas (1D, 2D ou 3D), les expressions suivantes :

Pour le cas unidimensionnel 1D, la grandeur  $U$  doit être considérée comme une fonction à une seule variable  $U(x)$  telle que :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x).U_i \quad (05)$$

Pour le cas bidimensionnel 2D, la grandeur  $U$  doit être considérée comme une fonction à deux variables  $U(x, y)$  telle que :

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y).U_i \quad (06)$$

Pour le cas tridimensionnel 3D, la grandeur  $U$  doit être considérée comme une fonction à trois variables  $U(x, y, z)$  telle que :

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z).U_i \quad (07)$$

$N_i(x)$ ,  $N_i(x, y)$  et  $N_i(x, y, z)$  sont respectivement les fonctions d'interpolations dans l'élément 1D, 2D et 3D. D'après ces formules, on peut remarquer facilement que le nombre total de ces fonctions d'interpolation dans un élément est égal au nombre total  $n$  de nœuds que contient cet élément.

Lorsque la grandeur  $U$  est de type vectorielle (champ de vecteurs à l'intérieur de l'élément), telle que  $U$  est composé de trois composantes  $\langle u, v, w \rangle$ , l'interpolation de  $U$  dans l'élément se fera sur chaque composante telles que :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z).u_i \\ v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z).v_i \\ w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z).w_i \end{cases} \quad (08)$$

Si la grandeur  $U$  est un champ de vecteurs à deux composantes  $\langle u, v \rangle$ , son interpolation dans l'élément se fera sur chaque composante comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y).u_i \\ v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y).v_i \end{cases} \quad (09)$$

Enfin, si la grandeur  $U$  est un champ scalaire, son interpolation dans l'élément se fera uniquement sur ses valeurs en utilisant la formule (05) ci-dessus.

Pour les cas 2D et 3D, il y a lieu de signaler que les expressions des fonctions d'interpolation  $N_i$   $i = 1, n$  sont particulièrement difficiles à déterminer de manière directe (en interpolation directe). Par contre, comme nous le verrons plus loin dans la seconde méthode, celles-ci sont faciles à utiliser dans l'élément de référence. Pour sa part, cette méthode d'interpolation directe est moins difficile à utiliser dans le cas 1D auquel cas nous nous limiterons dans le présent paragraphe. En effet, dans ce cas unidimensionnel (1D), deux schémas d'interpolation directe seront étudiés : le premier linéaire (de

degré 1) relatif à l'élément barre de type SEG2 (segment à 2 nœuds à ses extrémités) et le second de degré plus élevé en utilisant les polynômes de Lagrange.

#### 4.1 Schéma d'interpolation directe linéaire- cas de l'élément barre

Soit un élément barre de longueur  $l$  (de type segment de droite à 2 nœuds SEG2) constitué de deux nœuds  $i$  et  $j$  à ses extrémités d'abscisses respectives  $x_i$  et  $x_j$  avec  $l = x_j - x_i$ . (figure 03). Après chargement, la réponse de cette barre consiste en un champ scalaire de déplacements en tous ses points. Ce champ est noté  $U$  dont les valeurs aux nœuds  $i$  et  $j$  sont respectivement  $U_i$  et  $U_j$ . Soit un point M situé à l'intérieur de cet élément et tel que son abscisse  $x$  vérifie la condition suivante :  $x_i \leq x \leq x_j$  (figure 03).

- 1- Dans un premier temps, il est demandé de trouver l'expression du champ de déplacement  $U(x)$  correspondant au déplacement d'un point M d'abscisse  $x$  en interpolant directement entre les valeurs :  $U(x_i) = U_i$  et  $U(x_j) = U_j$ .
- 2- Par la suite il est demandé de trouver les expressions des fonctions d'interpolation  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  afin que l'on puisse retrouver et appliquer la formule (05) :

$$U(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cdot U_i$$

en prenant cette fois  $U_1 = U_i$  et  $U_2 = U_j$ .

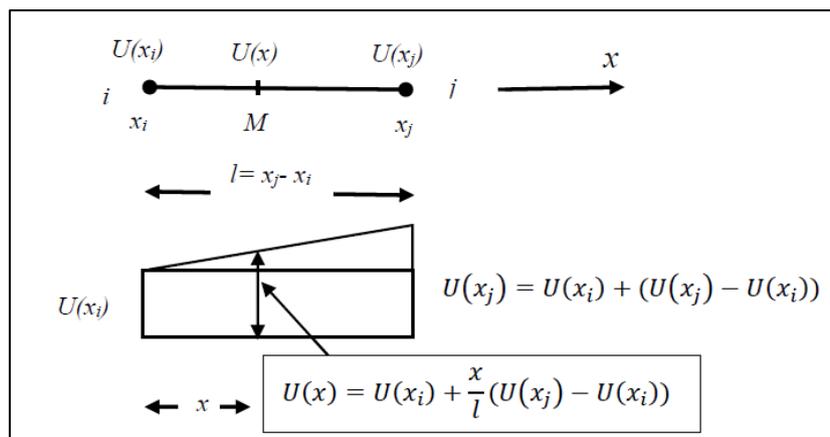


Figure 03 : interpolation linéaire directe dans un élément barre à 2 nœuds de type SEG2

Il est facile de constater en observant la figure 03 ci-dessus, que l'interpolation linéaire directe donne pour valeur du déplacement du point M d'abscisse  $x$ , l'expression suivante :

$$U(x) = U(x_i) + \frac{x}{l} (U(x_j) - U(x_i))$$

En second lieu, si on adopte la numérotation des nœuds  $i$  et  $j$  telle que  $U_1 = U_i$  et  $U_2 = U_j$  alors  $U(x)$  s'écrira :

$$U(x) = U_1 + \frac{x}{l} (U_2 - U_1) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_1 + \frac{x}{l} U_2$$

et en appliquant la formule (05) d'interpolation nodale, on aura :

$$U(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cdot U_i = N_1(x) \cdot U_1 + N_2(x) \cdot U_2$$

En égalisant les deux expressions précédentes, et par identification, on peut déduire que :

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{x}{l}$$

Finalement, et de manière générale, l'interpolation nodale de degré 1 d'une fonction  $u(x)$  dans un élément linéaire à 2 nœuds de type SEG2, peut être écrite comme suit :

$$U(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x).U_i = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2 \quad \text{avec} \quad N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{x}{l} \quad (10)$$

### Exemple 03 :

Soit une barre en acier de longueur  $l=1\text{m}$ , fixée à une extrémité 1 et soumise à une force  $F=100\text{ KN}$  à l'autre extrémité 2. Calculer d'abord le déplacement de l'extrémité 2 si l'aire de la section droite de la barre  $A=10\text{ cm}^2$  et le module de Young  $= 210000\text{ MPa}$ . Calculer ensuite en utilisant l'interpolation nodale directe le déplacement de cette barre en son milieu.

#### Solution :

Soit le modèle élément fini à 2 nœuds de type SEG2 tel que représenté sur la figure 04 ci-dessous.



Figure 04 : modélisation par EF d'une barre avec un seul élément 1D de type SEG2

Dans le cas de cette barre, l'extrémité 1 est fixée donc  $U_1=0$ . Calculons d'abord le déplacement de l'extrémité 2 (ou bien du nœud 2)

Le matériau étant élastique, si on suppose que le champ de contraintes est constant le long de la barre, tel que :

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = E. \varepsilon_x,$$

Cela implique que le champ de déformation l'est également tel que :

$$\varepsilon_x = \frac{U_2 - U_1}{l} = \frac{U_2 - 0}{l} = \frac{U_2}{l}$$

En remplaçant  $\varepsilon_x$  dans l'expression de  $\sigma_x$ , on aura :

$$\frac{F}{A} = E. \frac{U_2}{l} \Rightarrow U_2 = \frac{F.l}{E.A} = \frac{100.100}{21000.10} = 0.0476\text{ cm}$$

En appliquant la relation d'interpolation linéaire directe (05) de l'élément SEG2, on peut écrire que le déplacement d'un point situé à  $x=50\text{ cm}$ , peut être obtenu comme suit :

$$U(50) = \sum_{i=1}^2 N_i(50).U_i = N_1(50).U_1 + N_2(50).U_2 = \left(1 - \frac{50}{100}\right).0 + \frac{50}{100}.(0.0476) = 0.0238\text{ cm} \approx 0.24\text{ mm}$$

## 4.2 Cas de l'interpolation nodale de degré élevé ou polynômes de Lagrange :

Pour le cas unidimensionnel de fonctions à une seule variable  $x$ , on peut enrichir davantage les fonctions d'interpolations en augmentant le degré des polynômes d'interpolation tels que ceux de Lagrange qui sont sous la forme :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x).U_i \quad \text{avec} \quad N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (11)$$

### Cas d'une interpolation quadratique de degré 2 :

Dans ce cas, et comme déjà vu auparavant, l'élément doit contenir trois nœuds 1, 2 et 3 d'abscisses respectives  $x_1, x_2$  et  $x_3$  et sur lesquels les valeurs  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont connues. Soit un point M d'abscisse  $x$  situé à l'intérieur de cet élément quadratique à trois nœuds qu'on appelle SEG3 telle que représenté sur la figure 05 ci-dessous :

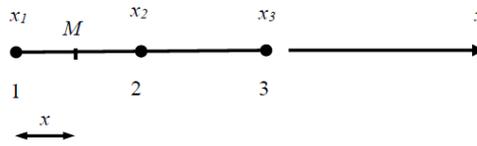


Figure 05 : exemple d'élément quadratique 1D de type SEG3 (à trois nœuds)

La quantité  $U(x)$  peut être obtenue par interpolation directe de degré 2 dans l'élément SEG3 comme suit :

$$U(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(x) \cdot U_i = N_1(x) \cdot U_1 + N_2(x) \cdot U_2 + N_3(x) \cdot U_3 \quad (12)$$

$$N_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)}$$

$$N_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} \quad (13)$$

$$N_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}$$

#### Exemple 04 :

Soit une barre en acier de 1 m de longueur. Trois mesures de températures ont été effectuées aux deux extrémités ainsi qu'au milieu de cette barre telles que les températures des deux extrémités soient respectivement  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 13^\circ\text{C}$  tandis que celle du milieu corresponde à  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ . Trouver l'expression de  $T(x)$  le long de cette barre en utilisant une interpolation directe de degré 2.

#### Solution :

En première étape, nous modélisons notre barre par un maillage constitué d'un seul élément fini à trois nœuds de type SEG3 et sur lequel nous allons effectuer une interpolation directe de degré 2 (ou bien quadratique). Comme illustré sur la figure 06 ci-dessous, nos trois nœuds auront les coordonnées suivantes  $x_1 = 0$  m ;  $x_2 = 0.5$  m et  $x_3 = 1$  m. Sur ces nœuds, la grandeur physique  $T$  qui n'est rien d'autre que la température est une fonction à une seule variable  $x$  car elle ne dépend que de la position le long de la longueur de la barre. Elle sera donc notée  $T(x)$  telle que :

$$T(0) = 10^\circ\text{C}, \quad T(0.5) = 15^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T(1) = 13^\circ\text{C}.$$

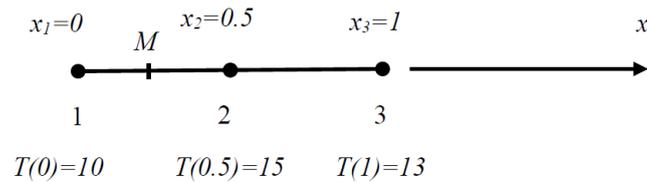


Figure 06 : Modélisation de la barre en acier avec un maillage composé d'un seul élément finis 1D à trois nœuds en utilisant une interpolation directe de degré 2 (quadratique)

Pour appliquer cette interpolation directe en degré 2, appliquons à la grandeur physique  $T$  (la température) les formules précédentes (12) et (13) d'interpolation d'une fonction à une seule variable  $T(x)$  sur un élément à 3 nœuds :

$$T(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(x) \cdot T_i = N_1(x) \cdot T_1 + N_2(x) \cdot T_2 + N_3(x) \cdot T_3$$

Avec :

$$N_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - 0.5)(x - 1)}{(0 - 0.5)(0 - 1)} = \frac{x^2 - x - 0.5x + 0.5}{0.5} = 2x^2 - 3x + 1$$

$$N_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(0.5 - 0)(0.5 - 1)} = \frac{x^2 - x}{-1/4} = -4x^2 + 4x$$

$$N_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{(x - 0)(x - 0.5)}{(1 - 0)(1 - 0.5)} = \frac{x^2 - 0.5x}{1/2} = 2x^2 - x$$

Finalement :

$$\begin{aligned} T(x) &= N_1(x) \cdot T_1 + N_2(x) \cdot T_2 + N_3(x) \cdot T_3 \\ &= (2x^2 - 3x + 1) \cdot T_1 + (-4x^2 + 4x) \cdot T_2 + (2x^2 - x) \cdot T_3 \end{aligned}$$

Après développement, on obtient :

$$T(x) = -14x^2 + 17x + 10$$

Vérification :

$$\text{Pour } x=0, \quad T(0) = -14 \cdot 0^2 + 17 \cdot 0 + 10 = 10^\circ\text{C}$$

$$\text{Pour } x=0.5 \quad T(0.5) = -14 \cdot (0.5)^2 + 17 \cdot (0.5) + 10 = 15^\circ\text{C}$$

$$\text{Pour } x=1 \quad T(1) = -14 \cdot (1)^2 + 17 \cdot (1) + 10 = 13^\circ\text{C}$$

Ainsi, nous remarquons que l'utilisation des polynômes de Lagrange permet facilement d'effectuer des interpolations de degrés plus élevés 3, 4, 5 etc. Toutefois, son extension aux cas 2D et 3D reste relativement difficile.

## 5 Interpolation nodale utilisant les éléments de référence

Cette seconde méthode d'interpolation indirecte utilisant les éléments dits « de référence » (désigné également dans certains ouvrages par *élément parent*), est plus facile à utiliser que la méthode précédente d'interpolation directe. Son principal avantage réside dans le fait qu'elle soit applicable quelle que soit la dimension du problème considéré (1D, 2D ou 3D).

Cela étant dit, avant de traiter en détails les quatre étapes nécessaires (que nous verrons plus loin) pour effectuer cette interpolation, essayons de voir la définition exacte (ou bien le principe) de cet élément

de référence, ses conditions d'utilisation ainsi que les différents types d'éléments de référence qui existent dans la littérature et leurs fonctions de forme associées.

### 5.1 Principe des éléments de référence :

Le principe consiste à associer à chaque élément réel du maillage, un élément unique de forme constante et défini dans un espace de référence basé sur un système de coordonnées dites paramétriques notées  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Il est important de préciser que l'élément de référence associé doit être de même dimension et de même forme que l'élément réel. Il doit également avoir le même nombre de nœuds que celui de l'élément réel du maillage.

Par ailleurs, le passage entre l'élément réel et de référence est défini par la fonction  $x(\xi)$  en 1D, les deux fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  en 2D et les trois fonctions  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  et  $z(\xi, \eta, \zeta)$  en 3D.

A titre d'exemple, soit un élément triangulaire linéaire à trois nœuds TRI3 qui est défini dans l'espace réel à deux dimensions  $(x, y)$ . A cet élément réel du maillage, on associe un élément de référence triangulaire à trois nœuds et défini dans l'espace de référence  $(\xi, \eta)$  tel qu'illustré dans la figure 07 suivante :

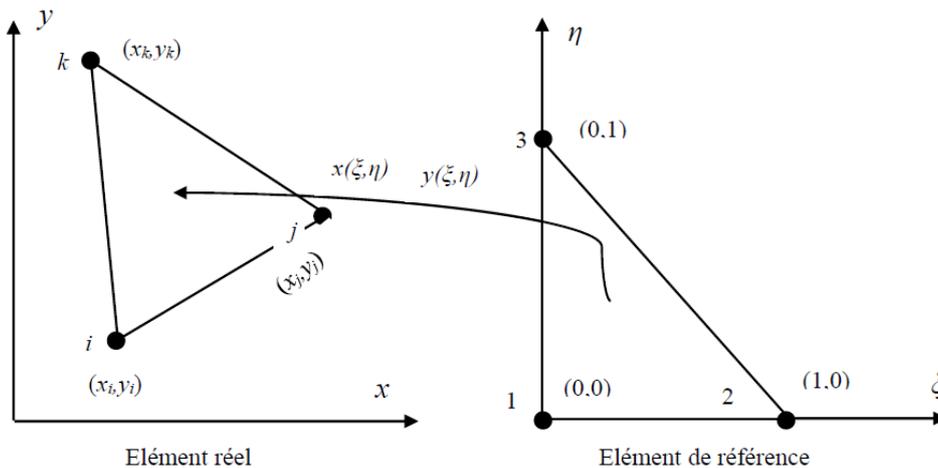


Figure 07 : Relations  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  entre éléments triangulaires l'un réel et l'autre de référence

Il y a lieu de signaler que la forme, la taille et la numérotation des nœuds d'un élément réel du maillage sont variables tandis que la forme, la taille et la numérotation et la position des nœuds d'un élément de référence sont fixes. En effet, les nœuds de l'élément de référence ont des coordonnées fixes dans l'espace paramétrique

### 5.2 Quelques types d'éléments de référence utilisés en EF

#### 5.2.1 Éléments de références à une dimension

Sur la figure 08 ci-dessous, on peut voire trois types d'éléments de référence à une dimension. Sur la figure (08-a) est représenté l'élément de référence linéaire à deux nœuds de type SEG2 (de degré 1). Sur la figure (08-b) on peut voir l'élément quadratique à trois nœuds de type SEG3 (de degré 2). L'élément SEG4 de référence est cubique à quatre nœuds est illustré en figure (08-c)

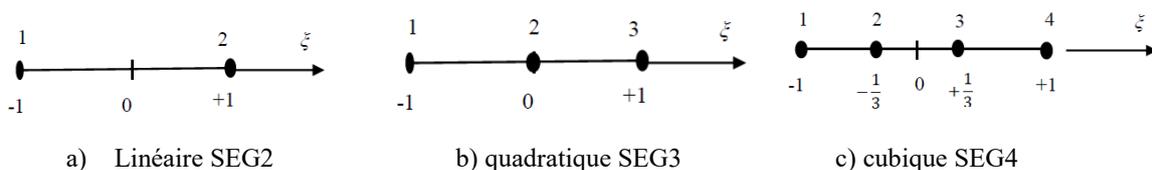


Figure 08 : éléments de référence à une dimension.

### 5.2.2 Eléments de références à deux dimensions

En 2D, les éléments finis que nous pouvons utiliser sont les éléments de forme triangulaire ainsi que les éléments de forme quadrangulaire. Pour les éléments triangulaires, les éléments utilisant les schémas d'interpolations linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à trois, six et neuf nœuds (figure 09).

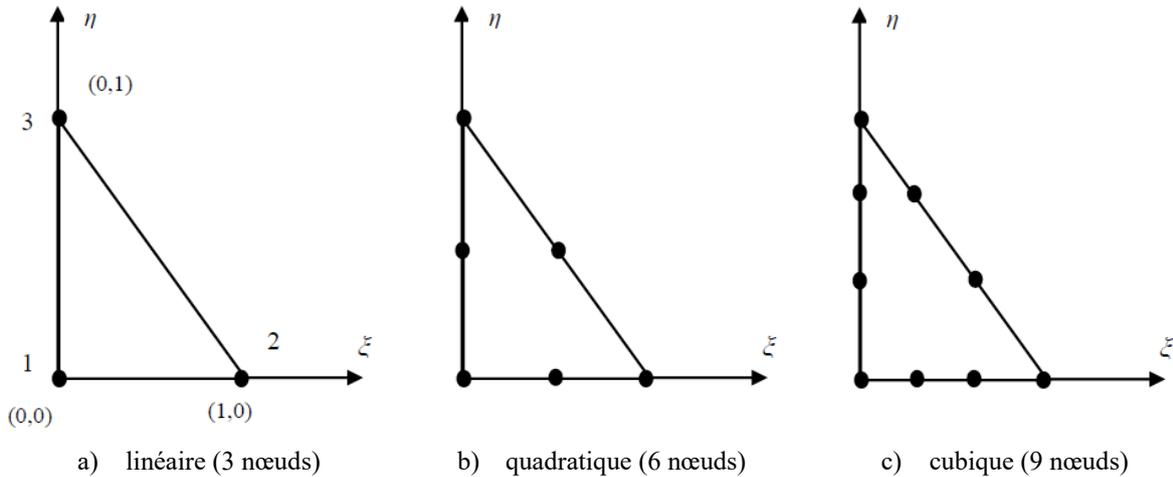


Figure 09 : éléments de référence triangulaires de différents degrés d'interpolation nodale

Quant aux éléments quadrangulaires, les éléments de référence linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à quatre, huit et douze nœuds (figure 10).

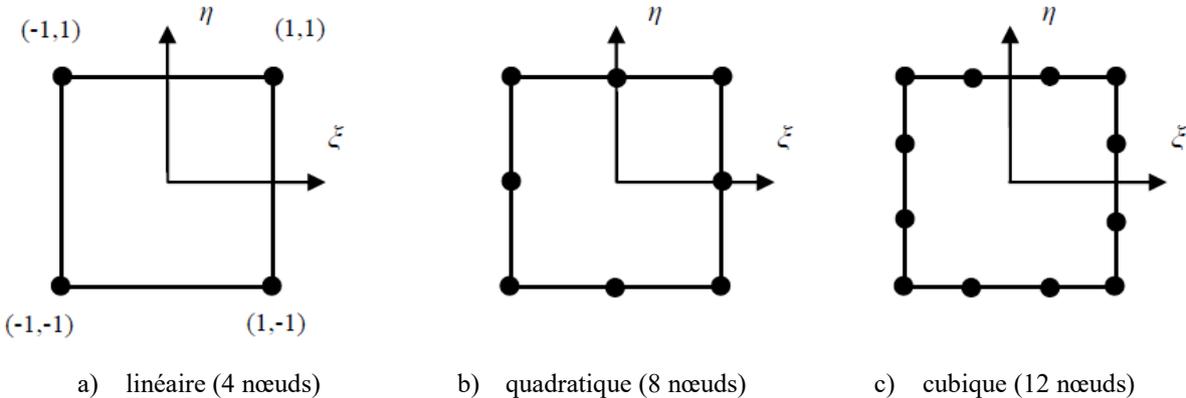


Figure 10 : éléments de référence quadrangulaires à différents degrés d'interpolation nodale

### 5.2.3 Eléments de référence à trois dimensions

En 3D, les éléments de référence que nous pouvons utiliser sont les éléments de forme tétraédrique à quatre nœuds (linéaire), à dix nœuds (quadratique) et à seize nœuds (cubique) (voir figure 11 ci-dessous). Pour les éléments hexaédriques ou cubiques, les éléments de référence linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à huit, vingt et trente-deux nœuds (figure 12). Quant aux éléments pentaédriques (ou prismatiques), les éléments de référence linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à six, quinze et vingt-quatre nœuds (figure 13).

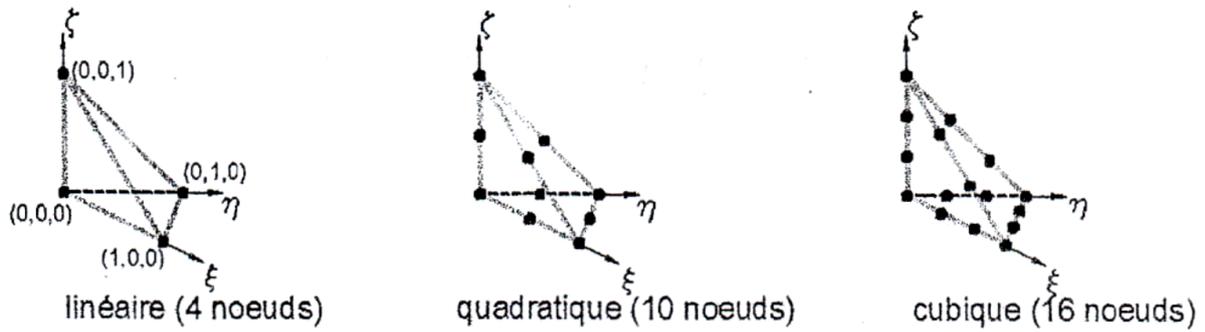


Figure 11 : éléments tétraédriques linéaires (TET4 à 4noeuds), quadratiques (TET10 à 10 noeuds), et cubique (TET16 à 16 noeuds)

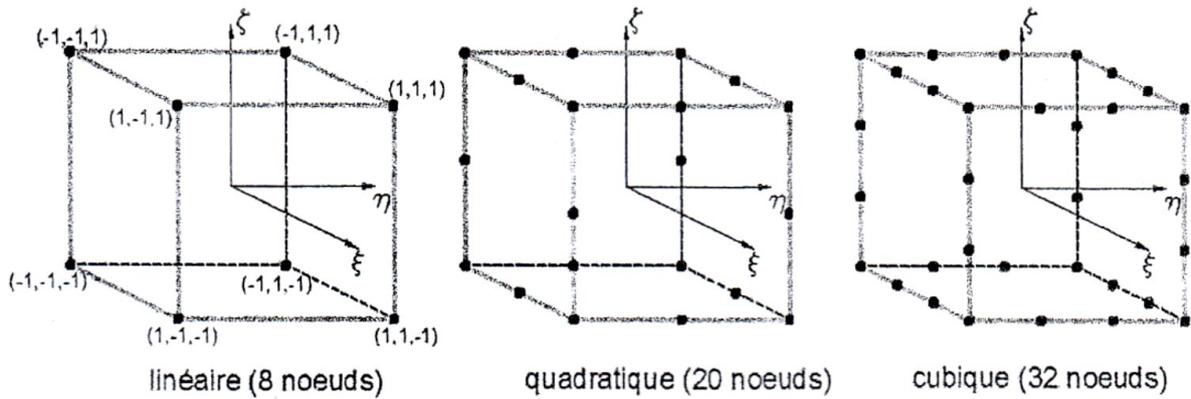


Figure 12 : éléments de référence cubiques ou hexaédriques à différents degrés d'interpolation nodale

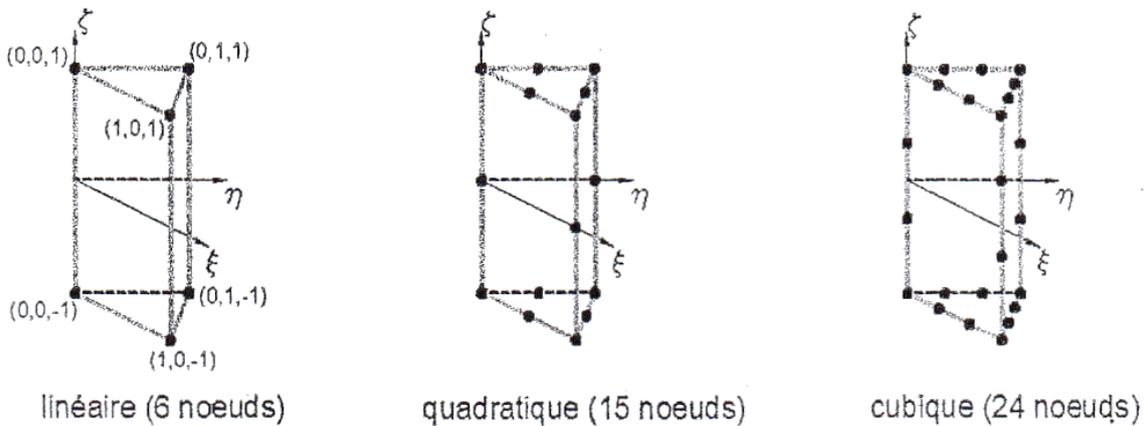


Figure 13 : éléments de référence prismatiques ou pentaédriques à différents degrés d'interpolation nodale

### 5.3 Fonctions de forme et relations entre éléments réels et de référence

Comme précisé précédemment, les relations entre éléments réels et de référence sont définies par la fonction  $x(\xi)$  en 1D, les deux fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  en 2D et les trois fonctions  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  et  $z(\xi, \eta, \zeta)$  en 3D. Les fonctions de forme, notées  $\bar{N}_i(\xi)$  en 1D,  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  en 2D et  $\bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$  en 3D, permettent d'établir facilement cette relation entre les deux espaces de coordonnées comme suit :

Pour le cas 1D :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) \cdot x_i \quad (14)$$

Pour le cas 2D :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases} \quad (15)$$

Pour le cas 3D :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_i \end{cases} \quad (16)$$

Ces fonctions de forme tiennent également compte du degré d'interpolation dans l'élément : linéaire de degré 1, quadratique de degré 2, cubique de degré 3, etc. Elles sont directement données dans des tableaux. Ces tableaux sont associés à chaque type d'élément.

Par ailleurs, les coordonnées introduites dans les relations précédentes  $x_i$  en 1D ,  $x_i$  et  $y_i$  en 2D , ainsi que  $x_i, y_i$  et  $z_i$  en 3D sont les coordonnées de l'élément réel du maillage.

#### Cas de l'élément 1D linéaire SEG2 (figure 14)

Pour l'élément linéaire à deux nœuds de type SEG2, les fonctions  $\bar{N}_i(\xi)$  sont données dans le tableau suivant :

$i$	$\bar{N}_i(\xi)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi)}{\partial \xi}$
1	$\frac{1 - \xi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1 + \xi}{2}$	$+\frac{1}{2}$

Tableau 01 : fonctions de forme et dérivée de l'élément SEG2 à deux nœuds

La lecture du tableau 01 donne :  $\bar{N}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$  ;  $\bar{N}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$  ;  $\frac{\partial \bar{N}_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}$  et  $\frac{\partial \bar{N}_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$ .

Considérons un élément réel de type SEG2 appartenant à un maillage 1D. Les deux nœuds 1 et 2 de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ .

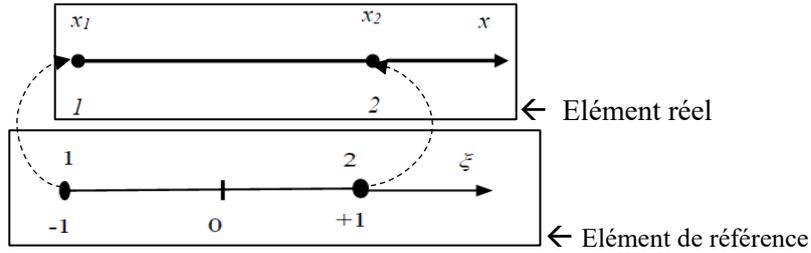


Figure 14 : relation entre élément réel 1D à 2 nœuds (SEG2) et l'élément de référence

La relation entre cet élément et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (14) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi)$  et  $\bar{N}_2(\xi)$  telle que :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi}{2}(x_1 - x_2) \quad (17)$$

L'analyse de l'équation (17) montre que  $x(\xi)$  est linéaire (de degré 1) en  $\xi$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions linéaires en  $\xi$ . D'autre part, la vérification de la relation (17) est comme suit : si on prend  $\xi = -1$ , on doit retrouver  $x(\xi) = x(-1) = x_1$ . Par contre, si on prend  $\xi = +1$ , on retrouve  $x(\xi) = x(+1) = x_2$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1 et 2 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 14).

Cas de l'élément 1D quadratique SEG3 (figure 15)

Pour l'élément quadratique de degré 2 à trois nœuds de type SEG3, les fonctions  $\bar{N}_i(\xi)$  sont données dans le tableau suivant :

$i$	$\bar{N}_i(\xi)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi)}{\partial \xi}$
1	$\frac{-\xi}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2} + \xi$
2	$1 - \xi^2$	$-2\xi$
3	$\frac{\xi}{2}(1 + \xi)$	$\frac{1}{2} + \xi$

Tableau 02 : fonctions de forme et dérivée de l'élément quadratique SEG3 à trois nœuds

La lecture du tableau 02 donne :

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{-\xi}{2}(1 - \xi) ; \quad \bar{N}_2(\xi) = (1 - \xi^2) ; \quad \bar{N}_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1 + \xi)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} + \xi , \quad \frac{\partial \bar{N}_2(\xi)}{\partial \xi} = -2\xi \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{N}_3(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2} + \xi$$

Considérons un élément réel de type SEG3 appartenant à un maillage 1D. Les deux nœuds 1, 2 et 3 de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  (figure 15)

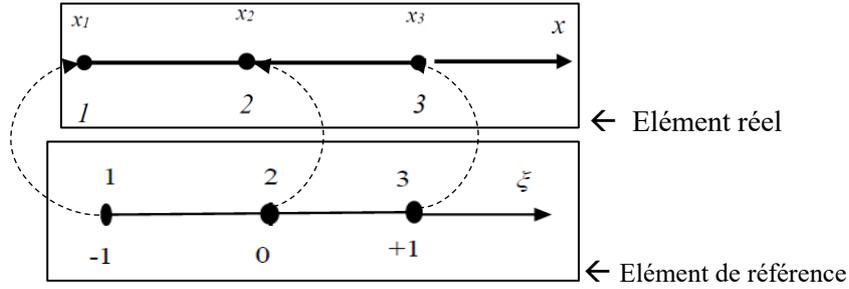


Figure 15 : relation entre élément quadratique réel 1D à 3 nœuds (SEG3) et l'élément de référence

La relation entre cet élément et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (14) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi)$  à  $\bar{N}_3(\xi)$  telle que :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + x_2 \quad (18)$$

L'analyse de l'équation (18) montre que  $x(\xi)$  est quadratique (de degré 2) en  $\xi$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions quadratiques en  $\xi$ . D'autre part, la vérification de la relation (18) est comme suit : si on prend  $\xi = -1$ , on doit retrouver  $x(\xi) = x(-1) = x_1$ . Si on prend  $\xi = 0$ , on doit retrouver  $x(\xi) = x(0) = x_2$ . Enfin, si on prend  $\xi = +1$ , on retrouve  $x(\xi) = x(+1) = x_3$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1, 2 et 3 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 15).

#### Cas de l'élément 2D triangulaire TRI3 de degré 01 (figure 16)

L'élément triangulaire à trois nœuds étant un élément bidimensionnel linéaire, ses fonctions de forme  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  sont données dans le tableau 03 suivant

$i$	$\bar{N}_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	$\xi$	1	0
3	$\eta$	0	1

Tableau 03 : fonctions de forme et dérivée de l'élément TRI3 à trois nœuds

La lecture du tableau 03 donne les expressions des trois fonctions de forme ainsi que de leurs dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, & \bar{N}_2(\xi, \eta) &= \xi & \text{et} & & \bar{N}_3(\xi, \eta) &= \eta \\ \frac{\partial \bar{N}_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial \bar{N}_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1 \\ \frac{\partial \bar{N}_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial \bar{N}_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \bar{N}_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 1 \end{aligned}$$

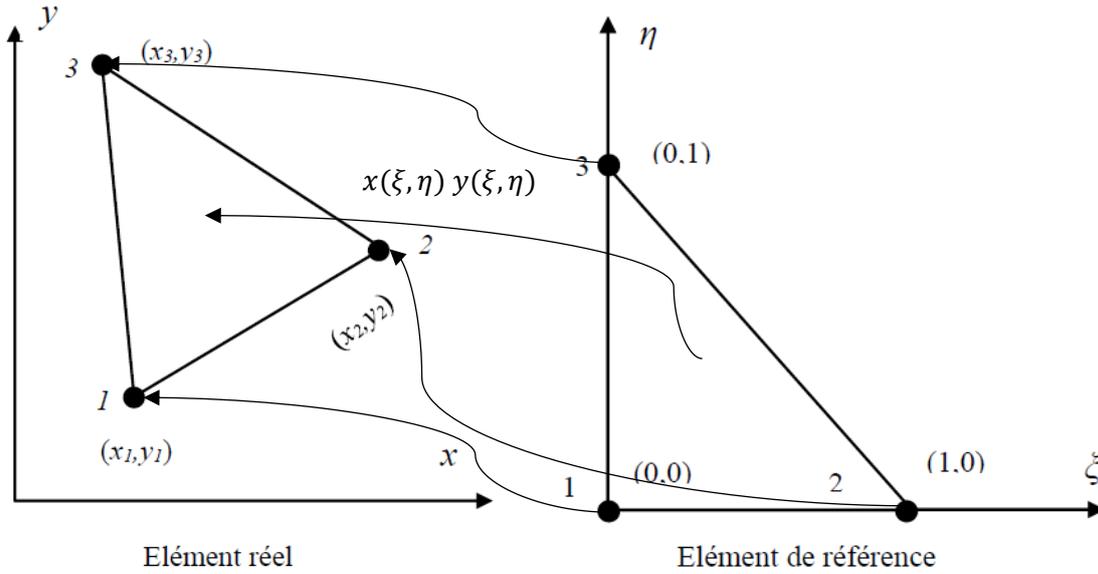


Figure 16 : relation entre élément triangulaire réel 2D à 3 nœuds (TRI3) et son élément de référence

La relation entre cet élément réel et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (15) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi, \eta)$ ,  $\bar{N}_2(\xi, \eta)$  et  $\bar{N}_3(\xi, \eta)$  telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) & \bar{N}_2(\xi, \eta) & \bar{N}_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) & \bar{N}_2(\xi, \eta) & \bar{N}_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (19)$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + x_1 \\ y(\xi, \eta) = (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + y_1 \end{cases} \quad (20)$$

L'analyse des équations (20) montre que les fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont toutes les deux linéaires (de degré 1) en  $\xi$  et en  $\eta$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions linéaires en  $\xi$  et en  $\eta$ . D'autre part, la vérification des relations (20) est comme suit : si on prend

$\xi = \eta = 0$ , on retrouve  $x(0,0) = x_1$  et  $y(0,0) = y_1$ . Si on prend  $\xi = 1$  et  $\eta = 0$ , on retrouve  $x(1,0) = x_2$  et  $y(1,0) = y_2$ . Enfin, si on prend on prend  $\xi = 0$  et  $\eta = 1$ , on retrouve  $x(0,1) = x_3$  et  $y(0,1) = y_3$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1, 2 et 3 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 16).

Cas de l'élément 2D quadrangulaire OUA4 de degré 01 (figure 17)

L'élément quadrangulaire à quatre nœuds étant un élément bidimensionnel linéaire, ses fonctions de forme  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  sont données dans le tableau 04 suivant.

$i$	$\bar{N}_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \xi)$

2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(-1-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(-1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$

Tableau 04 : fonctions de forme et leurs dérivées de l'élément QUA4 à quatre nœuds

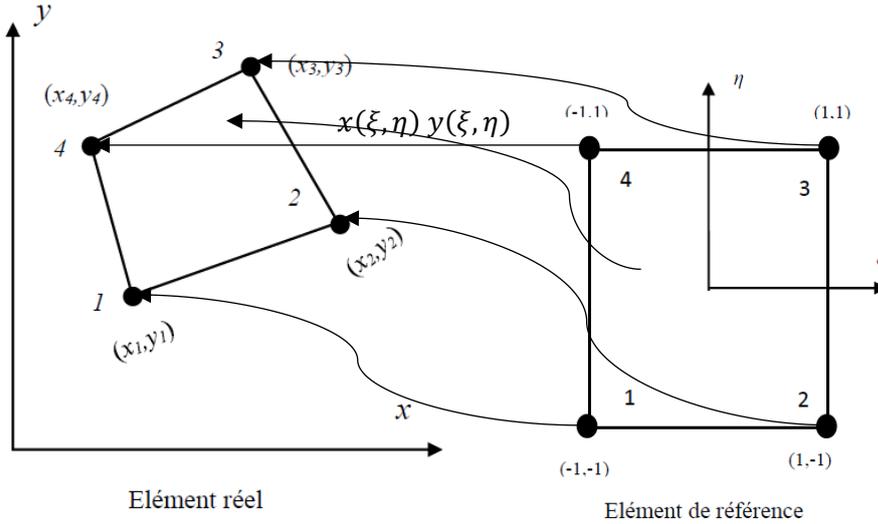


Figure 17 : relation entre élément quadrangulaire réel 2D à 4 nœuds (QUA4) et l'élément de référence

La relation entre cet élément réel et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (15) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi, \eta)$ ,  $\bar{N}_2(\xi, \eta)$ ,  $\bar{N}_3(\xi, \eta)$  et  $\bar{N}_4(\xi, \eta)$  telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) & \bar{N}_2(\xi, \eta) & \bar{N}_3(\xi, \eta) & \bar{N}_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) & \bar{N}_2(\xi, \eta) & \bar{N}_3(\xi, \eta) & \bar{N}_4(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (21)$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)\xi + (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\eta + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\xi\eta] \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)\xi + (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)\eta + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\xi\eta] \end{cases} \quad (22)$$

L'analyse des équations (22) montre que les fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont toutes les deux bilinéaires en  $\xi$  et en  $\eta$  dont le polynôme est de la forme  $(a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_4\xi\eta)$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions bilinéaires en  $\xi$  et en  $\eta$  et dont le polynôme est de la même forme. D'autre part, la vérification des relations (22) est comme suit : si on prend pour le nœud 1 de l'élément de référence  $\xi = \eta = -1$ , on retrouve  $x(-1, -1) = x_1$  et  $y(-1, -1) = y_1$ . Si on prend pour le nœud 2  $\xi = 1$  et  $\eta = -1$ , on retrouve  $x(1, -1) = x_2$  et  $y(1, -1) = y_2$ . Si on prend pour le nœud 3  $\xi = 1$  et  $\eta = 1$ , on retrouve  $x(1, 1) = x_3$  et  $y(1, 1) = y_3$ . Enfin, si on prend pour le nœud 4  $\xi = -1$  et  $\eta = 1$ , on retrouve  $x(-1, 1) = x_4$  et  $y(-1, 1) = y_4$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1, 2, 3 et 4 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 17).

**Nota :**

Pour les cas des éléments bidimensionnels de degrés 2 (TRI6 et QUA8) et des éléments tridimensionnels, des tableaux sont fournis en annexe et sur lesquels les fonctions de forme et d'interpolations ainsi que d'autres détails sont donnés.

#### 5.4 Interpolation nodale dans l'élément de référence

Nous avons vu dans la première méthode d'interpolation directe, que l'interpolation nodale d'une grandeur  $U$  connue aux  $n$  nœuds de l'élément réel considéré se fait selon l'équation (07) que nous rappelons ici :

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i \quad (07)$$

$N_i(x, y, z)$  : sont les  $n$  fonctions d'interpolations écrites dans l'élément considéré

$U_i$  : sont les  $n$  valeurs connues de la grandeur physique  $U$  qui est représentée mathématiquement par la fonction  $U(x, y, z)$

De la même manière, la grandeur physique  $U$  dont les valeurs sont supposées connues aux  $n$  nœuds de l'élément de référence, peut être représentée mathématiquement à l'intérieur de cet élément de référence par la fonction  $U(\xi, \eta, \zeta)$  écrite dans l'espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ . L'expression de cette fonction  $U(\xi, \eta, \zeta)$  peut être obtenue par interpolation nodale directe en utilisant les fonctions d'interpolations  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  de l'élément de référence telle que :

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) \quad N_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot U_i \quad (18)$$

$U_i$  sont les  $n$  valeurs connues de la grandeur physique  $U$  aux  $n$  nœuds de cet élément de référence.

#### 5.5 Éléments isoparamétriques

Pour une très grande quantité d'éléments finis, les fonctions vues précédemment d'interpolation directe dans l'élément de référence  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  sont égales aux fonctions de forme  $\bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$  de cet élément de référence. Ce résultat très important permet de définir une classe importante d'éléments largement utilisés par la MEF. Ces éléments sont dit « **isoparamétriques** » pour lesquels :

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (19)$$

Pour la suite de ce cours, nous nous limiterons uniquement à cette classe d'éléments isoparamétriques pour lesquels les fonctions de forme seront notées désormais de la même façon que les fonctions d'interpolation. Plus précisément, les fonctions de forme seront notées désormais par  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  au lieu de  $\bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$ . Ainsi, puisque les éléments traités précédemment (SEG2, SEG3, TRI3 et QUA4) sont isoparamétriques, cette notation sera également appliquée au niveau des tableaux précédents 01, 02, 03 et 04 ainsi que par les tableaux donnés en annexe.

## 5.6 Démarche à suivre

La démarche à suivre pour effectuer cette interpolation nodale utilisant l'élément de référence est comme suit. En effet, soit un corps solide modélisé par un maillage d'éléments finis. Soit un élément quelconque  $E$  appartenant à ce maillage. Soit  $n$  le nombre total de nœuds que contient cet élément  $E$ . Soit un point  $M$  quelconque situé à l'intérieur de cet élément ou sur sa frontière. Soit une grandeur physique  $U$  dont les valeurs sont connues aux  $n$  nœuds de cet élément. Ces valeurs sont notées :  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ . La valeur approchée de  $U$  au point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  (ou bien l'expression de  $U(x, y)$ ) peut être obtenue cette fois par interpolation indirecte en suivant les quatre étapes suivantes :

**Etape 01 interpolation dans l'élément de référence :** Il s'agit d'interpoler la grandeur considérée  $U$  dans l'élément de référence au lieu d'interpoler directement dans l'élément  $E$  considéré du maillage et que nous appellerons désormais : *élément réel*. Cette étape nous permettra d'obtenir selon le cas (1D, 2D ou 3D) les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi).U_i \text{ en } 1D \\ U(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta).U_i \text{ en } 2D \\ U(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).U_i \text{ en } 3D \end{array} \right. \quad (20)$$

Les fonctions  $N_i(\xi)$ ,  $N_i(\xi, \eta)$  et  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  peuvent être extraites directement à partir des tables des éléments. Les quantités  $U_i$  sont des valeurs connues de la grandeur physique  $U$  au niveau de l'élément de référence.

**Etape 02 Ecriture des relations entre l'élément réel et l'élément de référence :** Il s'agit d'écrire les relations entre l'élément réel  $E$  considéré du maillage et défini dans l'espace réel de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et l'élément de référence défini dans l'espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Selon le cas (1D, 2D ou 3D), on peut écrire ces relations comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi).x_i \text{ en } 1D \\ x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta).x_i \text{ et } y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta).y_i \text{ en } 2D \\ x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).x_i ; y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).y_i \text{ et } z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).z_i \text{ en } 3D \end{array} \right. \quad (21)$$

**Etape 3 Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes.** Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(x) \text{ en } 1D \\ \xi(x, y) \text{ et } \eta(x, y) \text{ en } 2D \\ \xi(x, y, z) ; \eta(x, y, z) \text{ et } \zeta(x, y, z), \text{ en } 3D \end{array} \right. \quad (22)$$

**Etape 4 : Substitution des relations précédentes (22) de l'étape 03 dans les relations (20) de l'étape 01.**

Cette étape consiste à remplacer les relations précédentes (22) obtenues au niveau de l'étape 03 dans les relations (20) obtenues dans l'étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir les relations recherchées :

$$\begin{cases} U(x) = U(\xi(x)) \text{ en } 1D \\ U(x, y) = U(\xi(x, y); \eta(x, y)) \text{ en } 2D \\ U(x, y, z) = U(\xi(x, y, z); \eta(x, y, z); \zeta(x, y, z)) \text{ en } 3D \end{cases} \quad (23)$$

**5.7 Exemples**

**Exemple 05 : interpolation en 1D dans l'élément SEG2 en utilisant l'élément de référence**

Reprendre l'exemple 01 traité dans le paragraphe 3-4-a d'une barre en acier de 1 m de longueur modélisé en EF par un seul élément linéaire unidimensionnel de type SEG2. Le nœud 1 étant fixé donc  $U_1$  est égal à zéro  $U_1=0$ . Par contre, les calculs de la RDM ont donné pour déplacement du nœud 2 la quantité  $U_2=0.0476$  cm. Il est demandé en utilisant l'élément de référence et en suivant les étapes 01 à 04 précédentes de trouver l'expression  $U(x)$  dans cette barre.

**Solution :**

Donc à cet élément réel représenté en figure 18 ci-dessous, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds des éléments de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur du déplacement  $U_1=0$ . De la même façon, le nœud 2 de l'élément de référence étant relié au nœud 2 de l'élément réel et il portera donc la même valeur du déplacement  $U_2=0.048$  cm.

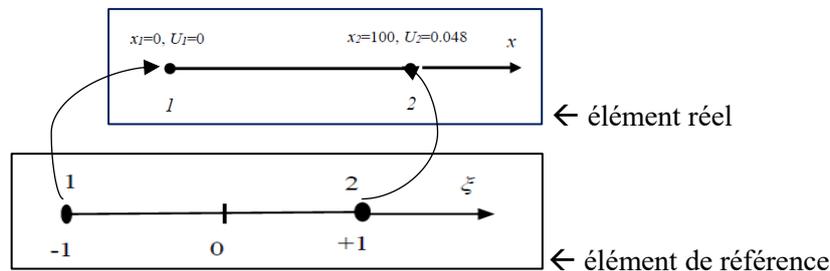


Figure 18 : Représentation de l'élément réel SEG2 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas 1D telle que :

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \cdot U_i = N_1(\xi) \cdot U_1 + N_2(\xi) \cdot U_2 = N_2(\xi) \cdot U_2 = \frac{1 + \xi}{2} \cdot (0.048) = (0.024 + 0.024\xi)$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément réel et l'élément de référence en appliquant (21) pour le cas 1D telle que :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \cdot x_i = N_1(\xi) \cdot x_1 + N_2(\xi) \cdot x_2 = N_2(\xi) \cdot x_2 = \frac{1 + \xi}{2} \cdot (100) = 50 \cdot (1 + \xi)$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) de la relation précédente. Ceci permet d'obtenir la fonction suivante :

$$\xi(x) = \frac{x}{50} - 1$$

Etape 04 : Substitution de la fonction précédente dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$U(x) = U(\xi(x)) = (0.024 + 0.024\xi(x)) = 0.024 + 0.024\left(\frac{x}{50} - 1\right) = 0.024 \cdot \frac{x}{50} = 4.8 \cdot 10^{-4} \cdot x$$

Finalement :

$$U(x) = 4.8 \cdot 10^{-4} \cdot x$$

Vérification :

Pour  $x=x_1=0$  (nœud 1), on a :  $U(0) = U_1 = 0$

Et pour  $x=x_2=100$  (nœud 2), on a :

$$U(100) = U_2 = 4.8 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 4.8 \cdot 10^{-2} = 0.048 \text{ cm}$$

**Exemple 06 : interpolation quadratique de degré 2 en 1D en utilisant l'élément de référence SEG3**

Reprendre l'exemple 04 traité dans le paragraphe 4.2 d'une barre en acier de 1 m de longueur sur laquelle trois mesures de températures ont effectuées (deux aux extrémités ainsi que celle du milieu de cette barre) telle que les températures des deux extrémités soient respectivement  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 13^\circ\text{C}$  tandis que celle du milieu corresponde à  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ . Trouver l'expression de  $T(x)$  le long de cette barre en utilisant une interpolation avec élément de référence SEG3 de degré 2.

**Solution :**

Donc à cet élément réel représenté en figure 19 ci-dessous, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds des éléments de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=10^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2 et 3 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2 et 3 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=15^\circ\text{C}$  et  $T_3=13^\circ\text{C}$ .

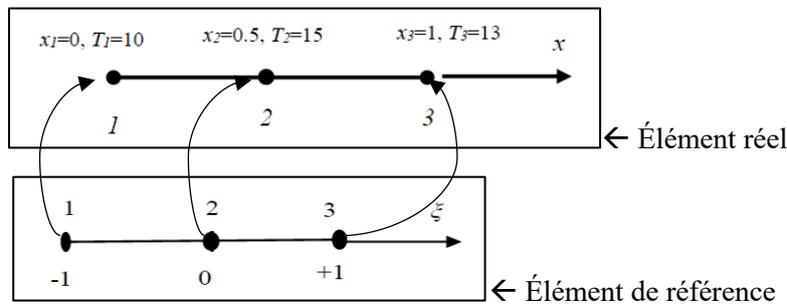


Figure 19 : Représentation de l'élément réel SEG3 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas 1D telle que :

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot T_i = N_1(\xi) \cdot T_1 + N_2(\xi) \cdot T_2 + N_3(\xi) \cdot T_3$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \quad N_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi) = \frac{1}{2}(T_1 - 2T_2 + T_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(T_3 - T_1)\xi + T_2$$

$$T(\xi) = \frac{1}{2}(10 - (2 \times 15) + 13)\xi^2 + \frac{1}{2}(13 - 10)\xi + 15$$

$$T(\xi) = -\frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\xi + 15$$

Verification:

$$T(-1) = -\frac{7}{2}(-1)^2 + \frac{3}{2}(-1) + 15 = -3.5 - 1.5 + 15 = 10 = T_1$$

$$T(0) = -\frac{7}{2}(0)^2 + \frac{3}{2}(0) + 15 = 15 = T_2$$

$$T(1) = -\frac{7}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(1) + 15 = -3.5 + 1.5 + 15 = 13^\circ C = T_3$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément réel et l'élément de référence en appliquant (21) pour le cas 1D telle que :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot x_i = N_1(\xi) \cdot x_1 + N_2(\xi) \cdot x_2 + N_3(\xi) \cdot x_3$$

Sous forme matricielle :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + x_2 = \frac{1}{2}(0 - (2 \times 0.5) + 1)\xi^2 + \frac{1}{2}(1 - 0)\xi + 0.5$$

$$x(\xi) = 0.5\xi + 0.5 = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad \text{donc} \quad x(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1)$$

Vérification

$$x(-1) = 0.5(-1 + 1) = 0 = x_1,$$

$$x(0) = 0.5(0 + 1) = 0.5 = x_2$$

$$\text{et } x(1) = 0.5(1 + 1) = 1 = x_3$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) de la relation précédente. Ceci permet d'obtenir la fonction suivante :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1) \Rightarrow \xi(x) = 2x - 1$$

Etape 04 : Substitution de la fonction précédente  $\xi(x)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$\text{D'après l'étape 01, on a :} \quad T(\xi) = -\frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\xi + 15$$

$$\Rightarrow T(x) = T(\xi(x)) = -\frac{7}{2}\xi(x)^2 + \frac{3}{2}\xi(x) + 15 = -\frac{7}{2}(2x - 1)^2 + \frac{3}{2}(2x - 1) + 15$$

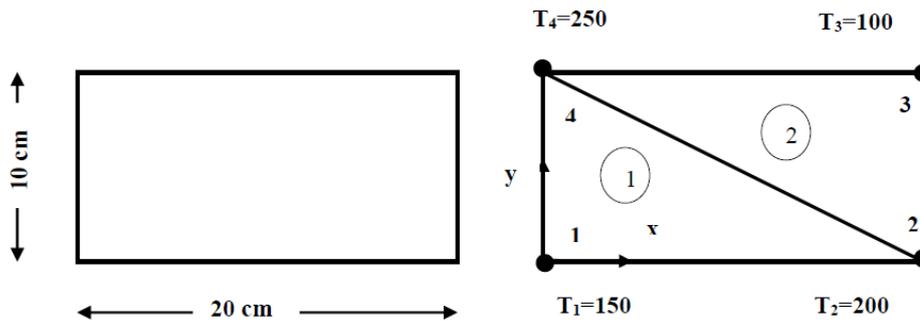
Finalement :

$$T(x) = -14x^2 + 17x + 10$$

Cette expression est identique à l'expression obtenue par interpolation directe en utilisant le polynôme de Lagrange dans l'exemple 04.

**Exemple 07 : interpolation linéaire de degré 1 en 2D en utilisant l'élément triangulaire de référence TRI3**

Soit une plaque supposée parfaitement plane, de forme rectangulaire, en acier, de 20 cm de longueur et de 10 cm de largeur (figure 20). Après avoir été chauffée dans un four, quatre mesures de température ont été effectuées simultanément au niveau des quatre coins de cette plaque. Ces mesures sont comme suit  $T_1=150^\circ\text{C}$ ,  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ . Pour trouver la valeur approchée de la température  $T$  en tout point M de coordonnées  $(x,y)$  par rapport au repère  $(1,x,y)$  (voir figure 20), cette plaque a été modélisée avec un maillage composé de deux éléments finis triangulaires de type TRI3. Il est demandé de trouver l'expression mathématique approchée  $T(x,y)$  du champ de température en tout point de cette



plaque.

Figure 20 : Schéma de la plaque (à gauche) et son maillage EF avec deux éléments de type TRI3 (à droite).

Solution :

Puisque notre plaque a été maillée par deux éléments finis, elle sera donc divisée en deux domaines ou éléments 1 et 2 (voir le maillage ci-dessus de la figure 20) et la fonction  $T(x,y)$  sera définie comme suit :

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & \text{sur l'élément 1} \\ T_2(x,y) & \text{sur l'élément 2} \end{cases}$$

Détermination de l'expression de  $T_1(x,y)$  sur l'élément 1

Soit donc l'élément 1 du maillage et son élément de référence tel que représenté en figure 21 ci-dessous. Cet élément 1 est constitué des nœuds 1, 2 et 4. On associe à l'élément 1 un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds de cet élément de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=150^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2 et 3 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2 et 4 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=200^\circ\text{C}$  et  $T_3=250^\circ\text{C}$ .

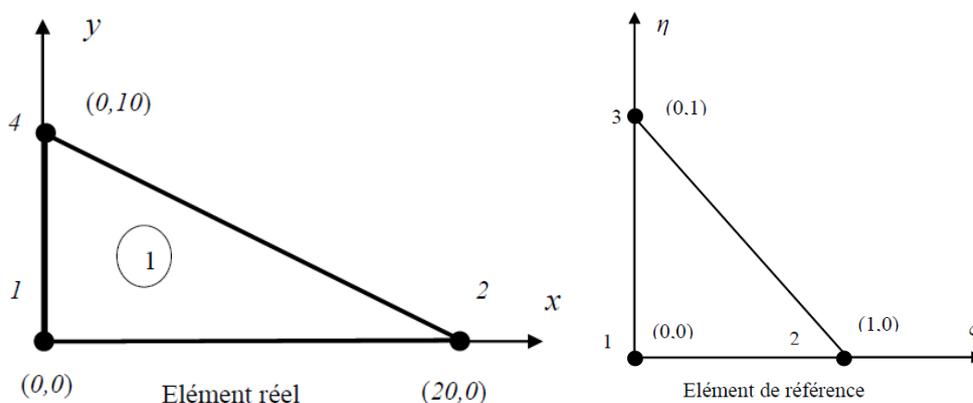


Figure 21 : Représentation de l'élément triangulaire 1 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas du TRI3 telle que :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i = N_1(\xi, \eta) \cdot T_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot T_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot T_3$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)T_1 + \xi T_2 + \eta T_3 = T_1 + (T_2 - T_1)\xi + (T_3 - T_1)\eta$$

$$T(\xi, \eta) = 150 + (200 - 150)\xi + (250 - 150)\eta = 150 + 50\xi + 100\eta$$

$$T(\xi, \eta) = 150 + 50\xi + 100\eta$$

Vérification :

$$T(0,0) = T_1 = 150 + 0 + 0 = 150 = T_1$$

$$T(1,0) = 150 + 50 \times 1 + 100 \times 0 = 150 + 50 = T_2$$

$$T(0,1) = 150 + 50 \times 0 + 100 \times 1 = 150 + 100 = T_3$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément 1 et l'élément de référence en appliquant (19) telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\eta + x_1 \\ y(\xi, \eta) = (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\eta + y_1 \end{cases}$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (20 - 0)\xi + (0 - 0)\eta + 0 = 20\xi \\ y(\xi, \eta) = (0 - 0)\xi + (10 - 0)\eta + 0 = 10\eta \end{cases}$$

Finalement, les relations entre l'élément 1 et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20\xi \\ y(\xi, \eta) = 10\eta \end{cases}$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes. Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20\xi \Rightarrow \xi(x, y) = \frac{x}{20} \\ y(\xi, \eta) = 10\eta \Rightarrow \eta(x, y) = \frac{y}{10} \end{cases}$$

Etape 04 : Substitution des fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$T(\xi(x, y), \eta(x, y)) = T_1(x, y) = 150 + 50\xi + 100\eta = 150 + 50 \frac{x}{20} + 100 \frac{y}{10}$$

$$T_1(x, y) = 150 + 2.5x + 10y$$

Vérification dans l'élément réel 1 :

Pour le nœud 1 :  $T_1(x_1, y_1) = 150 + 2.5 x_1 + 10y_1 = T_1(0,0) = 150 + 0 + 0 = 150 = T_1$

Pour le nœud 2 :  $T_1(x_2, y_2) = 150 + 2.5 x_2 + 10y_2 = T_1(20,0) = 150 + 2.5 \times 20 + 10 \times 0 = 200 = T_2$

Pour le nœud 4 :  $T_1(x_4, y_4) = 150 + 2.5 x_4 + 10y_4 = T_1(0,10) = 150 + 2.5 \times 0 + 10 \times 10 = 250 = T_4$

Donc l'expression  $T_1(x, y) = 150 + 2.5x + 10y$  est bien vérifiée au niveau de l'élément 01.

Détermination de l'expression de  $T_2(x, y)$  sur l'élément 2

L'élément 2 du maillage est associé à son élément de référence tel que représenté en figure 22 ci-dessous. Cet élément 2 est constitué des nœuds 2, 3 et 4. Ces nœuds doivent correspondre aux nœuds 1, 2 et 3 de l'élément de référence de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 2 de cet élément 2 doit être relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier (le nœud 1 de l'élément de référence) portera la même valeur de la température et sera notée  $T_1=200^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2 et 3 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 3 et 4 de l'élément 2 et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=100^\circ\text{C}$  et  $T_3=250^\circ\text{C}$ .

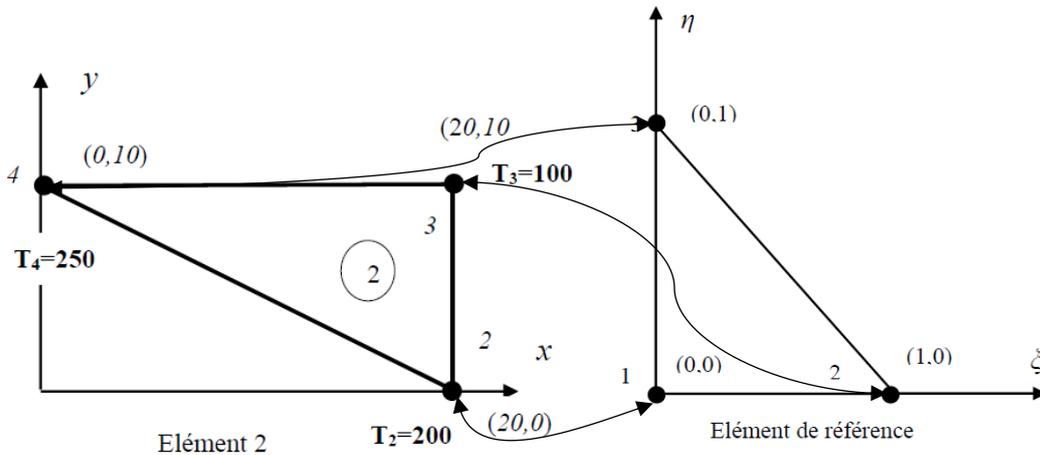


Figure 22 : Représentation de l'élément triangulaire 1 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas du TRI3 telle que :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i = N_1(\xi, \eta) \cdot T_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot T_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot T_3$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)T_1 + \xi T_2 + \eta T_3 = T_1 + (T_2 - T_1)\xi + (T_3 - T_1)\eta$$

Puisque dans l'élément de référence, on a :  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 250^\circ\text{C}$  (voir les correspondances en figure 22), on peut donc écrire :

$$T(\xi, \eta) = 200 + (100 - 200)\xi + (250 - 200)\eta = 200 - 100\xi + 50\eta$$

$$T(\xi, \eta) = 200 - 100\xi + 50\eta$$

Vérification :

$$T(0,0) = T_1 = 200 - 0 + 0 = 200 = T_1$$

$$T(1,0) = 200 - 100 \times 1 + 50 \times 0 = 200 - 100 = 100 = T_2$$

$$T(0,1) = 200 - 100 \times 0 + 50 \times 1 = 200 + 50 = 250 = T_3$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément 2 et l'élément de référence en appliquant (19) telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (x_3 - x_2)\xi + (x_4 - x_2)\eta + x_2 \\ y(\xi, \eta) = (y_3 - y_2)\xi + (y_4 - y_2)\eta + y_2 \end{cases}$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (20 - 20)\xi + (0 - 20)\eta + 20 = 0\xi - 20\eta + 20 = 20(1 - \eta) \\ y(\xi, \eta) = (10 - 0)\xi + (10 - 0)\eta + 0 = 10\xi + 10\eta = 10(\xi + \eta) \end{cases}$$

Finalement, les relations entre l'élément 2 et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20(1 - \eta) \\ y(\xi, \eta) = 10(\xi + \eta) \end{cases}$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes. Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20(1 - \eta) \Rightarrow \eta(x, y) = 1 - \frac{x}{20} \\ y(\xi, \eta) = 10(\xi + \eta) = 10(\xi + \eta) \Rightarrow \xi(x, y) = \frac{y}{10} - \eta = \frac{y}{10} - \left(1 - \frac{x}{20}\right) = \frac{x}{20} + \frac{y}{10} - 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \eta(x, y) = 1 - \frac{x}{20} \\ \xi(x, y) = \frac{x}{20} + \frac{y}{10} - 1 \end{cases}$$

Etape 04 : Substitution des fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$\begin{aligned} T(\xi(x, y), \eta(x, y)) &= T_2(x, y) = T(\xi, \eta) = 200 - 100\xi + 50\eta \\ &= 200 - 100\left(\frac{x}{20} + \frac{y}{10} - 1\right) + 50\left(1 - \frac{x}{20}\right) \end{aligned}$$

$$T_2(x, y) = 200 - 5x - 10y + 100 + 50 - 2.5x = 350 - 7.5x - 10y$$

Donc :  $T_2(x, y) = 350 - 7.5x - 10y$

Vérification dans l'élément réel 2 :

Pour le nœud 2 :  $T_2(x_2, y_2) = 350 - 7.5 \times 20 - 10 \times 0 = T_2(20, 0) = 350 - 150 - 0 = 200 = T_2$

Pour le nœud 3 :  $T_2(x_3, y_3) = 350 - 7.5 \times 20 - 10 \times 10 = T_2(20, 10) = 350 - 150 - 100 = 100 = T_3$

Pour le nœud 4 :  $T_2(x_4, y_4) = 350 - 7.5 \times 0 - 10 \times 10 = T_2(0,10) = 350 - 0 - 100 = 250 = T_4$

Donc l'expression  $T_2(x, y) = 350 - 7.5x - 10y$  est bien vérifiée au niveau de l'élément 02.

Finalement 
$$T(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) = (150 + 2.5x + 10y) & \text{sur l'élément 1} \\ T_2(x, y) = (350 - 7.5x - 10y) & \text{sur l'élément 2} \end{cases}$$

### Exemple 08 : Interpolation linéaire de degré 1 en 2D en utilisant l'élément quadrangulaire QUA4

Reprenre l'exemple précédent de la plaque rectangulaire en acier de 20 cm de longueur et de 10 cm de largeur (figure 23) avec les mêmes valeurs des températures aux nœuds  $T_1=150^\circ\text{C}$ ,  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ . Toutefois, cette plaque a été cette fois modélisée avec un maillage composé d'un seul élément fini quadrangulaires de type QUA4 (figure 23). Il est donc demandé, en utilisant l'élément de type QUA4, de trouver l'expression mathématique approchée  $T(x,y)$  du champ de température en tout point de cette plaque.

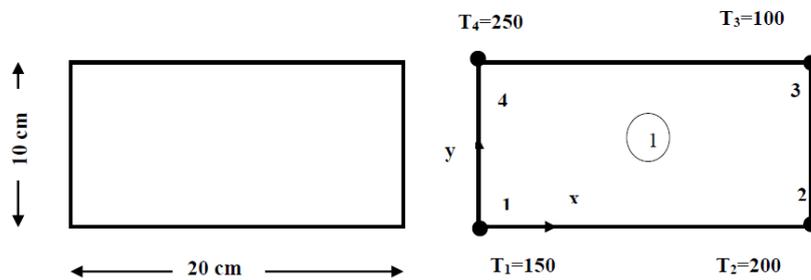


Figure 23 : Schéma de la plaque (à gauche) et son maillage EF avec un seul élément de type QUA4 (à droite).

#### Solution :

Soit donc l'élément 1 du maillage de type QUA4 et son élément de référence tel que représenté en figure 24 ci-dessous. Cet élément 1 est constitué des nœuds 1, 2, 3 et 4. A cet élément, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=150^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2, 3 et 4 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2, 3 et 4 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ .

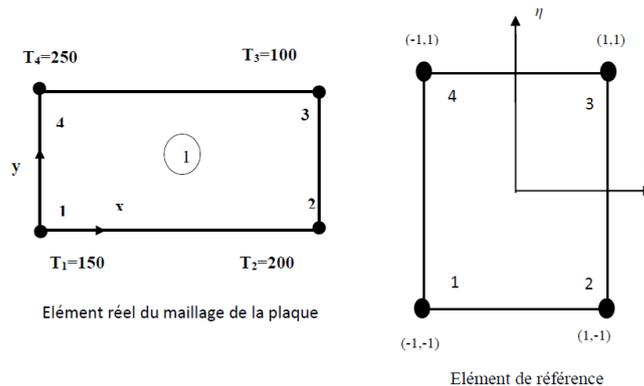


Figure 24 : Représentation de l'élément quadrangulaire 1 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas du QUA4 telle que :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i = N_1(\xi, \eta) \cdot T_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot T_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot T_3 + N_4(\xi, \eta) \cdot T_4$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + (-T_1 + T_2 + T_3 - T_4)\xi + (-T_1 - T_2 + T_3 + T_4)\eta + (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)\xi\eta]$$

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(150 + 200 + 100 + 250) + (-150 + 200 + 100 - 250)\xi + (-150 - 200 + 100 + 250)\eta + (150 - 200 + 100 - 250)\xi\eta]$$

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [700 - 100\xi - 200\xi\eta] = 175 - 25\xi - 50\xi\eta$$

Verification :

Pour le premier nœud  $(\xi, \eta) = (-1, -1)$  :  $T(-1, -1) = 175 - 25(-1) - 50(-1)(-1) = 150 = T_1$

Pour le second nœud  $(\xi, \eta) = (1, -1)$  :  $T(1, -1) = 175 - 25(1) - 50(1)(-1) = 200 = T_2$

Pour le troisième nœud  $(\xi, \eta) = (1, 1)$  :  $T(1, 1) = 175 - 25(1) - 50(1)(1) = 100 = T_3$

Pour le quatrième nœud  $(\xi, \eta) = (-1, 1)$  :  $T(-1, 1) = 175 - 25(-1) - 50(-1)(1) = 250 = T_4$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément 1 et l'élément de référence en appliquant (21) telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)\xi + (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\eta + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\xi\eta] \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)\xi + (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)\eta + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\xi\eta] \end{cases}$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(0 + 20 + 20 + 0) + (-0 + 20 + 20 - 0)\xi + (-0 - 20 + 20 + 0)\eta + (0 - 20 + 20 - 0)\xi\eta] \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(0 + 0 + 10 + 10) + (-0 + 0 + 10 - 10)\xi + (-0 - 0 + 10 + 10)\eta + (0 - 0 + 10 - 10)\xi\eta] \end{cases}$$

Après développement, les relations entre l'élément 1 et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10 + 10\xi = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

Vérification

Pour le Nœud 1  $\begin{cases} x(-1, -1) = 10 + 10(-1) = 0 = x_1 \\ y(-1, -1) = 5 + 5(-1) = 0 = y_1 \end{cases}$

Pour le Nœud 2  $\begin{cases} x(1, -1) = 10 + 10(1) = 20 = x_2 \\ y(1, -1) = 5 + 5(-1) = 0 = y_2 \end{cases}$

Pour le Nœud 3  $\begin{cases} x(1, 1) = 10 + 10(1) = 20 = x_3 \\ y(1, 1) = 5 + 5(1) = 10 = y_3 \end{cases}$

Pour le Nœud 4  $\begin{cases} x(-1,1) = 10 + 10(-1) = 0 = x_4 \\ y(-1,1) = 5 + 5(1) = 10 = y_4 \end{cases}$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes. Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10(1 + \xi) \Rightarrow \xi(x, y) = \frac{x}{10} - 1 \\ y(\xi, \eta) = 5(1 + \eta) \Rightarrow \eta(x, y) = \frac{y}{5} - 1 \end{cases}$$

Etape 04 : Substitution des fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$T(\xi(x, y), \eta(x, y)) = T(x, y) = 175 - 25\xi - 50\xi\eta = 175 - 25\left(\frac{x}{10} - 1\right) - 50\left(\frac{x}{10} - 1\right)\left(\frac{y}{5} - 1\right)$$

Et on obtient finalement

$$T(x, y) = 150 + 2.5x + 10y - xy$$

Vérification dans l'élément réel 1 :

Pour le nœud 1 :  $T(x_1, y_1) = 150 + 2.5 x_1 + 10y_1 - x_1y_1 = T(0,0) = 150 + 0 + 0 - 0 = 150 = T_1$

Pour le nœud 2 :  $T(x_2, y_2) = 150 + 2.5 x_2 + 10y_2 - x_2y_2 = T(20,0) = 150 + 2.5 \times 20 + 10 \times 0 - 0 = 200 = T_2$

Pour le nœud 3 :  $T(x_3, y_3) = 150 + 2.5 x_3 + 10y_3 - x_3y_3 = T(20,10) = 150 + 2.5 \times 20 + 10 \times 10 - 20 \times 10 = 100 = T_3$

Pour le nœud 4 :  $T(x_4, y_4) = 150 + 2.5 x_4 + 10y_4 - x_4y_4 = T(0,10) = 150 + 2.5 \times 0 + 10 \times 10 - 0 \times 10 = 250 = T_4$

Donc l'expression  $T(x, y) = 150 + 2.5x + 10y - xy$  est bien vérifiée pour l'élément 01.

Visualisation et comparaison des champs de température obtenus

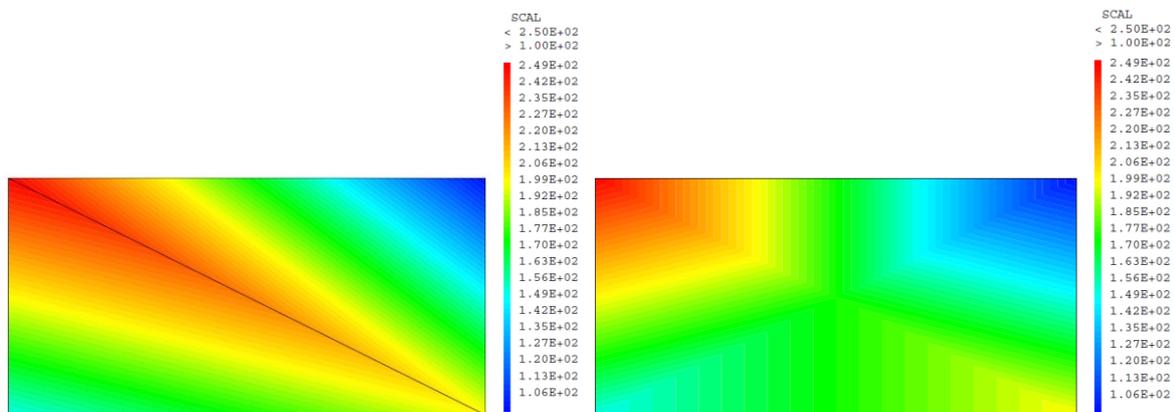


Figure 25 : Distribution des champs de température en utilisant un maillage composé de deux éléments triangulaires TRI3 (à gauche) et d'un élément quadrangulaire QUA4 (à droite)

En observant et en analysant la distribution de la température sur la figure 25 précédente, on constate que le second maillage composé d'un seul élément QUA4 donne une distribution plus proche de la réalité que le maillage à gauche utilisant deux éléments TRI3. L'interprétation de ce résultat sera traitée dans le paragraphe suivant.

## 6 Forme particulière de la matrice Jacobienne en éléments finis

Comme déjà vu au chapitre 03 précédent, la matrice Jacobienne  $[J]$  a été introduite de manière générale dans le cadre d'une transformation entre l'espace de coordonnées réelles  $(x, y, z)$  et paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$  telles pour les relations suivantes :

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\z &= z(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}$$

La matrice Jacobienne  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, nous rappelons également les relations entre l'élément réel et l'élément de référence qui ont été établies dans l'équation (16) telles que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) & \dots & N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) & \dots & N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) & \dots & N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_i \end{cases}$$

Puisque les coordonnées des nœuds des éléments sont constantes, on en déduit que les dérivées partielles des termes de la matrice Jacobienne  $[J]$  n'affectent que les dérivées des fonctions de formes telles que par exemple :

$$\frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \cdot x_i$$

En écrivant tous les termes de la matrice Jacobienne sous la même forme que celle de l'expression précédente et en les remplaçant dans la matrice, on obtient la forme suivante qui est une forme particulière propre à la matrice Jacobienne en éléments finis telle que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

### Exemple 09 : Forme particulière de la matrice Jacobienne $[J]$ de l'élément triangulaire TRI3

Soit un élément triangulaire linéaire défini en 2D dans le plan  $(x, y)$ . Les coordonnées des nœuds de l'élément sont les suivantes : nœud 1  $(x_1, y_1)$ , nœud 2  $(x_2, y_2)$ , nœud 3  $(x_3, y_3)$ . On associe cet élément réel

à son élément de référence. Déterminer la matrice Jacobienne associée à cet élément ainsi que son déterminant et sa matrice inverse.

Solution :

Pour l'élément TRI3 défini en 2D, la matrice Jacobienne est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ avec } x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) y_i$$

En Remplaçant  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  par leurs expressions dans  $[J]$ , on aura :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} [\{x_i\} \{y_i\}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 \right) & \left( \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 \right) \\ \left( \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 \right) & \left( \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 \right) \end{bmatrix}$$

Avec

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta$$

Et

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 1, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -1, \quad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1$$

On obtient finalement, l'expression très connue de la matrice Jacobienne qui ne dépend que des valeurs des coordonnées des nœuds de l'élément réel.

$$[J] = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix}$$

Cette matrice est écrite également sous la forme :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \text{ avec } x_{ij} = x_i - x_j \text{ et } y_{ij} = y_i - y_j$$

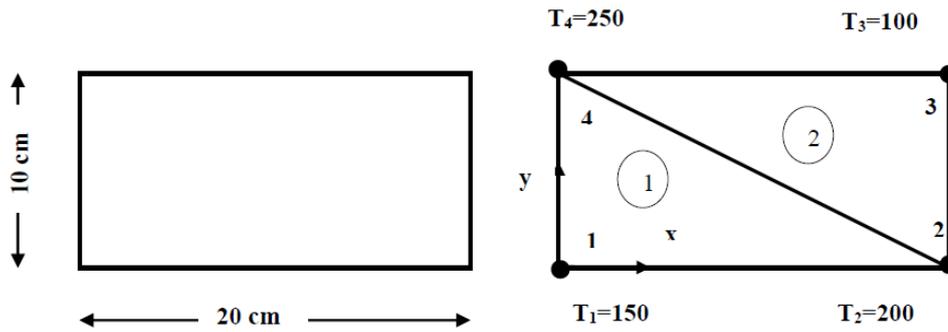
Calculons le déterminant de  $[J]$

$$\det[J] = x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21} = 2A \text{ où } A \text{ est l'aire du triangle}$$

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

**Exemple 10 :**

Reprendre l'exemple du maillage de l'exemple 07 dans lequel le maillage illustré en figure 20 et reproduit une seconde fois ci-dessous, est composé de deux éléments triangulaires pour lesquels il est demandé de calculer la matrice  $[J]$  et son déterminant en utilisant directement le résultat de l'exemple précédent.



**Solution :**

Pour l'élément 02, la matrice  $[J]$  est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{32} & y_{32} \\ x_{42} & y_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) & (y_3 - y_2) \\ (x_4 - x_2) & (y_4 - y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 20) & (10 - 0) \\ (0 - 20) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = -(-20 \times 10) = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 02}$$

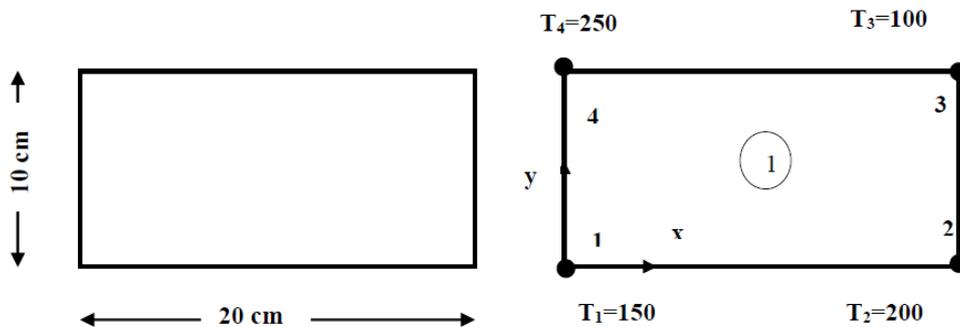
Pour l'élément 01, la matrice  $[J]$  est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{41} & y_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 0) & (0 - 0) \\ (0 - 0) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 01}$$

**Exemple 11 :**

Reprendre l'exemple du maillage de l'exemple 08 dans lequel le maillage illustré en figure 23 et reproduit une seconde fois ci-dessous, est composé d'un élément quadrangulaire et pour lequel il est demandé de calculer la matrice  $[J]$  et son déterminant.



**Solution :**

Pour l'élément Qua4 défini en 2D, la matrice Jacobienne est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Or les relations trouvées dans l'exemple 08, entre cet élément et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10 + 10\xi = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 10 \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 5$$

Ainsi, la matrice  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Et le déterminant  $\det[J] = 50$

On voit bien que pour l'élément quadrangulaire QUA4, le calcul des termes de la matrice  $[J]$  se fait plus facilement si les expressions des relations  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont disponibles (déjà calculées auparavant).

## Chapitre 05

### Techniques d'intégrations numériques en éléments finis

#### 1 Principes utilisés

En éléments finis, nous avons souvent besoin de calculer des intégrales sur des éléments du maillage ou sur leurs frontières. A titre d'exemple, et comme nous le verrons plus loin, pour calculer les matrices de rigidités et les vecteurs forces en élasticité, on doit utiliser une formulation intégrale.

Afin de simplifier leurs calculs, au lieu de les calculer directement sur les éléments réels du maillage, ces intégrales seront calculées sur les éléments de référence en utilisant la matrice Jacobienne dans le calcul intégral. En effet, soit la fonction  $F(x, y, z)$  définie dans l'élément réel  $V$  du maillage appartenant à l'espace basé sur les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . En utilisant l'élément de référence noté  $V_{ref}$  défini dans l'espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ , cette fonction  $F(x, y, z)$  se transforme en une fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  définie dans l'élément de référence  $V_{ref}$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (01)$$

Comme déjà vu dans le paragraphe 03 du chapitre 03, cette transformation du calcul intégral, utilisant le déterminant de la matrice Jacobienne  $det[J]$ , est effectuée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_V F(x, y, z). dx. dy. dz &= \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta, \zeta). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \end{aligned} \quad (02)$$

Il s'agit donc d'intégrer la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence  $V_{ref}$ . On déduit également de l'équation (02), la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx. dy. dz = det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \quad (03)$$

Par ailleurs, la méthode utilisée pour l'intégration de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence est basée sur le principe de quadrature de Gauss-Legendre. Ce principe consiste à calculer les intégrales sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  en certains points de l'élément de référence appelés « points d'intégration » ou points de Gauss.

#### 2 Calcul d'intégrales sur des éléments 1D à une dimension

Soit à calculer l'intégrale  $I_1$  d'une fonction à une seule variable  $F(x)$  dont l'expression est une donnée connue sur un élément fini linéaire à deux nœuds de type SEG2 et appartenant à un maillage unidimensionnel 1D tel que les deux nœuds 1 et 2 de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  (figure 01).

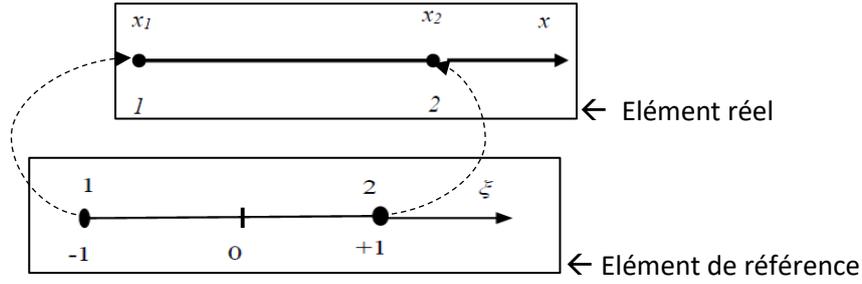


Figure 01 : relation entre élément réel 1D à 2 nœuds (SEG2) et son élément de référence

Comme déjà vu au chapitre 05 précédent, à cet élément réel du maillage, on associe un élément de référence par la relation suivante :

$$x(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (04)$$

Après développement de l'équation (04) précédente, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi}{2}(x_1 - x_2) \quad (05)$$

En remplaçant la fonction  $x(\xi)$  par son expression tirée de l'équation (05) précédente dans l'expression de la fonction  $F(x)$ , on obtient la nouvelle fonction  $\varphi(\xi)$  définie dans l'élément de référence telle que :

$$\varphi(\xi) = F(x(\xi)) \text{ avec } -1 \leq \xi \leq +1 \quad (06)$$

Ainsi, la fonction  $\varphi(\xi)$  étant désormais connue, on peut donc appliquer la relation (02) comme suit :

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} F(x). dx = \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)). \det[J]. d\xi = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). \det[J]. d\xi \quad (07)$$

Dans le cas de cet élément unidimensionnel SEG2, la matrice Jacobienne étant  $[J]$  est égale à son déterminant  $\det[J]$ , telle qu'en dérivant totalement  $x(\xi)$  écrit dans (05) par rapport à  $\xi$ , on obtient :

$$[J] = \det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (08)$$

$L$  étant la longueur de l'élément réel considéré du maillage.

Ainsi, nous allons donc calculer la valeur  $I_1$  de l'intégrale de la manière suivante :

$$I_1 = \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi \quad (09)$$

Par la suite, pour calculer le terme intégral  $\left( \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi \right)$ , on applique le principe de quadrature de Gauss-Legendre. Dans ce cas, l'application de ce principe consiste à calculer l'intégrale sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi)$  en certains points d'abscisses  $\xi_i$ . appelés « points d'intégration » ou points de Gauss d'abscisses  $\xi_i$  tels que :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi = \sum_{i=1}^r w_i. \varphi(\xi_i) \quad (10)$$

$r$  : le nombre de points d'intégration utilisés. Ces points définissent donc « un schéma d'intégration » (figure 02). Nous verrons plus loin (notamment dans l'exemple 01) que plus le nombre  $r$  est élevé, plus la précision des calculs augmente.

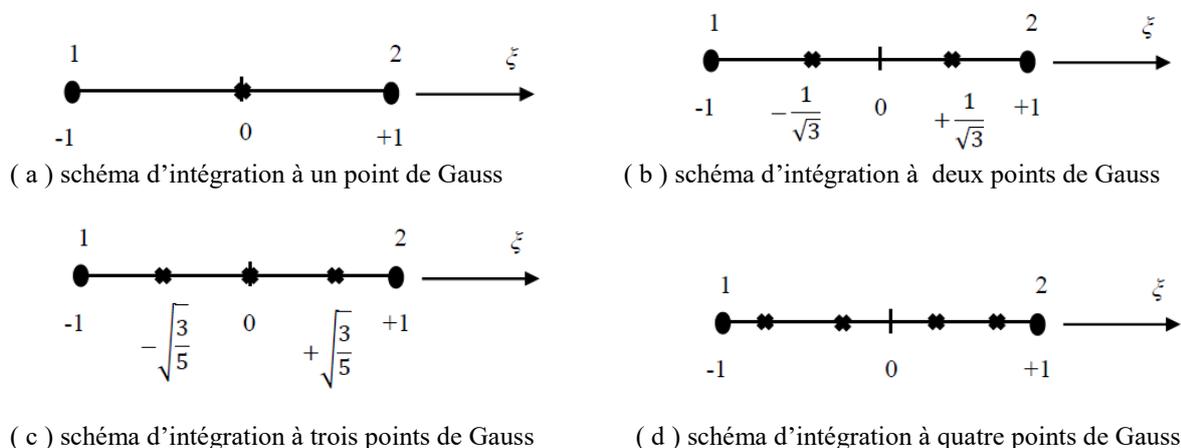
Les valeurs  $\xi_i$   $i = 1, r$  représentent les abscisses de ces points d'intégration.

Les valeurs  $w_i$   $i = 1, r$  représentent les valeurs des coefficients à affecter à chaque point d'intégration. Ils sont également appelés « coefficients poids » en anglais « weight coefficients ».

Les valeurs de  $\xi_i$  et  $w_i$   $i = 1, r$  sont données par le tableau 01 ci-dessous ainsi que par les tables d'intégration données en annexe.

$r$	$\xi_i$	$w_i$	Degré maximum de polynôme à intégrer
$r=1$ (figure 02-a)	0	2	1
$r=2$ (figure 02-b)	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
$r=3$ (figure 02-c)	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$	5
$r=4$ (figure 02-d)	$\pm \sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{6/5}}$	7

Tableau 01 : tables d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour le cas unidimensionnel 1D



Légende : \* points de Gauss    ● nœuds de l'élément de référence  
Figure 02 : Schémas d'intégration correspondants au tableau 01 ci-dessus

**Remarque :**

Il est important de noter que cette méthode de quadrature de Gauss-Legendre intègre exactement les polynômes de degré inférieur ou égal à  $(2r-1)$ . Par ailleurs, l'intégration par cette méthode de polynômes dont le degré est supérieur à  $(2r-1)$  devient un calcul approché. En effet, soit  $d_g$  le degré d'un polynôme quelconque à intégrer. Ainsi, pour avoir une intégration exacte de ce polynôme, il faut que :

$$d_g \leq 2r - 1 \quad (11)$$

Autrement dit :

$$\Rightarrow r \geq \frac{d_g + 1}{2} \quad (12)$$

Ce qui signifie que pour un degré fixé d'un polynôme donné, le nombre de points de Gauss du schéma d'intégration à adopter (ou à choisir) doit avoir pour valeur minimale celle de l'expression (12) ci-dessus. Cela signifie également que plus le degré  $d_g$  du polynôme à intégrer augmente, plus il est nécessaire d'augmenter le nombre  $r$  de points d'intégration. D'autre part, si cette dernière condition (12) n'est pas vérifiée, le calcul devient alors approché et la précision des calculs en sera affectée. Pour éviter ce calcul approché, une autre méthode consiste à utiliser la dernière colonne du tableau 01 précédent. En effet, celle-ci fournit les valeurs maximales des degrés de polynômes à intégrer pour un nombre donné de points de Gauss. A titre d'exemple, si notre polynôme à intégrer est de degré  $d_g=5$  de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 ,$$

Alors, d'après la condition (12), pour avoir une intégration exacte, il faut que :

$$r \geq \frac{d_g+1}{2} \Rightarrow r \geq \frac{5+1}{2} \Rightarrow r \geq 3.$$

Ainsi, pour ce polynôme de degré 5, le nombre minimum de points d'intégration à utiliser est donc  $r=3$ . Le schéma d'intégration à adopter devra contenir au minimum trois points de Gauss. Ce résultat peut également être obtenu en utilisant la dernière colonne du tableau 01

Par ailleurs, l'intégration par cette méthode de fonctions qui ont une forme non polynomiale reste toujours un calcul approché quel que soit le nombre  $r$  choisi de points d'intégration. Toutefois, pour augmenter la précision des calculs, il suffit d'augmenter le nombre de points de Gauss. C'est le cas de l'exemple 01 suivant.

**Exemple 01 : Schémas d'intégration d'une fonction non polynomiale et précision des calculs de la méthode de quadrature**

Soit l'intégrale suivante d'une fonction non polynomiale dont la solution exacte est égale  $(\pi/2)$  telle que :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1 + \xi^2} \right) \cdot d\xi = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant la méthode de quadrature de Gauss-Legendre, calculer directement sur l'élément de référence la valeur approchée de cette intégrale  $I_1$  et ce, en adoptant les trois schémas d'intégrations suivants :

- a) Premier schéma d'intégration : en utilisant un point d'intégration donc  $r=1$
- b) Second schéma d'intégration : en utilisant deux points d'intégration  $r=2$
- c) Troisième schéma d'intégration : en utilisant trois points d'intégration  $r=3$

**Solution :**

Cet exemple traite uniquement la méthode de quadrature de Gauss. Il s'agit d'étudier l'influence du schéma adopté d'intégration sur la précision du résultat obtenu.

Il s'agit donc d'intégrer la fonction  $\varphi(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$  dans l'élément de référence et de comparer la valeur approchée de la solution obtenue avec la solution exacte qui est égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$

- a) Premier schéma d'intégration : en utilisant un point d'intégration donc  $r=1$  on aura :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1+\xi^2} \right) \cdot d\xi = w_1 \cdot \varphi(\xi_1)$$

D'après le tableau 01 précédent, pour  $r = 1$  on a:

$\xi_1 = 0$  (c'est à dire que le point de Gauss se trouve au milieu de l'élément de référence)  
 et  $w_1 = 2$ . Donc  $I_1 = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) = w_1 \cdot \left( \frac{1}{1+\xi_1^2} \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{1+0^2} \right) = 2$

Ainsi, pour ce schéma d'intégration à un point, on voit bien un écart important entre la solution obtenue égale à 2 et la solution exacte égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$ .

- b) Second schéma d'intégration : en utilisant deux points d'intégration donc  $r=2$  on aura :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1+\xi^2} \right) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \varphi(\xi_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2)$$

D'après le tableau 01, pour  $r = 2$  on a:

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2) = w_1 \cdot \left( \frac{1}{1+\xi_1^2} \right) + w_2 \cdot \left( \frac{1}{1+\xi_2^2} \right) \\ &= 1 \cdot \left( \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) + 1 \cdot \left( \frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \right) = \frac{3}{2} = 1.5 \end{aligned}$$

Ainsi, pour ce schéma d'intégration à deux points, on voit bien une réduction de l'écart entre la solution obtenue égale cette fois à 1.50 et la solution exacte égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$ .

- c) Troisième schéma d'intégration : en utilisant trois points d'intégration donc  $r=3$  on aura :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1+\xi^2} \right) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3)$$

La lecture du tableau 01 pour  $r = 3$  donne :

le premier point de Gauss d'abscisse  $\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$  est affecté d'un coefficient poids  $w_1 = \frac{5}{9}$

le second point de Gauss d'abscisse  $\xi_2 = 0$  est affecté d'un coefficient poids  $w_2 = \frac{8}{9}$

le troisième point de Gauss d'abscisse  $\xi_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$  est affecté d'un coefficient poids  $w_3 = \frac{5}{9}$

Ainsi :

$$I_1 = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3) = w_1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_1^2} \right) + w_2 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_2^2} \right) + w_3 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_3^2} \right)$$

$$= \frac{5}{9} \cdot \left( \frac{1}{1 + \left( -\sqrt{\frac{3}{5}} \right)^2} \right) + \frac{8}{9} \cdot \left( \frac{1}{1 + (0)^2} \right) + \frac{5}{9} \cdot \left( \frac{1}{1 + \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \right)^2} \right) = 1.583$$

$$I_1 = 1.583$$

Ainsi, pour ce schéma d'intégration à trois points, on voit bien une meilleure précision des calculs par rapport aux cas précédents (on rappelle que la solution exacte est égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$ ).

### Exemple 02 Intégration numérique sur un élément fini 1D réel

Calculer numériquement l'intégrale suivante de la fonction  $F(x) = x^3 + 2x^2$  en adoptant un schéma d'intégration qui puisse satisfaire la condition de précision minimale requise par la dernière colonne du tableau 01 précédent. Comparer ensuite le résultat obtenu avec celui la solution exacte obtenue en utilisant la méthode analytique qui consiste à calculer la primitive de la fonction  $F(x)$ .

$$I_2 = \int_0^3 (x^3 + 2x^2) dx$$

#### Solution :

On utilise un maillage composé d'un seul élément fini de type SEG2 à deux nœuds dont le nœud 1 a pour abscisse  $x_1 = 0$  et le nœud 2 a pour abscisse  $x_2 = 3$ . Ensuite, on associe à cet élément réel un élément de référence telle que leur relation puisse être écrite :

$$x(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Après développement de l'équation précédente, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{0 + 3}{2} - \frac{\xi}{2}(0 - 3) = 1.5 + 1.5\xi = 1.5(1 + \xi)$$

Ainsi, en remplaçant  $x(\xi)$  par son expression dans celle de l'expression

$$F(x) = x^3 + 2x^2 = x^2 \cdot (x + 2)$$

on aura :

$$\varphi(\xi) = F(x(\xi)) = x(\xi)^2(x(\xi) + 2) = 2.25(1 + 2\xi + \xi^2)(3.5 + 1.5\xi) \text{ avec } -1 \leq \xi \leq +1$$

$$\text{Après développement : } \varphi(\xi) = 7.875 + 19.125\xi + 14.625\xi^2 + 3.375\xi^3$$

Ainsi, au lieu donc d'intégrer  $F(x)$  dans l'élément réel du maillage, on intègre  $\varphi(\xi)$  dans l'élément de référence défini par  $-1 \leq \xi \leq +1$  telle que :

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x).dx = \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)). \det[J]. d\xi = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). \det[J]. d\xi$$

Comme déjà démontré auparavant  $\det[J] = \frac{L}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ .

Ainsi

$$I_2 = 1.5 \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi = 1.5. \int_{-1}^{+1} (7.875 + 19.125\xi + 14.625\xi^2 + 3.375\xi^3). d\xi$$

Par ailleurs, le polynôme à intégrer étant de degré  $d_g = 3$  en  $\xi$ . En appliquant la condition (11) ainsi que la relation (12) telle que le nombre minimal de points d'intégration soit :

$$\Rightarrow r \geq \frac{d_g + 1}{2} \Rightarrow r \geq \frac{3 + 1}{2} \Rightarrow r \geq 2$$

Ceci est également confirmé par le tableau 01. Ainsi, le nombre minimal de points d'intégration à utiliser est donc  $r=2$ . On adopte donc un schéma d'intégration à deux points de Gauss.

$$\begin{aligned} I_2 &= 1.5 \int_{-1}^{+1} (7.875 + 19.125\xi + 14.625\xi^2 + 3.375\xi^3). d\xi \\ &= 1.5 \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \varphi(\xi_i) = 1.5 (w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2)) = \end{aligned}$$

D'après le tableau 01, pour  $r = 2$ , on a:

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 = 1.$$

$$I_2 = 1.5 \left( \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = 38,25$$

Par ailleurs, le résultat analytique exact obtenu par le calcul des primitives est égal à 38.25. Il est donc égal à notre résultat obtenu numériquement  $I_2 = 38.25$ . Ceci montre l'exactitude des calculs par cette méthode de quadrature lorsque les fonctions à intégrer ont une forme polynomiale et que dans le schéma d'intégration adopté, on a utilisé un nombre suffisant de points de Gauss ( $r=2$  dans notre cas).

### 3 Calcul d'intégrales sur des éléments 2D à deux dimensions

Soit à calculer l'intégrale  $I_1$  d'une fonction à deux variables  $F(x, y)$  dont l'expression est une donnée connue sur un élément fini  $V$  appartenant à un maillage bidimensionnel 2D tels que les  $n$  nœuds de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$ ; ... ..  $(x_n, y_n)$ .

$$I_1 = \int_V F(x, y) dx dy \quad (13)$$

Comme déjà vu au chapitre 05 précédent, à cet élément réel du maillage, on associe un élément de référence par les relations suivantes :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad \text{et} \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (14)$$

En remplaçant les fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  par leurs expressions tirée de (14) dans l'expression de la fonction  $F(x, y)$ , on obtient la nouvelle fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  définie dans l'élément de référence  $V_{ref}$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta) = F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (15)$$

Ainsi, la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  étant désormais connue, on peut donc appliquer la relation (02) comme suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V F(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

Après avoir calculé la matrice Jacobienne  $[J]$  et son déterminant  $\det[J]$  qui est une constante, on aura :

$$I_1 = \det[J] \cdot \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (17)$$

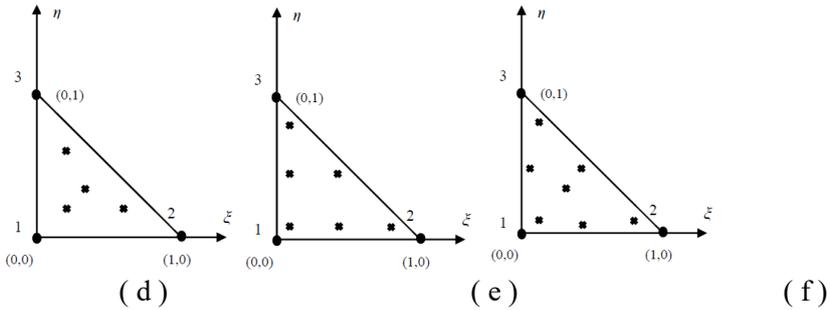
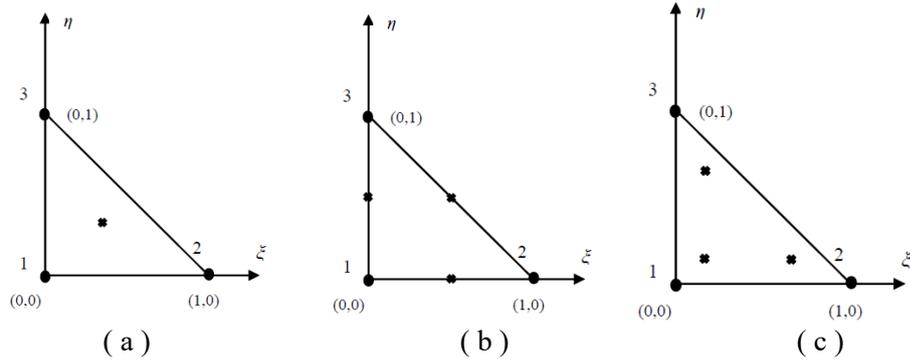
Par la suite, pour calculer le terme intégral dans l'élément de référence  $(\int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta)$ , on applique le principe de quadrature pour lequel il existe essentiellement deux méthodes dans la littérature : la méthode produit et la méthode directe. La méthode produit possède l'avantage d'utiliser moins de points d'intégration par rapport à la méthode directe. Toutefois, elle possède l'inconvénient d'être difficile à utiliser. Par contre, la méthode directe utilise un nombre plus élevé de points de Gauss mais possède l'avantage d'être plus facile à utiliser que la méthode produit. Cela étant dit, nous nous limiterons, pour le présent cours, uniquement à la présentation et à l'utilisation de la méthode directe.

En effet, cette méthode directe consiste à calculer l'intégrale sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  en  $r$  points d'intégration de coordonnées  $(\xi_i, \eta_i)$ . tels que :

$$\int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^r w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \quad (18)$$

$r$  : étant le nombre de points d'intégration utilisés dans le schéma d'intégration adopté.

Les valeurs  $(\xi_i, \eta_i)$   $i = 1, r$  représentant les coordonnées de ces  $r$  points d'intégration dans l'élément de référence ainsi que les valeurs des coefficients poids  $w_i$  à affecter à chaque point d'intégration sont données par les tableaux 02 et 03 respectivement pour les éléments triangulaires et quadrangulaires ainsi que sur les tables d'intégration données en annexe. Quant aux schémas d'intégration, ils sont donnés en figures 03 et 04.

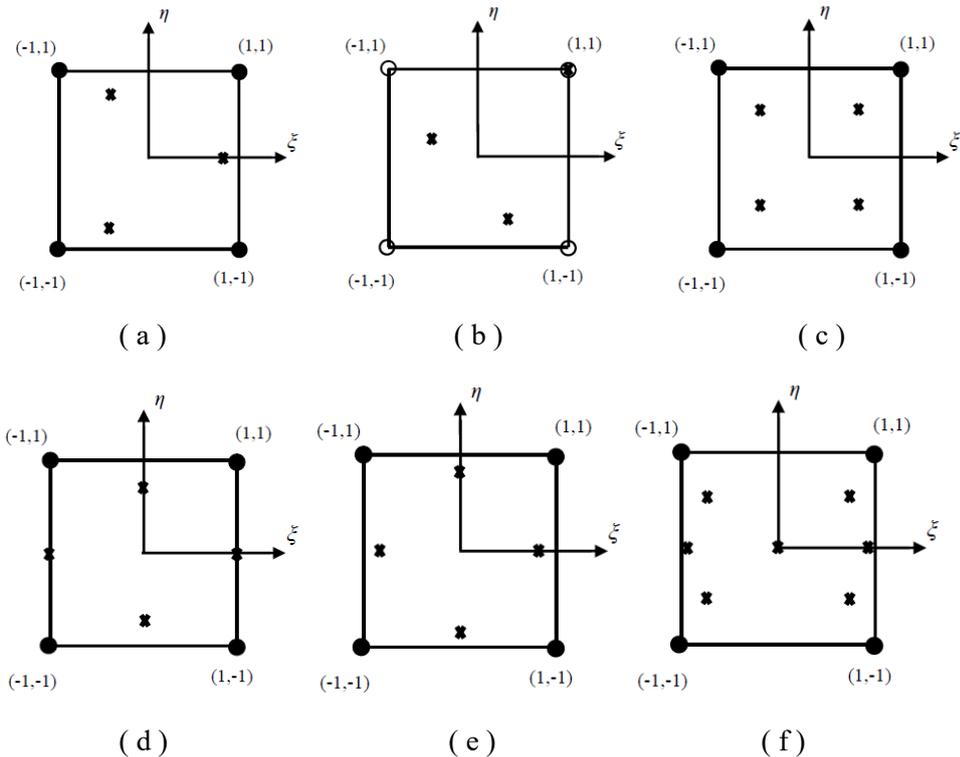


Légende : \* points de Gauss    • nœuds de l'élément de référence  
 Figure 03 : Schémas d'intégration correspondants au tableau 02 ci-dessous

$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	$m$
$r=1$ (figure 3-a)	1 / 3	1 / 3	1/2	1
$r=3$ (figure 3-b)	1/2	1/2	1/6	2
	1/2	0	1/6	
$r=3$ (figure 3-c)	1/6	1/6	1/6	2
	2/3	1/6	1/6	
$r=4$ (figure 3-d)	1/3	1/3	-27/96	3
	1/5	1/5	25/96	
	3/5	1/5	25/96	
	1/5	3/5	25/96	
$r=6$ (figure 3-e)	0,44594 84909 15965	0,44594 84909 15965	0,11169 07948 39005	4
	0,10810 30181 68070	0,44594 84909 15965	0,11169 07948 39005	
	0,44594 84909 15965	0,10810 30181 68070	0,11169 07948 39005	
	0,09157 62135 09771	0,09157 62135 09771	0,05497 58718 27661	
	0,81684 75729 80458	0,09157 62135 09771	0,05497 58718 27661	
	0,09157 62135 09771	0,81684 75729 80458	0,05497 58718 27661	
$r=7$ (figure 3-f)	1/3	1/3	9/80	5

	0,47014 20641 05115	0,47014 20641 05115	0,06619 70763 94253
	0,05971 58717 89770	0,47014 20641 05115	0,06619 70763 94253
	0,47014 20641 05115	0,05971 58717 89774	0,06619 70763 94253
	0,10128 65073 23456	0,10128 65073 23456	0,06296 95902 72413
	0,79742 69853 53088	0,10128 65073 23456	0,06296 95902 72413
	0,10128 65073 23456	0,79742 69853 53088	0,06296 95902 72.413

Tableau 02 : tables d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour l'élément TRI3



Légende : \* points de Gauss    ● nœuds de l'élément de référence

Figure 04 : Schémas d'intégration correspondants au tableau 03 ci-dessus

Par ailleurs, soit  $m$  l'ordre du schéma d'intégration adopté dont la valeur est affichée dans les dernières colonnes des tableaux 02 et 03 ci-dessus. Soit  $(\xi^i \cdot \eta^j)$  le monôme le plus élevé du polynôme à intégrer. Ce schéma d'intégration adopté d'ordre  $m$  est exact, si  $m$  est supérieur ou égal au degré de  $(\xi^i \cdot \eta^j)$ . Autrement dit, pour que les calculs utilisant la méthode de quadrature soient exacts il faut que :

$$m \geq i + j \quad (19)$$

A titre d'exemple, soit un polynôme à intégrer de degré 3 tel que le monôme de degré le plus élevé soit égal à  $(\xi^2 \cdot \eta^1)$ . En appliquant la condition précédente (19), l'ordre du schéma d'intégration aura la valeur minimale suivante :

$$m \geq i + j \Rightarrow m \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow m \geq 3$$

Par la suite, si nous intégrons sur un élément de forme triangulaire, l'utilisation du tableau 02 ci-dessus donnera, pour un schéma d'intégration d'ordre  $m = 3$ , un nombre minimal de points de Gauss égal à quatre donc  $r \geq 4$  dont les schémas d'intégrations correspondants sont en figures 3-d, 3-e et 3-f. De la

même manière, si nous intégrons sur un élément de forme quadrangulaire (dont l'élément de référence est de forme carrée), l'utilisation du tableau 03 ci-dessus, donnera, pour un schéma d'intégration d'ordre  $m = 3$ , un nombre minimal de points de Gauss égal à quatre donc  $r \geq 4$  dont les schémas d'intégrations correspondants sont en figures 4-c, 4-d, 4-e et 4-f.

$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	$m$
$r=3$ (figure 04-a)	$\sqrt{2/3}$	0	4/3	2
	$-1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{2}$	4/3	
	$-1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	4/3	
$r=3$ (figure 04-b)	1	1	4/7	2
	-5/9	2/9	27/14	
	1/3	-2/3	3/2	
$r=4$ (figure 04-c)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	3
	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	
	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	
	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	
$r=4$ (figure 04-d)	-1	0	2/3	3
	1	0	2/3	
	0	$-1/\sqrt{2}$	4/3	
	0	$1/\sqrt{2}$	4/3	
$r=4$ (figure 04-e)	$\sqrt{2/3}$	0	1	3
	$-\sqrt{2/3}$	0	1	
	0	$\sqrt{2/3}$	1	
	0	$-\sqrt{2/3}$	1	
$r=7$ (figure 04-f)	0	0	8/7	5
	0	$\sqrt{14/15}$	20/63	
	0	$-\sqrt{14/15}$	20/63	
	$\sqrt{3/5}$	$-1/\sqrt{3}$	20/36	
	$-\sqrt{3/5}$	$-1/\sqrt{3}$	20/36	
	$-\sqrt{3/5}$	$1/\sqrt{3}$	20/36	
	$\sqrt{3/5}$	$1/\sqrt{3}$	20/36	

Tableau 03 : tables d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour l'élément QUA4

### Exemple 03 : Schémas d'intégration et précision des calculs de la méthode de quadrature

Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes  $I_1$  et  $I_2$  respectivement sur un triangle de référence et un carré de référence.

$$I_1 = \iint_{\text{triangle}_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \text{et} \quad I_2 = \iint_{\text{carré}_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

#### Solution :

Le degré du polynôme à intégrer étant égal à  $i + j = 1 + 1 = 2$ . Par conséquent, pour avoir une intégration exacte, l'ordre du schéma d'intégration doit avoir pour valeur minimale  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ .

a-) Pour le calcul de  $I_1$  sur le triangle de référence, on adopte la valeur minimale de  $m$  comme ordre du schéma d'intégration donc on prend  $m = 2$ .

$$I_1 = \iint_{\text{triangle}_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

D'après le tableau 02 précédent, pour  $m = 2$  on a la possibilité de choisir entre deux schémas d'intégration différents mais utilisant trois ( $r=3$ ) points de Gauss chacun. Ces schémas sont illustrés dans les figures 03-b et 03-c. Nous choisissons le schéma de la figure 03-c qui est très utilisé par les logiciels de calcul EF.

Ainsi en adoptant ce schéma d'intégration à trois points de Gauss ( $r=3$ ), il s'agit de calculer l'intégrale de la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  définie sur le triangle de référence telle que  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ :

$$I_1 = \iint_{\text{triangle}_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3)$$

La lecture du tableau 02 pour ce schéma d'intégration donne pour :

le premier point de Gauss les coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{6}$  et un coefficient poids  $w_1 = \frac{1}{6}$

le second point de Gauss les coordonnées  $\xi_2 = \frac{2}{3}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{6}$  et un coefficient poids  $w_2 = \frac{1}{6}$

le troisième point de Gauss les coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{6}$  et  $\eta_3 = \frac{2}{3}$  et un coefficient poids  $w_3 = \frac{1}{6}$

Ainsi :

$$I_1 = w_1 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \xi_3 \cdot \eta_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$$

$$I_1 = \frac{1}{24}$$

b-) Calcul de sur le carré de référence : Pour le calcul de  $I_2$  sur le carré de référence, on adopte une valeur de  $m = 3$  comme ordre du schéma d'intégration.

$$I_2 = \iint_{\text{carré}_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

D'après le tableau 03 précédent, pour  $m = 3$  on a la possibilité de choisir entre trois schémas d'intégration différents mais utilisant quatre ( $r=4$ ) points de Gauss chacun. Ces schémas sont illustrés dans les figures 04-c, 04-d et 04-e. Nous choisissons le schéma de la figure 04-c qui est également très utilisé par les logiciels de calcul EF.

Ainsi en adoptant ce schéma d'intégration à quatre points de Gauss ( $r=4$ ), il s'agit de calculer l'intégrale de la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  définie sur le carré de référence telle que  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ :

$$I_2 = \iint_{\text{carré}_{\text{réf}}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$= \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4 \cdot \varphi(\xi_4, \eta_4)$$

La lecture du tableau 03 pour ce schéma d'intégration donne pour :

le premier point de Gauss les coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_1 = 1$

le second point de Gauss les coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_2 = 1$

le troisième point de Gauss les coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_3 = 1$

le quatrième point de Gauss les coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_4 = 1$

Ainsi :

$$I_2 = w_1 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \xi_3 \cdot \eta_3 + w_4 \cdot \xi_4 \cdot \eta_4$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1 = 0$$

$$I_2 = 0$$

#### Exemple 04 : Intégration sur un maillage 2D composé de deux éléments finis triangulaires TRI3

Reprendre le même maillage que celui de l'exemple 07 du chapitre 05 précédent en supposant que ce maillage est celui de la section transversale d'extrémité d'une barre en acier. Cette section transversale est donc de forme rectangulaire, de 20 cm de largeur et de 10 cm de hauteur (figure 05). Ce maillage étant composé de deux éléments finis triangulaires de type TRI3, les coordonnées des nœuds sont les suivants Nœud 1 (0,0) ; Nœud 2 (20,0) ; Nœud 3 (20,10) et le Nœud 4 (0,10). Après avoir été chauffée dans un four, quatre mesures de température ont été effectuées simultanément au niveau de ces nœuds. Ces mesures sont les mêmes que celles de l'exemple cité précédemment. Elles sont comme suit :  $T_1=150^\circ\text{C}$ ,  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ . L'expression mathématique approchée  $T(x,y)$  du champ de température en tout point de cette section (voir solution de l'exemple 07 chapitre 05) est comme suit :

$$T(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) = (150 + 2.5x + 10y) & \text{sur l'élément 1} \\ T_2(x, y) = (350 - 7.5x - 10y) & \text{sur l'élément 2} \end{cases}$$

En utilisant l'élément de référence, il est demandé de calculer numériquement les trois intégrales ci-dessous  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_{XY}$  qui représentent respectivement les trois moments d'inertie de cette section d'aire  $A$  par rapport aux axes X, Y et à l'origine du repère 1, tels que :

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy \quad I_Y = \iint_A x^2 dx. dy \quad I_{XY} = \iint_A x. y. dx. dy$$

En utilisant l'expression  $T(x,y)$  citée plus haut, calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. dy$$

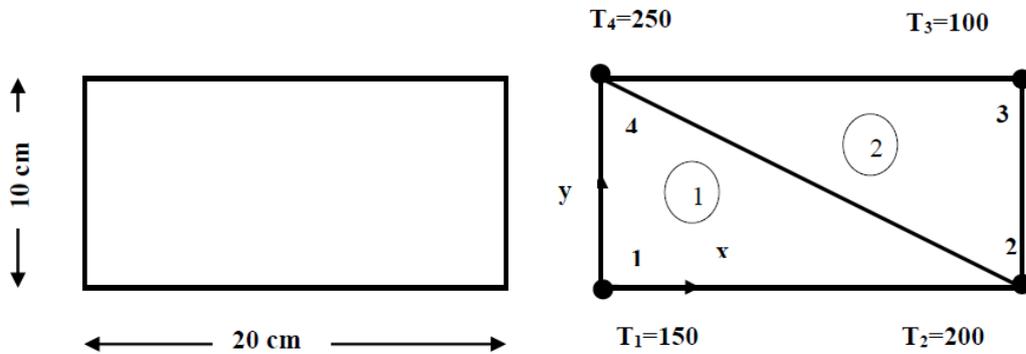


Figure 05 : section transversale d'extrémité (à gauche) et son maillage EF à 2 éléments de type TRI3 (à droite).

**Solution :**

Puisque notre section a été maillée par deux éléments 1 et 2, nos intégrales seront donc égales à la somme des deux intégrales sur les deux aires  $A_1$  et  $A_2$  des deux éléments 1 et 2 respectivement avec  $A = A_1 + A_2$  telles que :

$$I_X = \iint_{(A_1+A_2)} y^2 dx. dy = \iint_{A_1} y^2 dx. dy + \iint_{A_2} y^2 dx. dy = I_{X_1} + I_{X_2}$$

$$I_Y = \iint_{(A_1+A_2)} x^2 dx. dy = \iint_{A_1} x^2 dx. dy + \iint_{A_2} x^2 dx. dy = I_{Y_1} + I_{Y_2}$$

$$I_{XY} = \iint_{(A_1+A_2)} x. y. dx. dy = \iint_{A_1} x. y. dx. dy + \iint_{A_2} x. y. dx. dy = I_{XY_1} + I_{XY_2}$$

**Calcul des termes intégraux  $I_{X_1}$ ,  $I_{Y_1}$  et  $I_{XY_1}$  sur l'élément 1 :**

Soit donc l'élément 1 du maillage et son élément de référence associé tel que représenté en figure 06 ci-dessous.

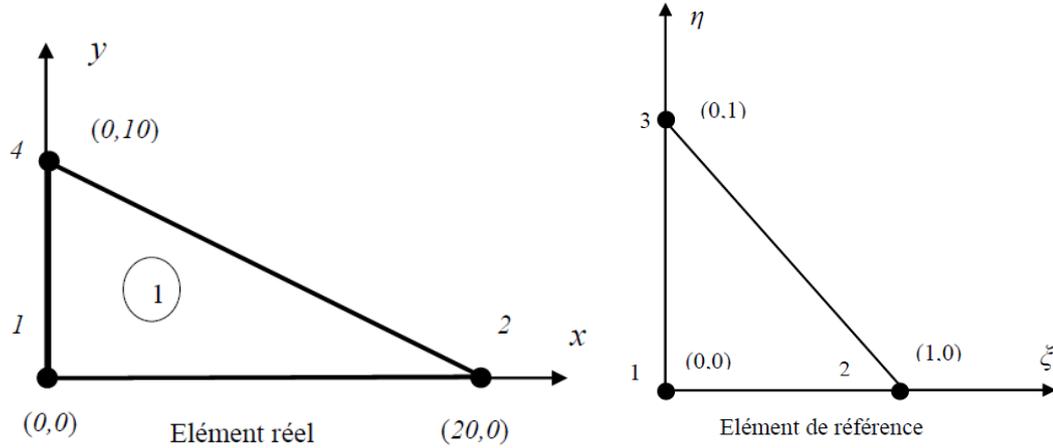


Figure 06 : Représentation de l'élément triangulaire 1 et de son élément de référence associé

La relation entre l'élément 1 et l'élément de référence étant telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on a obtenu (voir solution de l'exemple 07 chapitre précédent 05):

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20\xi \\ y(\xi, \eta) = 10\eta \end{cases}$$

On substitue les deux expressions précédentes dans celles des termes  $I_{X_1}$ ,  $I_{Y_1}$  et  $I_{XY_1}$  telles que :

$$I_{X_1} = \iint_{A_1} y^2 dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} y(\xi, \eta)^2 \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} (10\eta)^2 \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{Y_1} = \iint_{A_1} x^2 dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta)^2 \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} (20\xi)^2 \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{XY_1} = \iint_{A_1} x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta) \cdot y(\xi, \eta) \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} 200 \cdot \xi \cdot \eta \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Pour l'élément 01 (voir solution de l'exemple 10 chapitre 05), la matrice  $[J_1]$  est comme suit :

$$[J_1] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{41} & y_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 0) & (0 - 0) \\ (0 - 0) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J_1] = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 01}$$

Donc

$$I_{X_1} = 100 \cdot \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 2 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{Y_1} = 400 \cdot \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 8 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{XY_1} = 200 \cdot \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = 4 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Pour calculer les termes  $\iint_{A_{réf}} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$ ,  $\iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$  et  $\iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$ , on applique la méthode de Gauss-Legendre aux trois fonctions polynomiales  $\eta^2, \xi^2$  et  $\xi \cdot \eta$  qui sont toutes les trois de degré 02 de la forme  $\varphi(\xi, \eta) = \xi^i \cdot \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur minimale pour  $m$  donc  $m=2$ , et en choisissant le schéma d'intégration à  $r=3$  points de Gauss de la figure 03-c qui est reproduite ci-dessous, on peut calculer les intégrales ci-dessus telle que la lecture du tableau 02 pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

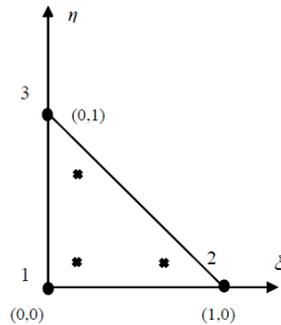
$$\iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3)$$

Et tels que :

le premier point de Gauss de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{6}$  aie un coefficient poids  $w_1 = \frac{1}{6}$

le second point de Gauss de coordonnées  $\xi_2 = \frac{2}{3}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{6}$  aie un coefficient poids  $w_2 = \frac{1}{6}$

le troisième point de Gauss de coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{6}$  et  $\eta_3 = \frac{2}{3}$  aie un coefficient poids  $w_3 = \frac{1}{6}$



Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \eta_1^2 + w_2 \cdot \eta_2^2 + w_3 \cdot \eta_3^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \xi_1^2 + w_2 \cdot \xi_2^2 + w_3 \cdot \xi_3^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \xi_3 \cdot \eta_3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_{X_1} = 2 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_1} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{12} = 1666,66 \text{ cm}^2$$

$$I_{Y_1} = 8 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{12} = 6666,66 \text{ cm}^2$$

$$I_{XY_1} = 200 \cdot \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{24} = 1666,66 \text{ cm}^2$$

**Calcul des termes intégraux  $I_{X_2}$ ,  $I_{Y_2}$  et  $I_{XY_2}$  sur l'élément 2 :**

Soit donc l'élément 2 du maillage et son élément de référence associé tel que représenté en figure 07 ci-dessous.

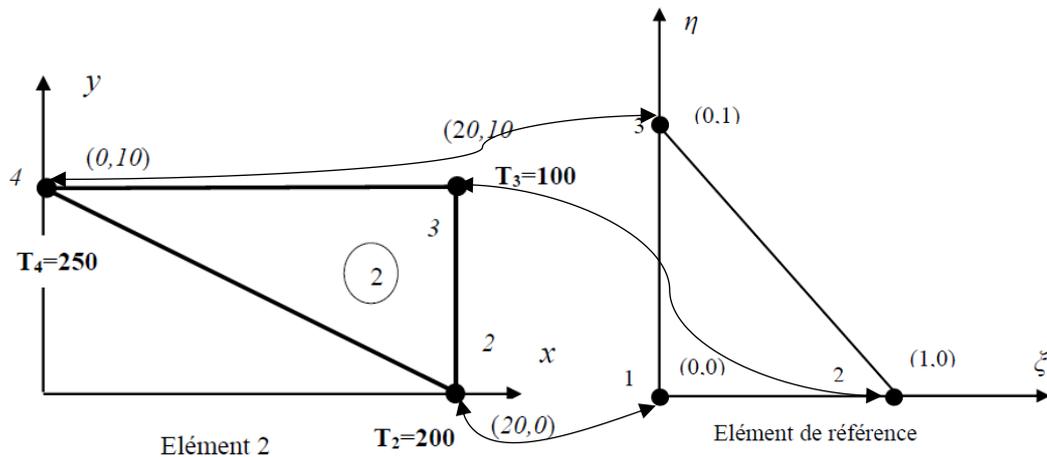


Figure 07 : Représentation de l'élément triangulaire 2 et de son élément de référence associé

La relation entre l'élément 2 et l'élément de référence étant telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20(1 - \eta) \\ y(\xi, \eta) = 10(\xi + \eta) \end{cases}$$

On substitue les deux expressions précédentes dans celles des termes  $I_{X_2}$ ,  $I_{Y_2}$  et  $I_{XY_2}$  telles que :

$$I_{X_2} = \iint_{A_2} y^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} y(\xi, \eta)^2. \det[J_2]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} (10(\xi + \eta))^2. \det[J_2]. d\xi. d\eta$$

$$I_{Y_2} = \iint_{A_2} x^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta)^2. \det[J_2]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} (20(1 - \eta))^2. \det[J_2]. d\xi. d\eta$$

$$\begin{aligned} I_{XY_2} &= \iint_{A_2} x. y. dx. dy \\ &= \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta). y(\xi, \eta). \det[J_2]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} 200. (\xi + \eta). (1 - \eta). \det[J_2]. d\xi. d\eta \end{aligned}$$

Pour l'élément 02 (voir solution de l'exemple 10 chapitre 05), la matrice  $[J_2]$  est comme suit :

$$[J_2] = \begin{bmatrix} x_{32} & y_{32} \\ x_{42} & y_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) & (y_3 - y_2) \\ (x_4 - x_2) & (y_4 - y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 20) & (10 - 0) \\ (0 - 20) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J_2] = -(-20 \times 10) = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 02}$$

Donc

$$I_{X_2} = 100. \det[J_2] \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2. d\xi. d\eta = 2. 10^4. \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2. d\xi. d\eta$$

$$I_{Y_2} = 400. \det[J_2] \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2. d\xi. d\eta = 8. 10^4. \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2. d\xi. d\eta$$

$$I_{XY_2} = 200. \det[J_2] \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta). (1 - \eta). d\xi. d\eta = 4. 10^4. \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta - \xi\eta - \eta^2). d\xi. d\eta$$

Pour calculer les termes intégraux précédents  $\iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2. d\xi. d\eta$  ,  $\iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2. d\xi. d\eta$  et  $\iint_{A_{réf}} (\xi + \eta - \xi\eta - \eta^2). d\xi. d\eta$  on doit utiliser la méthode de Gauss-Legendre aux trois fonctions polynomiales précédentes qui sont toutes les trois de degré 02 dont le monôme le plus élevé est de la forme  $\xi^i. \eta^j$  avec  $i + j = 2$  . Ainsi, pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur minimale pour  $m$  donc  $m=2$ , et en choisissant le même schéma d'intégration à  $r=3$  points de gauss que celui du calcul effectué sur l'élément 01, on peut calculer les intégrales ci-dessus telle que

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2. d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1. (\xi_1 + \eta_1)^2 + w_2. (\xi_2 + \eta_2)^2 + w_3. (\xi_3 + \eta_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}. \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}. \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}. \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2. d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1. (1 - \eta_1)^2 + w_2. (1 - \eta_2)^2 + w_3. (1 - \eta_3)^2 \\ &= \frac{1}{6}. \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}. \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}. \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1 \cdot (\xi_1 + \eta_1) \cdot (1 - \eta_1) + w_2 \cdot (\xi_2 + \eta_2) \cdot (1 - \eta_2) + w_3 \cdot (\xi_3 + \eta_3) \cdot (1 - \eta_3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_{X_2} = 2 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{4} = 5000 \text{ cm}^2$$

$$I_{Y_2} = 8 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{4} = 20000 \text{ cm}^2$$

$$I_{XY_2} = 4 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{5}{24} = 8333.33 \text{ cm}^2$$

Finalement :

$$I_X = I_{X_1} + I_{X_2} = 1666,66 + 5000 = 6666,67 \text{ cm}^2$$

$$I_Y = I_{Y_1} + I_{Y_2} = 6666,66 + 20000 = 26666,67 \text{ cm}^2$$

$$I_{XY} = I_{XY_1} + I_{XY_2} = 1666,66 + 8333,34 = 10000 \text{ cm}^2$$

En utilisant les expressions trouvées dans l'exemple 07 du chapitre 05, telles que :

$$T(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) = (150 + 2.5x + 10y) & \text{sur l'élément réel 1} \\ T_2(x, y) = (350 - 7.5x - 10y) & \text{sur l'élément réel 2} \end{cases}$$

Calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx \cdot dy$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x} = 2.5 & \text{dans l'élément 01} \\ \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial x} = -7.5 & \text{dans l'élément 02} \end{cases}$$

$$I_2 = \iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx \cdot dy = \iint_{A_1} \left(\frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x}\right)^2 dx \cdot dy + \iint_{A_2} \left(\frac{\partial T_2(x, y)}{\partial x}\right)^2 dx \cdot dy$$

$$I_2 = \iint_{A_1} 6.25 dx \cdot dy + \iint_{A_2} 56.25 dx \cdot dy = 6.25 \cdot \det[J_1] \cdot \iint_{A_{réf}} d\xi \cdot d\eta + 56.25 \cdot \det[J_2] \cdot \iint_{A_{réf}} d\xi \cdot d\eta$$

$$\text{Or } \iint_{A_{\text{réf}}} d\xi \cdot d\eta = \text{aire de l'élément de référence} = 0.5 \text{ cm}^2$$

Nota : ce résultat peut également être retrouvé en appliquant la méthode de Gauss-Legendre. En effet, si on adopte le même schéma d'intégration à trois points que celui utilisé précédemment, on peut écrire :

$$\iint_{A_{\text{réf}}} d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$I_2 = 6.25 \det[J_1] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 56.25 \cdot \det[J_2] \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 625 + 5625 = 6250$$

### Exemple 05: Intégration numérique sur un maillage 2D composé d'un élément de type QUA4

Reprendre le même exemple de section rectangulaire que celui de l'exemple précédent en supposant que cette fois que cette section a été maillée avec un seul élément quadrangulaire à quatre nœuds de type QUA4. Soit donc l'élément 1 du maillage de type QUA4 et son élément de référence tel que représenté en figure 08 ci-dessous. Cet élément 1 est constitué des nœuds : 1, 2, 3 et 4. A cet élément, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=150^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2, 3 et 4 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2, 3 et 4 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ .

En utilisant cet élément de référence, il est demandé de calculer numériquement les trois intégrales ci-dessous  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_{XY}$  qui représentent respectivement les trois moments d'inertie de cette section d'aire A par rapport aux axes X, Y et à l'origine du repère 1, tels que :

$$I_X = \iint_A y^2 dx \cdot dy \quad I_Y = \iint_A x^2 dx \cdot dy \quad I_{XY} = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy$$

En utilisant l'expression T(x,y) citée plus haut, calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx \cdot dy$$

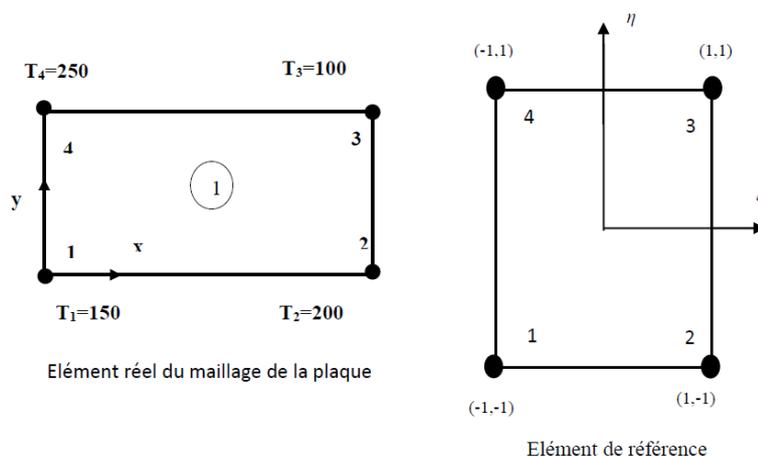


Figure 08 : Représentation de l'élément quadrangulaire 1 et de son élément de référence associé

**Solution :**

Soit donc à calculer les quantités

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy , \quad I_Y = \iint_A x^2 dx. dy \quad \text{et} \quad I_{XY} = \iint_A x. y. dx. dy$$

Soit donc l'élément unique noté 1 du maillage et son élément de référence associé tel que représenté en figure 08 ci-dessus. Les relations entre ces deux éléments étant telles que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \langle (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on a obtenu (voir solution de l'exemple 08 chapitre précédent 05):

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10 + 10\xi = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

On substitue les deux expressions précédentes dans celles de  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_{XY}$  telles que :

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} y(\xi, \eta)^2. \det[J]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} 25. (1 + \eta)^2. \det[J]. d\xi. d\eta$$

$$I_Y = \iint_A x^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta)^2. \det[J]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} 100. (1 + \xi)^2. \det[J]. d\xi. d\eta$$

$$\begin{aligned} I_{XY} &= \iint_A x. y. dx. dy \\ &= \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta). y(\xi, \eta). \det[J_1]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} 50. (1 + \xi). (1 + \eta). \det[J]. d\xi. d\eta \end{aligned}$$

Comme déjà vu dans l'exemple 11 du chapitre 05, pour l'élément QUA4 défini en 2D, la matrice Jacobienne est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Or les relations  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont déjà connues telles que :

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 10 \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 5$$

Ainsi, la matrice  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Et le déterminant  $\det[J] = 50$

Ainsi :

$$I_X = 25. \det[J] \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta = 1250. \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta$$

$$I_Y = 100. \det[J] \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta = 5000. \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta$$

$$I_{XY} = 50. \det[J] \iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta = 2500. \iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta$$

Pour calculer les termes

$\iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta$  ,  $\iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta$  et  $\iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta$ , on applique la méthode de Gauss-Legendre à ces trois fonctions polynomiales qui sont toutes les trois de degré 02 tel que le monôme le plus élevé est de la forme  $\xi^i. \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur pour  $m$  vérifiant la condition précédente et telle que  $m=3$ , et en choisissant le schéma d'intégration à  $r=4$  points de Gauss de la figure 04-c qui est reproduite ci-dessous, on peut calculer les intégrales ci-dessus telle que la lecture du tableau 03 pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

$$\iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta). d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1. \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2. \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3. \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4. \varphi(\xi_4, \eta_4)$$

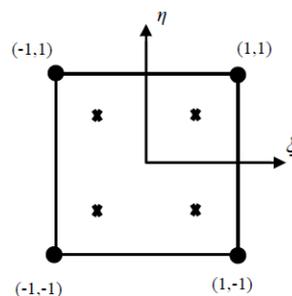
Et tels que :

le premier point de Gauss de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_1 = 1$

le second point de Gauss de coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_2 = 1$

le troisième point de Gauss de coordonnées  $\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_3 = 1$

le quatrième point de Gauss de coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_4 = 1$



Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1. (1 + \eta_1)^2 + w_2. (1 + \eta_2)^2 + w_3. (1 + \eta_3)^2 + w_4. (1 + \eta_4)^2 \end{aligned}$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta = 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 5.3333$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1. (1 + \xi_1)^2 + w_2. (1 + \xi_2)^2 + w_3. (1 + \xi_3)^2 + w_4. (1 + \xi_4)^2 \end{aligned}$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta = 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 5.3333$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1. (1 + \xi_1)(1 + \eta_1) + w_2. (1 + \xi_2)(1 + \eta_2) + w_3. (1 + \xi_3)(1 + \eta_3) \\ &\quad + w_4. (1 + \xi_4)(1 + \eta_4) \\ &= 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= 4 \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_X = 1250. \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta = 1250 * 5.333 = 6666.625 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = 5000. \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta = 26666.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{XY} = 2500. \iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta = 2500 * 4 = 10000 \text{ cm}^4$$

On retrouve ainsi les mêmes valeurs de résultats que celles obtenues dans l'exemple 04 précédent avec l'intégration sur deux éléments de type TRI3.

En utilisant l'expression de la distribution de la température trouvée dans l'exemple 08 du chapitre 05, telle que :

$$T(x, y) = 150 + 2.5x + 10y - xy$$

Calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx. dy$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 2.5 - y$$

$$I_2 = \iint_A \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx \cdot dy = \iint_A (2.5 - y)^2 dx \cdot dy$$

Or on sait que  $y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_{A_{réf}} (2.5 - y(\xi, \eta))^2 \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} (2.5 + 5\eta)^2 \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Or  $\det[J] = 50$  (voir plus haut)

Donc

$$I_2 = 50 \iint_{A_{réf}} (2.5 + 5\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 50 \iint_{A_{réf}} 2.5^2 (1 + 2\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 312.5 \iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Pour calculer les termes  $\iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$ , on applique la méthode de Gauss-Legendre à cette fonction polynomiale qui est du degré 02 puisque le monôme le plus élevé est de la forme  $(4 \cdot \xi^i \cdot \eta^j) = 4 \cdot \xi^0 \cdot \eta^2$  avec  $i + j = 0 + 2 = 2$ . Ainsi, pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En effet, en adoptant une valeur pour  $m$  vérifiant la condition précédente et telle que  $m=3$ , et en choisissant le schéma d'intégration à  $r=4$  points de Gauss de la figure 04-c qui est reproduite ci-dessus, on peut calculer l'intégrale ci-dessus telle que la lecture du tableau 03 pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \\ = \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4 \cdot \varphi(\xi_4, \eta_4) \end{aligned}$$

Et tels que :

le premier point de Gauss de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_1 = 1$

le second point de Gauss de coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_2 = 1$

le troisième point de Gauss de coordonnées  $\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_3 = 1$

le quatrième point de Gauss de coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_4 = 1$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1 \cdot (1 + 2\eta_1)^2 + w_2 \cdot (1 + 2\eta_2)^2 + w_3 \cdot (1 + 2\eta_3)^2 + w_4 \cdot (1 + 2\eta_4)^2 \end{aligned}$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \cdot \left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4.67$$

$$I_2 = 312.5 \iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 312.5 * 4.67 = 1459.37$$

#### 4 Calcul d'intégrales sur des éléments 3D à trois dimensions

Soit à calculer l'intégrale de la fonction à trois variables  $F(x, y, z)$  définie dans l'élément réel tridimensionnel  $V$  du maillage appartenant à l'espace basé sur les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . En utilisant l'élément de référence noté  $V_{ref}$  défini dans l'espace de coordonnées paramétriques également à trois dimensions  $(\xi, \eta, \zeta)$ , cette fonction  $F(x, y, z)$  se transforme en une fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  définie dans l'élément de référence  $V_{ref}$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (01)$$

Comme déjà vu depuis le début de ce chapitre cette transformation du calcul intégral, utilisant le déterminant de la matrice Jacobienne  $det[J]$ , est effectuée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_V F(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz &= \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \cdot det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta, \zeta) \cdot det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \end{aligned} \quad (02)$$

Il s'agit donc d'intégrer la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence  $V_{ref}$ . On déduit également de l'équation (02), la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx \cdot dy \cdot dz = det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (03)$$

Par ailleurs, la méthode utilisée pour l'intégration de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence est basée sur le principe de quadrature de Gauss-Legendre. Ce principe consiste à calculer les intégrales sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  en certains points de l'élément de référence appelés « points d'intégration » ou points de Gauss. Les coordonnées de ces points de Gauss ainsi que les coefficients poids relatifs à chaque point de Gauss sont donnés dans les tables en annexe.

## Chapitre 06 :

### Schéma global de résolution et Formulations intégrales

#### 1 Introduction

Les objectifs de ce chapitre consistent non seulement à faire connaître *les différentes étapes de résolution* d'un problème d'élasticité par la méthode des éléments finis mais surtout à faire comprendre les *bases de calculs adoptées* lors de chaque étape. A cet effet, seront traités les principaux thèmes suivants :

- les bases de la *méthode des résidus pondérés*,
- les différentes étapes d'une *formulation intégrale* en éléments finis de manière générale et en élasticité en particulier,
- le passage de la forme intégrale *forte* à la forme intégrale *faible*,
- l'opérateur variation et l'hypothèse de Galerkinge,
- la modélisation mathématique de l'élément barre et sa formulation intégrale

Cela étant dit, rappelons tout de même le problème posé du corps solide élastique  $\Omega$  avec ses frontières  $\Gamma_F$  et  $\Gamma_D$  et les conditions aux limites associées (figure 01) ainsi que ses équations d'équilibre aux dérivées partielles telles qu'elles ont été présentées dans le chapitre 02, à savoir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} &= 0 \end{aligned} \quad (6-01)$$

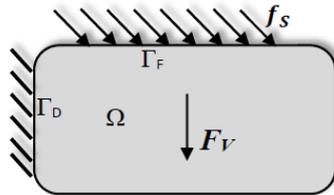


Figure 01 : position du problème

Sur  $\Gamma_D$  on a :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (6-02)$$

avec  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  des valeurs connues et souvent nulles à cause des appuis en  $\Gamma_D$ .

Des efforts de surface appliqués sur  $\Gamma_F$  tout en vérifiant la relation suivante :

$$- \{f_S\} = [\sigma] \cdot \{n\} \quad (6-03)$$

avec :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{Sz} \end{Bmatrix}, [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ et } \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \text{ avec } \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Il est demandé de trouver en tout point  $M$  de notre solide son déplacement  $\langle U \rangle$ , les états de contraintes et de déformations représentés respectivement par les tenseurs des contraintes  $[\sigma]$  et de déformations  $[\epsilon]$ . Autrement dit, il s'agit de trouver la réponse du solide représentée par les champs de déplacements, des contraintes et de déformations dans  $\Omega$ . Nous nous intéresserons également à la détermination des champs de réactions sur  $\Gamma_D$ .

Par ailleurs, comme mentionné dans le paragraphe 01 du chapitre 04, la MEF commence par transformer les équations d'équilibre réécrites en (6-01) et des conditions aux limites associées (6-02) et (6-03), en une formulation intégrale. Pour cela, deux méthodes sont largement utilisées dans la littérature. La première est connue sous le nom de méthode de Ritz. Elle est basée sur des considérations énergétiques, sur la notion de fonctionnelles ainsi que sur la formulation de condition de stationnarité de ces fonctionnelles. La seconde méthode est connue sous le nom de méthode des résidus pondérés. Exposée ci-après, cette méthode sera celle à laquelle nous nous limiterons dans le présent chapitre.

## 2 Schéma global de résolution

L'objectif du présent paragraphe est de présenter la manière dont est menée la résolution par éléments finis d'un problème de manière générale, et d'élasticité en particulier. Plus précisément, il s'agit de décrire toutes les étapes de résolution ainsi que les notions théoriques essentielles liées à chacune de ces étapes.

En effet, le point de départ étant le modèle mathématique, celui-ci est représenté par les systèmes d'équations aux dérivées partielles (6-01) en tout point du solide avec les conditions aux limites associées (6-02) et (6-03) sur ses frontières. Il en est suivi par les formulations intégrales fortes utilisant la méthode des résidus pondérés. Par la suite, les formulations intégrales faibles seront obtenues en utilisant les formules d'intégration par partie de Green suivies de l'adoption de l'hypothèse de Galerkin.

Il s'ensuivra alors la phase de discrétisation qui consiste en premier lieu à remplacer le domaine  $\Omega$  par un maillage d'éléments finis sur lesquels les trois techniques étudiées dans les chapitres précédents seront appliquées. Il est à rappeler que ces trois techniques sont : les transformations entre éléments réels et éléments de référence, les interpolations nodales ainsi que les intégrations numériques.

En second lieu, cette phase de discrétisation consiste à construire pour chaque élément du maillage les matrices de rigidité élémentaires notées  $[K_e]$ , les vecteurs forces locaux notés  $\{F_e\}$  ainsi que les vecteurs déplacements élémentaires généralisés notés  $\{U_e\}$ . L'assemblage de ces matrices de rigidité élémentaires donnera la matrice de rigidité globale notée  $[K]$  de toute la structure du solide représentée (ou modélisée) ici par son maillage. L'assemblage des vecteurs forces locaux donnera le vecteur forces global noté  $\{F\}$ . Enfin, l'assemblage des vecteurs déplacements élémentaires généralisés donnera le vecteur déplacements global noté  $\{U\}$ . En assurant la continuité des déplacements au niveau des nœuds de chaque élément du maillage, les trois assemblages cités précédemment permettent d'obtenir, finalement le système global d'équations algébriques suivant :

$$[K]. \{U\} = \{F\} \quad (6-04)$$

La résolution de ce système d'équations donnera pour chaque nœud du maillage, les vecteurs déplacements nodaux. En utilisant l'interpolation nodale, les relations déplacements-déformations, ainsi que les techniques d'intégrations numériques, nous obtenons les champs de déformations à l'intérieur de chaque élément du maillage. Enfin en utilisant la relation de Hooke contraintes-déformations, nous obtenons le champ de contraintes au niveau des points d'intégration (de Gauss) de chaque élément.

Cela étant dit, toute la démarche qui vient d'être présentée ci-dessus est récapitulée dans l'organigramme des calculs illustré par le tableau 01 suivant :

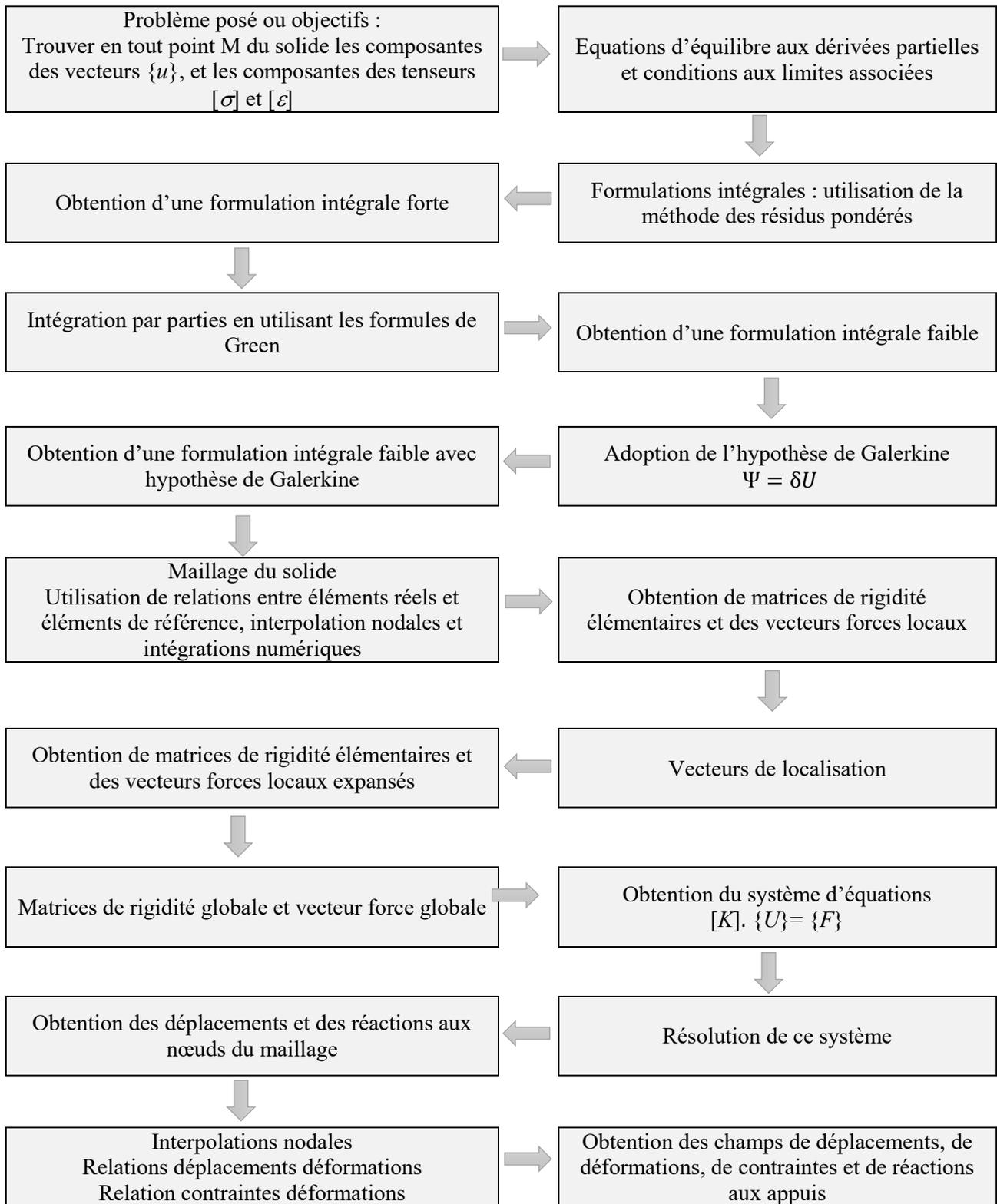


Tableau 01 : Organigramme des étapes de calculs effectués lors de la résolution par la MEF

### 3 Méthode des résidus pondérés – formes intégrales

#### 3.1 Définition du Résidu d'équilibre

Pour les éléments finis formulés en déplacements, vu que la solution recherchée en première étape, est un champ de vecteurs déplacements  $\vec{U}$  à travers le domaine  $\Omega$ , on définit le résidu par la quantité  $\{R(\vec{U})\}$  qui est un vecteur à trois composantes car le système d'équations aux dérivées partielles compte trois équations tel que :

$$\{R(\vec{U})\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} \end{bmatrix} \quad (6-05)$$

Il est clair que si la solution obtenue  $\vec{U}$  est égale à la solution exacte  $\vec{U}_{exact}$  telle que  $\vec{U} = \vec{U}_{exact}$ , le vecteur résidu  $\{R(\vec{U})\}$  sera nul :

$$\{R(\vec{U})\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-06)$$

#### 3.2 Forme intégrale forte

La méthode des résidus pondérés est une méthode qui consiste à chercher la solution sous la forme d'un champ de déplacements  $\vec{U}$  qui annule le résidu et par conséquent qui annule l'intégrale :

$$W = \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \{R(\vec{U})\} d\Omega = 0 \quad (6-07)$$

Avec  $\langle \psi \rangle$  : le vecteur de fonctions de pondérations dont les composantes sont  $\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle$ .

L'expression (6-07) est désignée par l'appellation de « *forme intégrale forte du problème* ».

Ainsi, le champ de déplacement  $\vec{U}$  est considéré comme étant la solution du problème, s'il annule l'intégrale  $W$  quels que soient les fonctions  $\langle \Psi \rangle$ . Prise dans un ensemble de fonctions, plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérées sont utilisées dans le choix de ces fonctions. Pour le présent chapitre, notre choix s'est porté sur la méthode de Galerkin qui constitue une des variantes parmi les plus utilisées. Toutefois, la seule condition imposée dans le choix de ces fonctions de pondérations  $\langle \Psi \rangle$  est qu'elles doivent être nulles sur la frontière  $\Gamma_D$  où les déplacements ont été imposés.

En remplaçant les vecteurs  $\langle \Psi \rangle$  et  $\{R(\vec{U})\}$  par leurs expressions respectives dans (6-07), une forme intégrale dite « forte » du problème d'élasticité tridimensionnel peut être écrite comme suit :

$$W = \left[ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} \right) + \Psi_v \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} \right) + \Psi_w \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (6-08)$$

Cette forme intégrale est qualifiée de forte car les inconnues recherchées sont écrites sous forme de dérivées partielles du premier ordre.

### 3.3 Forme intégrale faible :

#### 3.3.1 Intégration par partie (cas unidimensionnel)

Soient les deux fonctions  $u(x)$  et  $\Psi(x)$ . Il est rappelé que l'intégration par partie peut être écrite comme suit :

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + [\Psi(x) \cdot u(x)]_{x_1}^{x_2} \quad (6-09)$$

Il est à signaler que l'extension de ce principe d'intégration par partie aux cas 2D et 3D, peut être effectuée en utilisant des formules dites de Green.

#### 3.3.2 Formules de Green dans le cas bidimensionnel 2D

On considère les deux fonctions  $u(x, y)$  et  $\Psi(x, y)$ , définies sur  $\Omega$  dans le plan  $(x, y)$  avec  $\vec{n}$  la normale sortante à la frontière  $\Gamma$  telle que  $\vec{n} = \langle n_x, n_y \rangle$ . On a alors les deux relations suivantes appelées formules de Green :

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot u(x, y) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot u(x, y) \cdot n_x \cdot dl \quad (6-10)$$

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot u(x, y) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot u(x, y) \cdot n_y \cdot dl \quad (6-11)$$

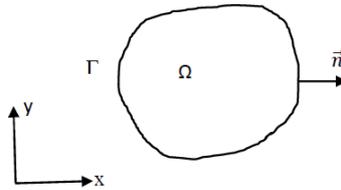


Figure 02 : Formules de Green en 2D

#### 3.3.3 Formules de Green dans le cas tridimensionnel 3D

On considère les deux fonctions  $u(x, y, z)$  et  $\Psi(x, y, z)$ , définies sur  $\Omega$  dans l'espace  $(x, y, z)$  avec  $\vec{n}$  la normale sortante à la frontière  $\Gamma$  telle que  $\vec{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle$ . On a alors les deux relations de Green suivantes :

$$\iiint_{\Omega} \Psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} \cdot u(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y, z) \cdot u(x, y, z) \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (6-12)$$

$$\iiint_{\Omega} \Psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y} \cdot u(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y, z) \cdot u(x, y, z) \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (6-13)$$

$$\iiint_{\Omega} \Psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} \cdot u(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y, z) \cdot u(x, y, z) \cdot n_z \cdot d\Gamma \quad (6-14)$$

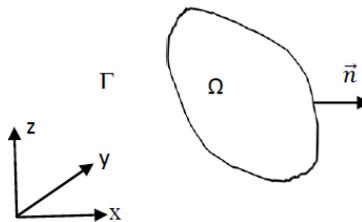


Figure 03: Formules de Green en 3D

Nota : Dans ce qui suit, les intégrales doubles et triples seront dorénavant notées comme simples

### 3.3.4 Forme intégrale faible

Pour un problème tridimensionnel d'élasticité linéaire, la forme intégrale faible s'écrit :

$$W = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \Psi \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma = 0 \quad (6-15)$$

Démonstration :

Rappelons la forme intégrale forte écrite dans l'expression (6-08),

$$W = \left[ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} \right) + \Psi_v \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} \right) \right. \\ \left. + \Psi_w \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} \right) \right] d\Omega = 0$$

En séparant cette forme en deux parties telle que la seconde partie représente les forces de volumes, on obtient :

$$W = \left[ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \Psi_v \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \Psi_w \cdot \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega = 0 \quad (6-16)$$

En appliquant la formule de Green à tous les termes de la première partie de (6-16), on obtient :

$$\int_{\Omega} \Psi_u \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_u \cdot \sigma_x \cdot n_x \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} \cdot \tau_{xy} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_u \cdot \tau_{xy} \cdot n_y \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} \cdot \tau_{xz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_u \cdot \tau_{xz} \cdot n_z \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_v \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \cdot \tau_{xy} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_v \cdot \tau_{xy} \cdot n_x \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_v \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_v \cdot \sigma_y \cdot n_y \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_v \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} \cdot \tau_{yz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_v \cdot \tau_{yz} \cdot n_z \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_w \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \cdot \tau_{xz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_w \cdot \tau_{xz} \cdot n_x \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_w \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \cdot \tau_{yz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_w \cdot \tau_{yz} \cdot n_y \cdot d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \Psi_w \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_w \cdot \sigma_z \cdot n_z \cdot d\Gamma$$

En remplaçant ces termes par leurs expressions dans (6-16), on aura :

$$\begin{aligned} W = & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ & + \left. \left( \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega \\ & + \oint_{\Gamma} \left( \Psi_u \cdot (\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z) + \Psi_v \cdot (\tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z) \right. \\ & \left. + \Psi_w \cdot (\tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z) \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6-17)$$

Or on sait que la frontière fermée  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$  avec  $\Gamma_D \cap \Gamma_F = \emptyset$  et telle que

$\Gamma_D$ : la zone où les déplacements sont imposés et donc les fonctions de pondération  $\langle \Psi \rangle$  nulles.

$\Gamma_F$ : la zone où les forces de surface sont imposées avec

$$\begin{aligned} f_{S_x} &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ f_{S_y} &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ f_{S_z} &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned} \quad (6-18)$$

Ceci implique que l'intégrale sur la frontière  $\Gamma$  se réduit à l'intégrale sur  $\Gamma_F$  comme suit :

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \left( \Psi_u \cdot (\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z) + \Psi_v \cdot (\tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z) + \Psi_w \cdot (\tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z) \right) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_F} \left( \Psi_u \cdot f_{S_x} + \Psi_v \cdot f_{S_y} + \Psi_w \cdot f_{S_z} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma_F} \langle \Psi \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6-19)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} W = & - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left( \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \Psi \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6-15)$$

C.O.F.D

Cette expression est appelée forme intégrale faible d'un problème tridimensionnel d'élasticité linéaire où apparaissent non seulement les forces de volume  $\{F_V\}$  mais également les forces de surface  $\{f_S\}$ . Ainsi, par rapport à la formulation intégrale forte écrite en (6-08), on fait apparaître dans l'expression de la formulation faible les conditions aux limites sur  $\Gamma_F$ . On peut également constater sur (6-15) que comparativement à la formulation forte, ce ne sont plus les dérivées des composantes des contraintes qui figurent dans l'expression mais les composantes des contraintes elles-mêmes. Par conséquent, le degré de dérivation de la solution recherchée a baissé de un dans cette formulation faible. Ce qui permet de rechercher la solution sous une forme plus simple.

## 4 Méthode de Galerkin

Intéressons-nous maintenant au choix des fonctions de pondération  $\langle \Psi \rangle$ . Celui-ci peut se faire de différentes manières. Ce qui définit plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérés. Les méthodes les plus connues portant sur le choix de ces fonctions sont :

- La méthode de collocation par points
- La méthode de collocation par sous domaines
- La méthode des moindres carrés
- La méthode de Galerkin

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons uniquement à la méthode de Galerkin.

### 4.1 Hypothèse de Galerkin

Cette hypothèse consiste à prendre pour fonctions de pondération, les variations des composantes du champ de solution recherché. Ces variations sont exprimées en utilisant l'opérateur variation noté  $\delta$ . Cet opérateur est identique à celui utilisé dans le théorème des travaux virtuels. En élasticité tridimensionnelle, on a :

$$\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle \quad (6-20)$$

Par ailleurs, il est important de rappeler les propriétés de cet opérateur variation  $\delta$  qui sont comme suit :

$$\begin{aligned} \delta(u + v) &= \delta u + \delta v \\ \delta(u \cdot v) &= u \cdot \delta v + v \cdot \delta u \\ \delta(c \cdot u) &= c \cdot \delta u \\ \delta\langle a \rangle &= \langle \delta a_x \quad \delta a_y \quad \delta a_z \rangle \\ \delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \\ \int_V \delta u \, dV &= \delta\left(\int_V u \, dV\right) \end{aligned}$$

### 4.2 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

En considérant que  $\langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle$  et en remplaçant la fonction  $\langle \Psi \rangle$  par ses nouvelles composantes dans l'expression de la formulation intégrale faible (6-15), on obtient :

$$\begin{aligned} W = - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial(\delta v)}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial(\delta w)}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left( \frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left( \frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6-21)$$

Si on applique les propriétés de l'opérateur variation  $\delta$  telles que décrites ci-dessus, on aura :

$$\begin{aligned} W = - \int_{\Omega} \left( \delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \sigma_y + \delta \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \sigma_z + \delta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \delta \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ \left. + \delta \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \end{aligned} \quad (6-22)$$

En tenant compte des relations déformations déplacements écrites dans le paragraphe 2 du chapitre 02, l'expression précédente sera comme suit :

$$W = - \int_{\Omega} (\delta(\varepsilon_x) \cdot \sigma_x + \delta(\varepsilon_y) \cdot \sigma_y + \delta(\varepsilon_z) \cdot \sigma_z + \delta(\gamma_{xy}) \cdot \tau_{xy} + \delta(\gamma_{xz}) \cdot \tau_{xz} + \delta(\gamma_{yz}) \cdot \tau_{yz}) \cdot d\Omega \quad (6-23)$$

$$+ \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

Soit les trois vecteurs :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle$$

$$\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{xz} \quad \delta \gamma_{yz} \rangle$$

Finalement, la forme intégrale faible devient en introduisant les trois vecteurs précédents dans (6-23) devient :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma = 0 \quad (6-23)$$

Ce dernier résultat n'est rien d'autre que l'expression du théorème des travaux virtuels (revoir le paragraphe 07 du chapitre 02) avec :

- $\int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega$  : le travail virtuel interne
- $\int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega$  : le travail virtuel des efforts de volume  $\vec{F}_V$
- $\oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma$  : le travail virtuel des efforts de surface  $\vec{f}_S$

### 4.3 Prise en compte des forces ponctuelles

L'expression précédente ne s'applique pas dans le cas où notre solide  $\Omega$  est soumis à  $m$  forces ponctuelles  $F_P^i$   $i = 1, m$  causant respectivement des déplacements virtuels  $\delta U_P^i$   $i = 1, m$ . Le travail virtuel de ces forces ponctuelles sera pris en compte par le terme suivant :

$$\sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i$$

En intégrant ce dernier terme dans l'expression (6-23), on obtient la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin prenant en compte les forces ponctuelles :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i = 0 \quad (6-24)$$

Toutefois, nous verrons plus loin (lors de l'introduction du vecteur forces globales) qu'il est inutile d'introduire les forces ponctuelles dans la formulation faible puisqu'elles peuvent être introduites directement comme charges nodales dans le *vecteur force globale*.

## 5 Application à l'élément barre

Considérons un élément barre défini le long de l'axe  $x$ , et située entre  $x_1$  et  $x_2$ . Cette barre ne travaille que vis-à-vis de l'effort normal (soit en traction, soit en compression). Les propriétés matérielles et géométriques caractérisant cette barre sont : la masse volumique de son matériau constitutif  $\rho$ , son module d'Young  $E$ , l'aire de sa section transversale  $A$  et enfin sa longueur  $L = x_2 - x_1$ .

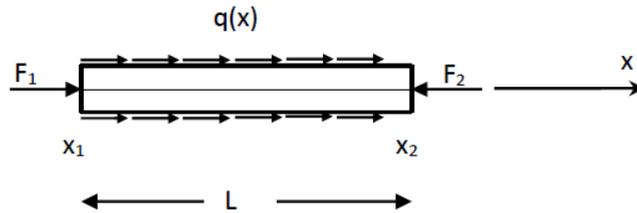


Figure 04 : exemple d'élément barre de longueur  $L$

Soient les deux types de charges appliquées à cette barre tel qu'illustré sur la figure 04 précédente. Le premier chargement est de type ponctuel représenté par les forces  $F_1$  et  $F_2$  qui sont appliquées à ses extrémités. Le second chargement est de type uniformément réparti par unité de longueur. Ce dernier type est équivalent au chargement dû au poids propre. Cette charge  $q(x)$  peut de manière générale avoir une variation quelconque.

### 5.1 Equations d'équilibre

Soit  $u(x)$  la solution recherchée qui représente le champ de déplacements le long de l'axe  $x$ . L'état de contraintes dans cette barre étant considéré comme étant uniaxial, seule la composante  $\sigma_x$  du tenseur des contraintes est non nulle. Toutes les autres composantes sont considérées comme nulles.

Considérons un élément infinitésimal de longueur  $dx$  (figure 05) :

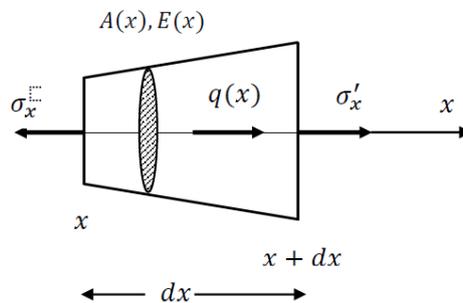


Figure 05 : Élément infinitésimal d'une barre

Considérons les deux sections transversales respectivement d'abscisses  $x$  et  $(x+dx)$ . Les évolutions des contraintes et des aires des sections transversales sont :

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \quad \text{et} \quad A(x+dx) = A(x) + \frac{dA(x)}{dx} dx \quad (6-25)$$

L'équilibre des forces dans la direction  $x$  s'écrit :

$$-\sigma_x \cdot A(x) + \left( \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) \left( A(x) + \frac{dA(x)}{dx} dx \right) + q(x) \cdot dx = 0$$

En négligeant le terme du second ordre  $\left( \frac{d\sigma_x}{dx} \cdot \frac{dA(x)}{dx} \cdot dx^2 \right)$ , on aura :

$$\sigma_x \cdot \frac{dA(x)}{dx} \cdot dx + A(x) \frac{d\sigma_x}{dx} dx + q(x) \cdot dx = \frac{d(A(x) \cdot \sigma_x)}{dx} + q(x) \cdot dx = 0 \quad (6-26)$$

Or notre matériau étant élastique,

$$\sigma_x = E(x) \cdot \varepsilon(x) = E(x) \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

En remplaçant  $\sigma_x$  par son expression dans (6-26), on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left( A(x) \cdot E(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0$$

Si les aires des sections transversales ainsi que le module d'Young sont constants tels que

$$E(x) \cdot A(x) = E \cdot A$$

Dans ce cas, on aura finalement l'équation différentielle d'équilibre comme suit :

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (6-27)$$

La résolution de cette équation différentielle ne pouvant se faire sans conditions aux limites qui sont comme suit. En effet, au niveau de la section d'abscisse  $x = x_1$  on a :

$$\sigma_x = \frac{F_1}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F_1}{E \cdot A} \Rightarrow \frac{du}{dx}(x_1) = \frac{F_1}{E \cdot A} \quad (6-28)$$

De la même manière, au niveau de la section d'abscisse ( $x=x_2$ ), on a

$$\sigma'_x = -\frac{F_2}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma'_x}{E} = -\frac{F_2}{E \cdot A} \Rightarrow \frac{du}{dx}(x_2) = -\frac{F_2}{E \cdot A} \quad (6-29)$$

Le problème consiste donc à rechercher la fonction  $u(x)$  solution de l'équation différentielle (6-27) et qui vérifie à la fois les conditions aux limites représentées par les expressions (6-28) et (6-29).

## 5.2 Forme intégrale forte

La forme intégrale forte du problème pouvant s'écrire comme suit :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \Psi \cdot \left( E \cdot A \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x) \right) \cdot dx = 0 \quad (6-30)$$

## 5.3 Forme intégrale faible

Si on applique la formule d'intégration par partie telle que nous l'avons vue pour le cas unidimensionnel dans l'expression (6-09) du paragraphe 3.2.1 que nous rappelons ici

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + [\Psi(x) \cdot u(x)]_{x_1}^{x_2} \quad (6-09)$$

On aura donc :

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d\Psi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} \right) dx + E \cdot A \cdot \left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (6-31)$$

Or en tenant compte des expressions suivantes tirées de (6-28) et (6-29),

$$\frac{du}{dx}(x_1) = \frac{F_1}{E \cdot A} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx}(x_2) = -\frac{F_2}{E \cdot A}$$

et en les remplaçant les expressions suivantes dans (6-31), on aura la forme intégrale faible du problème comme suit :

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{d\Psi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} \right) dx + F_2 \cdot \Psi(x_2) + F_1 \cdot \Psi(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (6-32)$$

#### 5.4 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

L'hypothèse de Galerkin consiste à prendre pour ce cas unidimensionnel  $\Psi(x) = \delta u(x)$ .

En remplaçant  $\Psi(x)$  par l'expression précédente et en tenant compte des propriétés de l'opérateur variation  $\delta$ , on aura la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin :

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left[ \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} \right] dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) + F_1 \cdot \delta u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (6-33)$$

#### 5.5 Seconde méthode : utilisation directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles

Rappelons ci-dessous la forme intégrale faible avec prise en compte de forces ponctuelles telle qu'écrute en (6-24) de manière générale pour les problèmes tridimensionnels :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i = 0 \quad (6-34)$$

Rappelons également que  $(\sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i)$  est le travail de  $m$  forces ponctuelles  $F_P^i$  causant respectivement  $m$  déplacements virtuels  $\delta U_P^i$ .

Dans le cas de l'élément barre, les vecteurs  $\langle \varepsilon \rangle$  et  $\langle \sigma \rangle$  sont comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \\ \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent :  $\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \} = \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x = E \cdot \delta \varepsilon_x \cdot \varepsilon_x = E \cdot \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx}$

Ce qui implique :  $-\int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx$  avec  $d\Omega = A \cdot dx$

Par ailleurs, on a :  $\{ F_V \} = \frac{q(x)}{A}$ . Ce qui implique :  $\int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega = \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx$

Concernant les deux forces ponctuelles  $F_1$  et  $F_2$ , on a :  $\sum_{i=1}^2 \delta U_P^i \cdot F_P^i = F_1 \cdot \delta u(x_1) + F_2 \cdot \delta u(x_2)$

Pour sa part, vu l'absence de forces surfaciques, on a :  $\{ f_S \} = 0$ , ceci conduit à :  $\oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma = 0$

Finalement, avec cette seconde méthode, on retrouve la même expression de la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin que celle trouvée en (6-33)

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left[ \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right] dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) + F_1 \cdot \delta u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0$$

## 6 Exemples

### Exemple 01 :

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t$  et modélisée, dans l'espace 2D muni d'un repère  $(1,x,y)$ , par un maillage composé d'un seul élément triangulaire à trois nœuds de type TRI3 (figure 06).

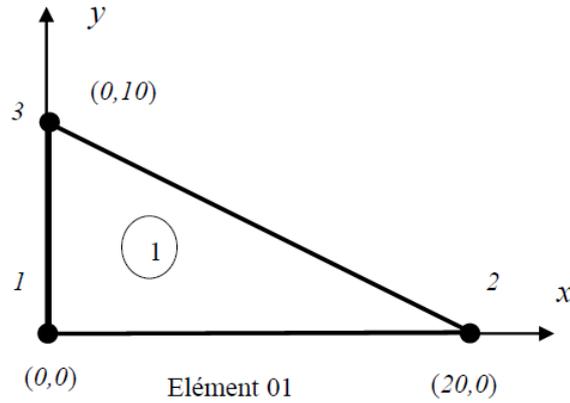


Figure 06 : paroi métallique mince de forme triangulaire

Sur le domaine occupé par cette paroi et noté  $\Omega$ , on considère l'équation de transfert thermique suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2 = 0$$

Les conditions aux limites liées à cette équation sont comme suit :

- Une température nulle ( $T=0$ ) est imposée sur le bord (2-3) noté  $\Gamma_D$
- Un flux de chaleur nul ( $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ ) est imposé sur les bords (1-2) et (1-3) notés  $\Gamma_F$ .

Afin de déterminer la distribution du champ scalaire de température  $T(x,y)$  dans cette paroi, il est demandé d'établir :

- 1- La forme intégrale forte du problème
- 2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

### **Solution :**

Soit le domaine  $\Omega$  dont la frontière  $\Gamma$  est fermée telle que  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$  avec  $\Gamma_D \cap \Gamma_F = \emptyset$  avec

- $\Gamma_D$ : (bord 2-3) la zone où les températures ont été imposées et donc les fonctions de pondération  $\langle \Psi \rangle$  nulles.
- $\Gamma_F$ : (bords 1-2 et 1-3) la zone où les flux chaleur ont été imposés nuls.

1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème est :

$$W = \int_{\Omega} \Psi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2 \right) dx dy = \int_{\Omega} \Psi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx dy + \int_{\Omega} \Psi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy + 2 \int_{\Omega} \Psi dx dy = 0$$

2- Pour établir la forme intégrale faible du problème, on doit d'abord appliquer les formules Green en 2D qui ont été écrites dans les expressions (6-10) et (6-11) du paragraphe 3.3 pour chaque terme de l'équation précédente comme suit :

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} \right) dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x \cdot dl$$

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \left( \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y \cdot dl$$

En remplaçant ces deux termes précédents par leurs expressions dans la forme intégrale forte de la question 1, on aura :

$$\begin{aligned} W &= - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x \cdot dl \\ &\quad - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y \cdot dl + 2 \int_{\Omega} \Psi \, dx \, dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} W &= - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy \\ &\quad + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \left( \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y \right) \cdot dl + 2 \int_{\Omega} \Psi \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

Or 
$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y$$

$$W = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl + 2 \int_{\Omega} \Psi \, dx \, dy = 0$$

Puisque :

$$\oint_{\Gamma} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl = \oint_{\Gamma_D} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl + \oint_{\Gamma_F} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl$$

Or 
$$\Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_F$$

Par conséquent :

$$\oint_{\Gamma} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl = 0$$

Et

$$W = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + 2 \int_{\Omega} \Psi(x, y) \, dx \, dy = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x, y) = \delta T(x, y)$$

En remplaçant la fonction  $\Psi$  par son expression précédente, on aura :

$$W = - \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial(\delta T(x, y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta T(x, y))}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + 2 \int_{\Omega} (\delta T(x, y)) \cdot dx dy = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation  $\delta$  que nous rappelons comme suit :

$$\delta \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}$$

On aura finalement :

$$W = - \iint_{\Omega} \left( \delta \left( \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \delta \left( \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + 2 \int_{\Omega} (\delta T(x, y)) \cdot dx dy = 0$$

### Exemple 02 :

Soit l'équation différentielle suivante définie dans l'intervalle [1 2] comme suit :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 3 \cdot u = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1) = 0 \text{ et } \frac{du}{dx}(2) = 0$$

Il est demandé d'établir :

- 1- La forme intégrale forte du problème
- 2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

### Solution :

Soit le domaine  $\Omega = [1 2]$  qui est un intervalle 1D fermé

- 1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + 3 \cdot u(x) \right) dx = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx + 3 \int_1^2 \Psi(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

- 2- Pour établir la forme intégrale faible du problème précédent, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (6-09) du paragraphe 3.3 uniquement pour le premier terme de l'équation précédente comme suit :

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2$$

Le second terme  $\left( 3 \int_1^2 \Psi(x) \cdot u(x) \cdot dx \right)$  dont la fonction inconnue est  $u(x)$  apparaît explicitement (c'est-à-dire qu'elle n'est pas écrite sous forme de dérivée), ne nécessite aucune modification.

Par ailleurs, puisque  $u(1) = 0$  donc la fonction  $\Psi(x)$  est nulle en  $x=1$  donc  $\Psi(1) = 0$  et

puisque  $\frac{du}{dx}(2) = 0$ , donc le terme  $\left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2 = 0$

Par conséquent, la forme intégrale faible sera :

$$W = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 3 \int_1^2 \Psi(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction  $\Psi$  par son expression précédente, on aura :

$$W = - \int_1^2 \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 3 \int_1^2 \delta u(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation  $\delta$  que nous rappelons ici comme suit :

$$\delta \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = - \int_1^2 \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 3 \int_1^2 \delta u(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

### Exemple 03 :

Soit un phénomène physique modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante définie dans l'intervalle [1 2] comme suit :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - 2x = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1) = u(2) = 0$$

Il est demandé d'établir :

- 1- La forme intégrale forte du problème
- 2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

### Solution :

- 1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - 2x \right) dx = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx + \int_1^2 \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx - 2 \int_1^2 \Psi(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

- 2- Pour établir la forme intégrale faible du problème précédent, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (6-09) du paragraphe 3.3 uniquement pour les deux premiers termes de l'équation précédente comme suit :

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + [\Psi(x) \cdot u(x)]_1^2$$

Or  $\Psi(1) = \Psi(2) = 0$  car  $u(1) = u(2) = 0$

Ce qui implique que

$$\left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2 = [\Psi(x) \cdot u(x)]_1^2 = 0$$

Dans ce cas :

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx$$

Par conséquent, la forme intégrale faible sera :

$$W = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx - 2 \int_1^2 \Psi(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction  $\Psi$  par son expression précédente, on aura :

$$W = \int_1^2 \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \int_1^2 \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + 2 \int_1^2 \delta u(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation  $\delta$  que nous rappelons comme suit :

$$\delta \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = \int_1^2 \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \int_1^2 \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot u(x) \cdot dx + 2 \int_1^2 \delta u(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

#### Exemple 04 :

Soit une barre de longueur  $L=100$  cm de section transversale constante d'aire  $A = 1 \text{ cm}^2$ . Cette barre est bloquée en déplacements à l'extrémité ( $x= 0$ ). Elle est soumise à une force ponctuelle  $F=100$  KN à l'autre extrémité ( $x = 100$  cm). Le poids propre de cette barre est considéré comme négligeable.

- 1- Ecrire le problème sous forme d'une équation différentielle avec ses conditions aux limites
- 2- Etablir la forme intégrale forte du problème
- 3- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin
- 4- Retrouver cette forme intégrale faible en utilisant la méthode directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles.

#### Solution :

1- L'équation d'équilibre d'un élément infinitésimal de longueur  $dx$  est comme suit (voir la démonstration au paragraphe 5.1) :

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) = 0$$

Or le poids propre est négligeable donc  $q(x) = 0$

Ainsi l'équation différentielle devient

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

Avec comme condition aux limites

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(100) = \frac{F}{EA} = \frac{100}{21000.1} = 4.762 \cdot 10^{-3}$$

2- Forme intégrale forte du problème

En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_0^{100} \Psi(x) \cdot \left( E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = 0$$

3- Pour établir la forme intégrale faible du problème, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (6-09) du paragraphe 3.3 comme suit :

$$W = E \cdot A \cdot \int_0^{100} \Psi(x) \cdot \left( \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_0^{100} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_0^{100} = 0$$

Or  $\Psi(0) = 0$  car  $u(0) = 0$

Ce qui implique que

$$\left[ \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_0^{100} = \Psi(100) \cdot \frac{du(100)}{dx} - \Psi(0) \cdot \frac{du(0)}{dx} = 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \Psi(100)$$

On obtient ainsi

$$W = - \int_0^{100} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \Psi(100) = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction  $\Psi$  par son expression précédente, on aura :

$$W = - \int_0^{100} \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \delta u(100) = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation  $\delta$  que nous rappelons comme suit :

$$\delta \left( \frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = - \int_0^{100} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \delta u(100) = 0$$

4- Forme intégrale faible en utilisant la méthode directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles.

Rappelons ci-dessous la forme intégrale faible avec prise en compte de forces ponctuelles telle qu'écrite en (6-24) de manière générale pour les problèmes d'élasticité tridimensionnels :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i = 0$$

Dans le cas de l'élément barre, les vecteurs  $\langle \varepsilon \rangle$  et  $\langle \sigma \rangle$  sont comme suit :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

Par conséquent :  $\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\} = \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x = E \cdot \delta \varepsilon_x \cdot \varepsilon_x = E \cdot \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx}$

Ce qui implique :  $-\int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\}) \cdot d\Omega = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx$  avec  $d\Omega = A \cdot dx$

Par ailleurs, les forces de volume ayant été négligées donc on a :  $\{F_V\} = 0$ . Ce qui implique :

$$\int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega = 0$$

Concernant les deux forces ponctuelles  $F_1$  et  $F_2$ , on a :  $\sum_{i=1}^2 \delta U_P^i \cdot F_P^i = F_1 \cdot \delta u(x_1) + F_2 \cdot \delta u(x_2)$

Or  $u(x_1) = 0 \Rightarrow \Psi(x_1) = 0 \Rightarrow$  puisque  $\Psi(x_1) = \delta u(x_1) \Rightarrow \delta u(x_1) = 0$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^2 \delta U_P^i \cdot F_P^i = F_2 \cdot \delta u(x_2) = 100 \cdot \delta u(100)$$

Pour sa part, vu l'absence de forces surfaciques, on a :  $\{f_S\} = 0$ , ceci conduit à :

$$\oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma = 0$$

Finalement, avec cette seconde méthode, on retrouve la même expression de la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin que celle trouvée en (6-33)

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) = 0$$

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} dx + \frac{F_2}{E \cdot A} \cdot \delta u(x_2) = 0$$

On retrouve ainsi le même résultat que la réponse à la question 3 précédente :

$$W = - \int_0^{100} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \delta u(100) = 0$$

## Chapitre 07

### Rigidités élémentaires et forces nodales équivalentes

#### 1 Forme générale

Les objectifs de ce chapitre sont comme suit :

- l'introduction du maillage et de l'interpolation nodale dans la formulation faible
- la détermination des matrices de rigidité élémentaires
- le calcul de vecteurs forces locaux

En effet, comme déjà vu dans le schéma global de résolution illustré dans le paragraphe 2 du chapitre précédent, les constructions pour chaque élément fini du maillage, d'une matrice de rigidité dite élémentaire et d'un vecteur force dit local, sont nécessaires. Toutefois, ceci ne peut se réaliser sans la discrétisation de la forme intégrale faible établie dans le chapitre précédent. Cette discrétisation consiste en l'introduction du maillage et de l'interpolation nodale dans cette forme intégrale. Ceci a pour but de faire apparaître les valeurs du champ de solution recherché (les déplacements en mécanique) aux nœuds du maillage.

##### 1.1 Introduction du maillage dans la forme intégrale faible

Cette première étape de la discrétisation consiste à écrire que les intégrales sur le domaine  $\Omega$  et sur une partie de la frontière  $\Gamma_F$  sont la sommation d'intégrales sur chaque élément qui est noté ici  $\Omega_{(i)}$  telle que :

$$W = \sum_{i=1}^N W_{(i)} = 0 \quad (8-01)$$

avec

$$W_i = - \int_{\Omega_{(i)}} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma \quad (8-02)$$

$N$  étant le nombre total d'éléments du maillage.

Par ailleurs, il est à noter que les surfaces élémentaires  $\Gamma_{F(i)}$  sont celles des faces de certains éléments du maillage qui ont une frontière commune avec la surface extérieure  $\Gamma_F$  sur laquelle sont appliquées les forces de surface  $\{ f_S \}$ . Il est clair que pour les éléments qui n'ont aucune face commune avec  $\Gamma_F$ , le terme  $\left( \oint_{\Gamma_{F(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma \right)$  est nul.

##### 1.2 Introduction de l'interpolation nodale du champ de solution recherché ou Matrice [N]

Après avoir introduit le maillage, l'étape suivante consiste à introduire l'interpolation nodale du champ solution recherchée (qui est le champ de déplacements dans notre cas), de la manière suivante. En effet, sur l'élément de référence, ce champ de déplacements s'exprime de la manière suivante :

$$u = \langle N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad v = \langle N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } w = \langle N_1 \quad N_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$$

Si on définit un vecteur contenant tous les déplacements nodaux de l'élément noté  $\langle U_{n(i)} \rangle$  telle que :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad u_n \quad v_n \quad w_n \rangle \quad (8-03),$$

L'écriture précédente des composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  peut prendre la forme suivante :

$$u = \langle N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad N_n \quad 0 \quad 0 \rangle \cdot \{U_{n(i)}\}$$

$$v = \langle 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad N_n \quad 0 \rangle \cdot \{U_{n(i)}\}$$

$$w = \langle 0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad 0 \quad N_n \rangle \cdot \{U_{n(i)}\}$$

Ainsi, la mise sous forme condensée de l'écriture précédente permet d'introduire la matrice  $[N]$  telle que :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-04)$$

Avec

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur variation  $\delta$  à l'équation (8-04), on aura :

$$\{\delta U\} = [N] \cdot \{\delta U_{n(i)}\} \quad (8-05)$$

$$\text{Avec } \langle \delta U_{n(i)} \rangle = \langle \delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta w_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta w_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \delta u_n \quad \delta v_n \quad \delta w_n \rangle$$

Par ailleurs, l'équation (8-05) peut s'écrire sous une autre forme transposée comme suit :

$$\langle \delta U \rangle = \langle \delta U_{n(i)} \rangle [N]^T \quad (8-06)$$

### **Exemples de calcul de matrices $[N]$ :**

#### **Exemple 01 : Cas de l'élément unidimensionnel à deux nœuds SEG2 (linéaire):**

Soit un élément numéroté  $(i)$  à deux nœuds dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Puisque dans le cas unidimensionnel,  $\{U\}$  possède une seule composante, et en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle qu'elle a été écrite en (8-04), on a :

$$\{U\} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, on obtient par identification :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle$$

Exemple 02 : Cas de l'élément unidimensionnel à trois nœuds SEG3 (quadratique) :

Soit l'élément (i) à trois nœuds dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle que écrite en (8-04), on a :

$$u(\xi) = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Donc par identification, on obtient :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle = \langle -\frac{\xi}{2}(1 - \xi) \quad (1 - \xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1 + \xi) \rangle$$

Exemple 03 : Cas de l'élément bidimensionnel triangulaire à trois nœuds TRI3 (linéaire) :

Soit donc l'élément (i) à trois nœuds de type TRI3 dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle qu'elle a été écrite en (8-04), on a :

$$\{U\} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Donc par identification, on obtient :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Exemple 04 : Cas de l'élément bidimensionnel quadrangulaire à quatre nœuds QUA4 (linéaire) :

Soit donc l'élément ( $i$ ) à quatre nœuds de type QUA4 dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle que écrite en (8-04), on a :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Donc par identification, on obtient :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

avec

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \text{ et } N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

### 1.3 Introduction de la matrice $[B]$ reliant le vecteur-déformations $\{\varepsilon\}$ au vecteur-déplacements nodaux $\{U_{n(i)}\}$

La matrice  $[B]$  est définie en introduisant la relation suivante :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-07)$$

Avec  $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle$ , le vecteur déformation en un point M de l'élément réel et  $\{U_{n(i)}\}$  le vecteur-déplacements généralisés de l'élément considéré du maillage.

En 3D, cette matrice  $[B]$  est de taille 6 par  $(3.n)$  avec  $n$  le nombre de nœuds que contient l'élément considéré. Cette matrice est globalement formée avec les termes de la matrice  $[j]$  (qui est l'inverse de la matrice Jacobienne) et les dérivées des fonctions d'interpolations sur l'élément de référence  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ . On rappelle que ces dérivées sont fournies par les tables de définition des

éléments de référence. Le détail de la composition de la matrice  $[B]$  pour certains éléments 1D et 2D, sera traité au paragraphe 03.

Par ailleurs, en appliquant l'opérateur variation  $\delta$  à l'équation (8-07) ci-dessus, on obtient :

$$\{\delta\varepsilon\} = [B].\{\delta U_{n(i)}\} \quad (8-08)$$

Sous une forme transposée, l'équation précédente (8-08) peut s'écrire comme suit :

$$\langle\delta\varepsilon\rangle = \langle\delta U_{n(i)}\rangle[B]^T \quad (8-09)$$

#### 1.4 Matrice de rigidité élémentaire et vecteur force élémentaire

En introduisant la loi de Hooke qui relie les déformations aux contraintes  $\{\sigma\} = [H].\{\varepsilon\}$ , l'expression (8-02) devient :

$$W_{(i)} = - \int_{\Omega_{(i)}} (\langle\delta\varepsilon\rangle.[H].\{\varepsilon\}).d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \langle\delta U\rangle.\{F_V\}d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} \langle\delta U\rangle.\{f_S\}d\Gamma \quad (8-10)$$

Rappelons les trois relations suivantes :

$$\langle\delta\varepsilon\rangle = \langle\delta U_{n(i)}\rangle[B]^T, \quad \{\varepsilon\} = [B].\{U_{n(i)}\} \quad \text{et} \quad \langle\delta U\rangle = \langle\delta U_{n(i)}\rangle[N]^T$$

En remplaçant ces dernières dans (8-10), on obtient l'expression très importante de  $W_{(i)}$  comme suit :

$$W_{(i)} = \langle\delta U_{n(i)}\rangle \left[ - \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T.[H].[B].d\Omega.\{U_{n(i)}\} + \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T.\{F_V\}d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T.\{f_S\}d\Gamma \right] \quad (8-11)$$

En posant :

$$[K_{(i)}] = \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T.[H].[B].d\Omega. \quad (8-12 \text{ a})$$

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T.\{F_V\}d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T.\{f_S\}d\Gamma \quad (8-12 \text{ b})$$

On obtient :

$$W_{(i)} = \langle\delta U_{n(i)}\rangle[-[K_{(i)}].\{U_{n(i)}\} + \{F_{(i)}\}] \quad (8-12 \text{ c})$$

La matrice  $[K_{(i)}]$  est appelée *matrice de rigidité élémentaire* de l'élément  $(i)$ . Pour les éléments à trois degrés de liberté par nœud, cette matrice est de taille  $(3.n)$  par  $(3.n)$ . En élasticité linéaire, cette matrice est toujours symétrique.

Le vecteur  $\{F_{(i)}\}$  est appelé *vecteur force local* pour l'élément  $(i)$ . En présence de forces réparties appliquées entre les nœuds d'un élément (ou sur une face de cet élément), l'expression (8-12b) ci-dessus, permet d'extrapoler ces forces de surfaces en les remplaçant par des forces ponctuelles  $\{F_{(i)}\}$  appliquées au niveau des nœuds. Elles sont également connues sous la nomination de « forces nodales équivalentes ».

## 2 Matrices de rigidités élémentaires et vecteurs forces élémentaires d'un élément barre

Reprenons le cas de l'élément barre tel que traité dans le paragraphe 5 du chapitre précédent, dans lequel la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin avait été établie. Soit le modèle réel de la barre dont le maillage est composé uniquement d'un seul élément à deux nœuds de type SEG2 (voir la figure 01 ci-dessous).

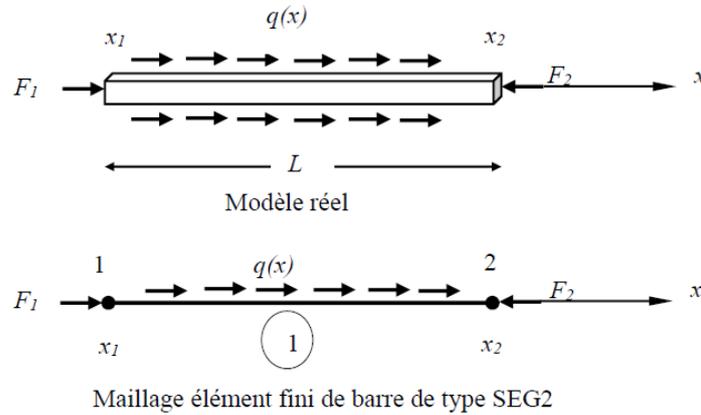


Figure 01 : élément barre à deux nœuds

Puisque le maillage n'est composé que d'un seul élément, l'introduction de celui-ci dans la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin se fait comme suit :

$$W = W_{(1)} = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) + F_1 \cdot \delta u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (8-13)$$

On associe à cet élément réel son élément de référence (figure 02) telle que leur relation s'écrit :

$$x(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

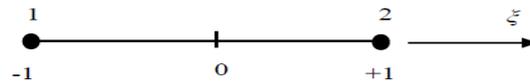


Figure 02 : élément de référence associé

La matrice Jacobienne  $[J]$  étant égale à son déterminant  $\det[J]$ , telle qu'en dérivant totalement  $x(\xi)$  par rapport à  $\xi$ , on obtient :

$$[J] = \det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$

On en déduit que la matrice inverse  $[j]$  s'écrit comme suit

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{2}{L}$$

Or selon le paragraphe 4 du chapitre 03, on a :

$$\frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi}$$

Ceci permet en remplaçant  $\frac{du(x)}{dx}$  par son expression précédente et en calculant les intégrales dans l'élément de référence moyennant le déterminant de la matrice Jacobienne d'écrire :

$$W = W_{(1)} = -E.A. \int_{-1}^{+1} \left[ \delta \left( \frac{2 du(\xi)}{L d\xi} \right) \frac{2 du(\xi)}{L d\xi} \right] \frac{L}{2} d\xi + F_2 \cdot \delta u(1) + F_1 \cdot \delta u(-1) + \int_{-1}^{+1} \delta u(\xi) \cdot q(x(\xi)) \cdot \frac{L}{2} d\xi \quad (8-14)$$

Et d'obtenir après développement :

$$W = W_{(1)} = -\frac{2.E.A}{L} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[ \delta \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] d\xi + F_2 \cdot \delta u(1) + F_1 \cdot \delta u(-1) + \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \delta u(\xi) \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi \quad (8-15)$$

On introduit l'interpolation nodale en interpolant  $u$  dans l'élément de référence telle que :

$$u(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8-16)$$

En dérivant  $u(\xi)$  on obtient :

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \langle \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle -1 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Si on introduit l'opérateur variation  $\delta$  dans les expressions précédentes, on obtient :

$$\delta u(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} (1 - \xi) \\ (1 + \xi) \end{Bmatrix} \quad (8-17)$$

Et

$$\delta \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{1}{2} \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On remarque également que :

$$\delta u(-1) = \delta u_1 \quad \text{et} \quad \delta u(1) = \delta u_2$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$F_1 \delta u(-1) = F_1 \cdot \delta u_1 = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad F_2 \delta u(1) = F_2 \cdot \delta u_2 = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

En remplaçant toutes les expressions précédentes dans (8-15), et en mettant en facteur  $\langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle$ , on obtient :

$$W = W_{(1)} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \left[ -\frac{E.A}{2.L} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \langle -1 \quad 1 \rangle \int_{-1}^{+1} d\xi \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi \right] \quad (8-18)$$

Ainsi, on peut mettre l'expression précédente sous la forme :

$$W = W_{(1)} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \left[ -[K_{(i)}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \{F_{(i)}\} \right] \quad (8-18)$$

Avec

$$[K_{(i)}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi$$

Le terme  $\frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi$  permet de calculer les forces nodales équivalentes à la charge répartie  $q(x)$  le long de la barre.

Par ailleurs, si  $q(x) = q = \text{cste}$ , on retrouve facilement l'expression :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

### 3 Calcul de la matrice $[B]$ pour les éléments les plus utilisés :

#### 3.1 Cas de l'élément unidimensionnel à deux nœuds SEG2 (linéaire):

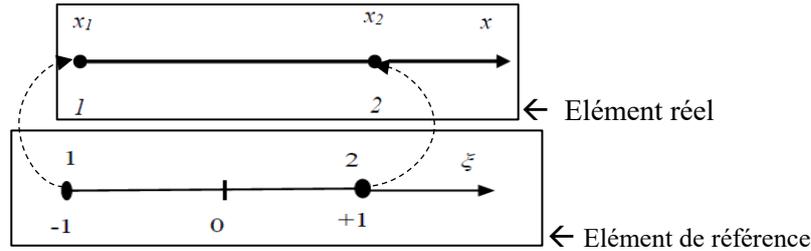


Figure 03 : relation entre élément réel 1D à 2 nœuds (SEG2) et l'élément de référence

Soit l'élément  $(i)$  à deux nœuds tel que représenté sur la figure 03 ci-dessus et dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \rangle$$

Le champ de déplacements étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ce qui implique que dans l'élément de référence, le champ de déformations s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_\xi = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \left\langle \frac{dN_1}{d\xi} \quad \frac{dN_2}{d\xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Par ailleurs, on rappelle que dans l'élément réel, le champ de déformation  $\varepsilon_x$  est comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi}$$

On rappelle que la matrice Jacobienne  $[J]$  est égale à son déterminant  $\det[J]$ , telle que:

$$[J] = \det[J] = \frac{L}{2}$$

La matrice inverse  $[j]$  s'écrivant comme suit

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{2}{L}$$

Donc on déduit que :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi}$$

Si on remplace  $\frac{du(\xi)}{d\xi}$  par son expression ci-dessus, on déduit :

$$\varepsilon_x = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \left\langle \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8-19)$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été définie en (8-04), on a :

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-20)$$

Ainsi, en comparant les deux dernières expressions (8-19) et (8-20) ci-dessus, la matrice  $[B]$  peut être déduite par identification comme suit :

$$[B] = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \quad (8-21)$$

### 3.2 Cas de l'élément unidimensionnel à trois nœuds SEG3 (quadratique) :

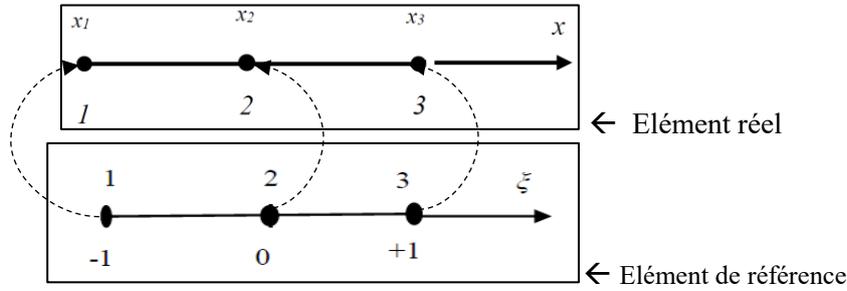


Figure 04 : élément quadratique réel 1D à 3 nœuds (SEG3) et son élément de référence

Soit l'élément  $(i)$  à trois nœuds représenté sur la figure 04 ci-dessus et dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left\langle -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Ce qui implique que dans l'élément de référence, le champ de déformations s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_\xi = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (8-22)$$

Par ailleurs, rappelons la relation entre l'élément réel et l'élément de référence :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \left\langle -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, cette relation s'écrit :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + x_2$$

La matrice Jacobienne  $[J]$  étant égale à son déterminant  $det[J]$ , telle que:

$$[J] = det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) = (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{L}{2}$$

La matrice inverse  $[j]$  s'écrira comme suit

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{det[J]}$$

Donc on déduit que :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{det[J]} \frac{du(\xi)}{d\xi} \quad (8-23)$$

Si on remplace  $\frac{du(\xi)}{d\xi}$  par son expression (8-22) dans l'expression (8-23) ci-dessus, on déduit :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{det[J]} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{det[J]} \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été écrite en (8-04), on a :

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = [B] \cdot \{U_{n(i)}\}$$

Et en comparant les deux dernières expressions ci-dessus, la matrice  $[B]$  peut être obtenue par identification comme suit :

$$[B] = \frac{1}{det[J]} \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle = \left( \frac{1}{(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{L}{2}} \right) \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \quad (8-24)$$

### 3.3 Cas de l'élément triangulaire à trois nœuds TRI3 (linéaire) :

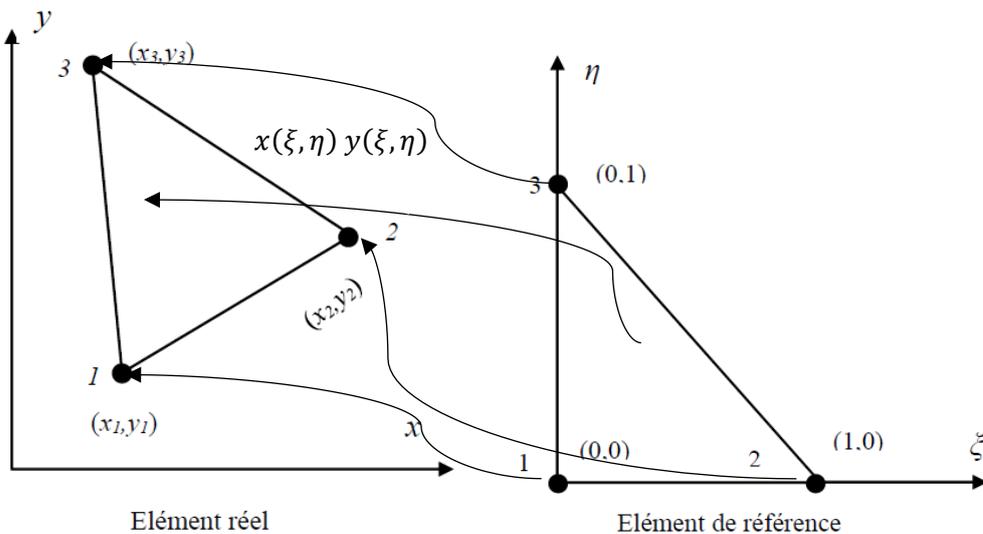


Figure 05 : élément triangulaire réel 2D à 3 nœuds (TRI3) et son élément de référence

Soit l'élément (i) triangulaire à trois nœuds tel que représenté sur la figure 05 ci-dessus et dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

On définit dans l'élément de référence, le champ de déformations comme suit :

$$\{\varepsilon_{(\xi, \eta)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-25)$$

Or les fonctions d'interpolations et leurs dérivées partielles sont comme suit :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, & N_2(\xi, \eta) &= \xi & \text{et} & & N_3(\xi, \eta) &= \eta \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1 \\ \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 1 \end{aligned}$$

En les remplaçant dans l'expression (8-25) précédente, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-26)$$

Par ailleurs, la matrice Jacobienne  $[J]$  de l'élément triangulaire TRI3 étant connue (voir chapitre 05) telle que:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad \text{et} \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

Avec  $\det[J] = x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21} = 2A$  où A est l'aire du triangle

La matrice inverse  $[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix}$

peut être utilisée comme suit (voir paragraphe 4 chapitre 03) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{cases} = [j] \begin{cases} \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{cases} = [j] \begin{cases} \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{cases} \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases}$$

En développant cette écriture matricielle, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( y_{31} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + y_{12} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( x_{13} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + x_{21} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( y_{31} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} + y_{12} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( x_{13} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} + x_{21} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \end{cases} \quad (8-27)$$

Par ailleurs, le vecteur-déformations  $\langle \varepsilon \rangle$  dans l'élément réel est connu par ses composantes suivantes :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle = \left\langle \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \right\rangle$$

Si on remplace ces composantes par leurs expressions établies en (8-27), on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \\ x_{13} & x_{21} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases} \quad (8-27)$$

D'autre part, en remplaçant le vecteur  $\left\langle \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right\rangle$  par son expression établie en (8-26) dans (8-27), on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \\ x_{13} & x_{21} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{cases} \quad (8-28)$$

Finalement, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-29)$$

En tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été introduite en (8-04), dans laquelle on a :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-30)$$

En comparant les deux dernières expressions ci-dessus (8-29) et (8-30), la matrice  $[B]$  peut être déduite par identification comme suit :

$$[B] = \frac{1}{(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21})} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (8-31)$$

On remarque dans (8-31) que les termes de la matrice  $[B]$  sont constants et ne dépendent que des coordonnées des nœuds. Ce qui permet de constater que le champ de déformations (et donc de contraintes) est constant à l'intérieur de l'élément triangulaire TRI3.

#### 4 Matrice de rigidité d'un élément triangulaire en contraintes planes :

Reprenons l'élément triangulaire TRI3 de la figure 05 ci-dessus d'épaisseur  $t$ , de module de Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et d'aire  $A$ . Cet élément se trouvant dans un état de contraintes planes en comportement élastique, la relation de Hooke contraintes-déformations est comme suit :

$$\{\sigma\} = [H_{CP}] \cdot \{\varepsilon\}$$

Avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (8-32)$$

Comme déjà vu dans le paragraphe (1-4) plus haut, le calcul de la matrice de rigidité de cet élément fini se fera en appliquant la formule de l'expression (8-12a) en 2D sous un état de contraintes planes :

$$[K_{(i)}] = \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T \cdot [H_{CP}] \cdot [B] \cdot d\Omega. \quad (8-33)$$

En effet, la matrice  $[B]$  ayant déjà été calculée dans l'exemple 03 précédent, la matrice  $[H_{CP}]$  étant rappelée dans (8-32), il suffit donc de remplacer ces deux matrices par leurs expressions respectives dans (8-33) pour obtenir :

$$[K_{(i)}] = \frac{E}{(1-\nu^2)(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21})^2} \int_{\Omega_{(i)}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} d\Omega$$

En faisant sortir tous les termes constants de l'intégrale, on obtient :

$$[K_{(i)}] = \frac{E}{(1-\nu^2)(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21})^2} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \int_{\Omega_{(i)}} d\Omega$$

Puisque  $\int_{\Omega_{(i)}} d\Omega = A \cdot t =$  volume total de l'élément, et  $(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}) = 2A$ , on aura finalement :

$$[K_{(i)}] = \frac{t \cdot E}{4 \cdot A \cdot (1-\nu^2)} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Après calculs, on obtient finalement la matrice de rigidité élémentaire suivante :

$$[K_{(i)}] = M \cdot \begin{bmatrix} (y_{23}^2 + C \cdot x_{32}^2) & (\nu \cdot y_{23} \cdot x_{32} + C \cdot x_{32} \cdot x_{13}) & (y_{23} \cdot y_{31} + C \cdot x_{32} \cdot x_{13}) & (\nu \cdot y_{23} \cdot x_{13} + C \cdot x_{32} \cdot y_{31}) & (y_{23} \cdot y_{12} + C \cdot x_{32} \cdot x_{21}) & (\nu \cdot y_{23} \cdot x_{21} + C \cdot x_{32} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & x_{32}^2 + C \cdot y_{23}^2 & (\nu \cdot x_{32} \cdot y_{31} + C \cdot y_{23} \cdot x_{13}) & (x_{32} \cdot x_{13} + C \cdot y_{23} \cdot y_{31}) & (\nu \cdot x_{32} \cdot y_{12} + C \cdot y_{23} \cdot x_{21}) & (x_{32} \cdot x_{21} + C \cdot y_{23} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & y_{31}^2 + C \cdot x_{13}^2 & (\nu \cdot y_{31} \cdot x_{13} + C \cdot x_{13} \cdot y_{31}) & (y_{31} \cdot y_{12} + C \cdot x_{13} \cdot x_{21}) & (\nu \cdot y_{31} \cdot x_{21} + C \cdot x_{13} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & x_{13}^2 + C \cdot y_{13}^2 & (\nu \cdot x_{13} \cdot y_{12} + C \cdot y_{31} \cdot x_{21}) & (x_{13} \cdot x_{21} + C \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & y_{12}^2 + C \cdot x_{21}^2 & (\nu \cdot y_{12} \cdot x_{21} + C \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & x_{21}^2 + C \cdot y_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$M = \frac{t \cdot E}{4 \cdot A(1-\nu^2)} \quad A = \frac{x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}}{2} \quad \text{et} \quad C = \frac{1-\nu}{2}$$

## 5 Calcul de forces nodales équivalentes à des charges réparties :

L'expression (8-12b) permettant de calculer les forces nodales équivalentes à des charges réparties est rappelée ci-dessous :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

Dans ce qui suit, nous allons voir quelques cas d'applications pratiques de cette expression.

### 5.1 Charges nodales équivalentes à des forces de volume-cas de l'élément barre 1D :

On considère une barre de longueur L et de section transversale d'aire A et de poids spécifique  $\gamma (= \rho \cdot g)$  ( $\rho$  et  $g$  étant respectivement la masse volumique et l'accélération de la pesanteur). Cette barre est définie le long de l'axe  $x$ . Elle est située entre les points d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$  et maillée avec un seul élément de barre de type SEG2 (linéaire à deux nœuds). Disposée verticalement, cette barre est soumise à des forces de volume dues à son poids propre dont la résultante est égale à son poids total

$$P_T = \gamma \cdot A \cdot L$$

Vu l'absence de forces de surfaces  $\{f_S\} = \{0\}$ , l'expression (8-12b) se trouve réduite à :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega$$

Pour l'élément barre à deux nœuds, la matrice  $[N]$  (voir exemple 01 paragraphe 1.2 ci-dessus) s'écrit :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle$$

Pour leur part, les forces par unité de volume  $\{F_V\} = \gamma = \rho \cdot g$

En remplaçant  $[N]$  et  $\{F_V\}$  par leurs expressions respectives, on peut écrire :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot d\Omega$$

Or

$$d\Omega = A \cdot dx$$

Donc

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot dx$$

Moyennant le déterminant du Jacobien, on peut écrire :

$$dx = \det[J] \cdot d\xi = \frac{L}{2} \cdot d\xi$$

Ainsi, le calcul de cette intégrale dans l'élément de référence sera comme suit :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot A}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot d\xi = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{4} \begin{Bmatrix} \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \xi + \frac{\xi^2}{2} \end{Bmatrix}_{-1}^{+1} = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{2} \\ \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_T}{2} \\ \frac{P_T}{2} \end{Bmatrix}$$

L'interprétation physique de ce résultat consiste à remplacer le poids propre uniformément répartie dans la barre par deux forces nodales équivalentes dont l'intensité de chacune est égale à la moitié du poids total de la barre  $P_T$ .

## 5.2 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire TRI3 :

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t=3mm$  et modélisée dans l'espace  $(x,y)$  en 2D par un maillage composé d'un seul élément triangulaire à trois nœuds de type TRI3 dont les coordonnées sont affichées en centimètres (figure 06).

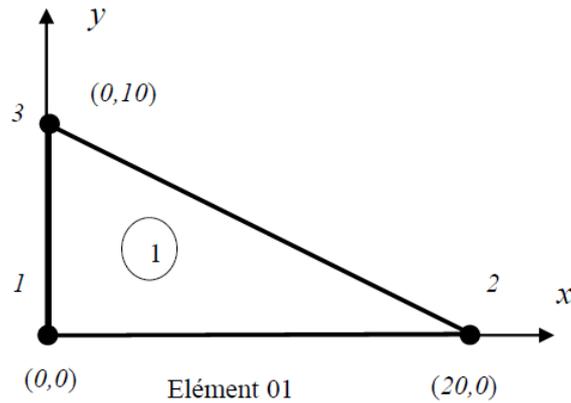


Figure 06 : paroi métallique mince de forme triangulaire

Cette paroi subit des pressions uniformes sur le côté 1-2 égales à  $p=50$  MPa. Calculer les forces nodales équivalentes à cette pression. Le poids propre de cette plaque est considéré comme négligeable.

**Solution**

Notre plaque étant modélisée en état bidimensionnel de contraintes planes avec un maillage composé d'un seul élément. Les coordonnées des nœuds étant mentionnées en cm sur la figure 06 ci-dessus, la résultante des forces de pression exercées sur le côté 1-2 est égale à :

$$R_T = p \cdot L_{1-2} \cdot t = 5 \times 20 \times 0.3 = 30 \text{ KN}$$

Vu l'absence de forces de volume  $\{F_V\} = \{0\}$ , le calcul des forces nodales équivalentes consiste à utiliser l'expression (8-12b) qui se trouve réduite à :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma \quad \text{avec} \quad \langle F_{(i)} \rangle = \langle F_{1x} \quad F_{1y} \quad F_{2x} \quad F_{2y} \quad F_{3x} \quad F_{3y} \rangle$$

On associe cet élément réel à son élément de référence (figure 07). On rappelle que la matrice  $[N]$  a été introduite grâce à la relation :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\}$$

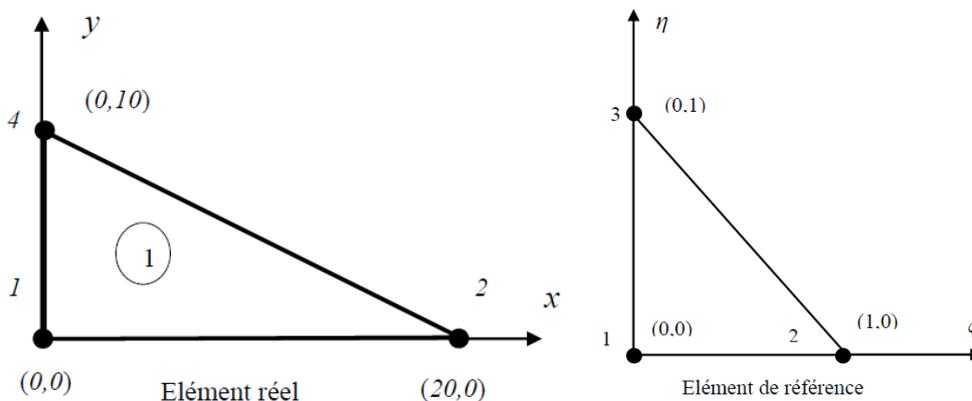


Figure 07 : Représentation de l'élément triangulaire réel 1 et de son élément de référence associé

Avec

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

Telle que :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Et

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Concernant le vecteur  $\{f_S\}$  représentant les forces par unité de surface, on peut écrire :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

$p$  : étant la pression exercée

Si on remplace la matrice  $[N]^T$  et le vecteur  $\{f_S\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{F(i)}} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = p \cdot \oint_{\Gamma_{F(i)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi - \eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} d\Gamma$$

Or  $\Gamma_{F(i)} = t \cdot (L_{1-2})$  car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-2 d'épaisseur  $t$ . Ce côté 1-2 est porté par l'axe  $x$  dans l'élément réel donc  $d\Gamma = t \cdot dx$

On peut donc écrire :

$$\{F_{(i)}\} = p \cdot t \cdot \oint_{L_{1-2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi - \eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} dx$$

Pour pouvoir intégrer dans l'élément de référence, il va falloir retrouver la relation  $x(\xi, \eta)$  qui nous permettra par la suite de remplacer  $dx$  par  $d\xi$  dans l'intégrale ci-dessus.

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement :

$$x(\xi, \eta) = (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + x_1 = (20 - 0)\xi + (0 - 0)\eta + 0 = 20\xi$$

Finalement :

$$x(\xi, \eta) = 20\xi \quad \text{ce qui implique que } dx = 20 \cdot d\xi$$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté  $L_{1-2}$  de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $\eta = 0$ . D'où l'intégrale :

$$\{F_{(i)}\} = 20 \cdot p \cdot t \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi \\ \xi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi = 20 \cdot p \cdot t \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \frac{\xi^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_0^1 = 20 \cdot p \cdot t \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{1^2}{2} \\ \frac{1^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 20 \cdot p \cdot t \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \cdot p \cdot t \\ 0 \\ 10 \cdot p \cdot t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'interprétation de ce résultat consiste en l'égale répartition de la résultante totale  $R_T$  sur les deux nœuds du bord chargé de la plaque. Ces deux forces sont donc les forces nodales équivalentes aux forces par unité de surface (ou pressions) appliquées sur un coté de cette plaque (figure 08 ci-dessous).

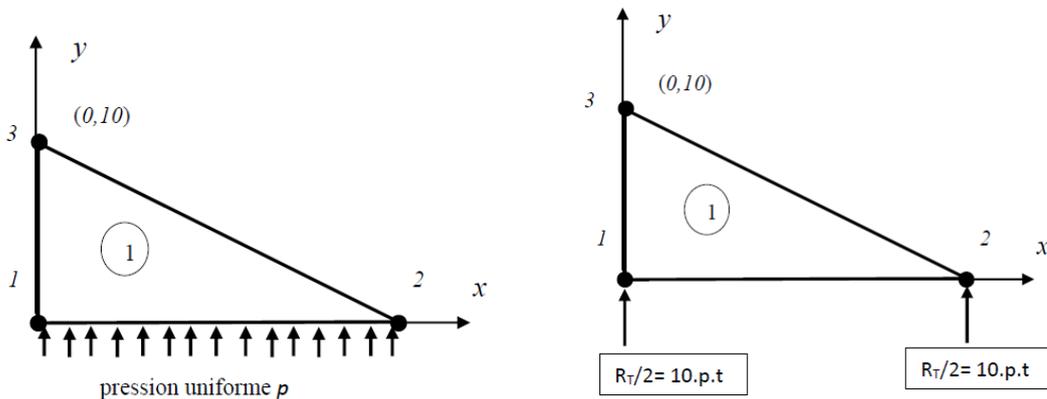


Figure 08 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds d'un triangle TRI3 d'épaisseur  $t$

### 5.3 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI3 adjacents :

En général, les maillages sont souvent composés de plusieurs éléments. En particulier, les zones situées aux frontières du maillage et soumises aux forces surfaciques extérieures sont également composées de plusieurs éléments adjacents. Il serait donc intéressant d'analyser la distribution sur ces frontières de ces forces nodales équivalentes à ces forces surfaciques et, par la suite, de les comparer.

A cet effet, considérons une plaque rectangulaire de longueur  $L$  et de faible épaisseur  $t$ . Cette plaque est modélisée en état bidimensionnel de contraintes planes avec un maillage composé d'éléments triangulaires linéaires de type TRI3. Cette plaque est soumise à des contraintes uniformes de compression  $p$  sur son côté longitudinal (figure 09 ci-dessous). De longueur constante et égale à  $(L/4)$ , chaque côté des quatre éléments est soumis à cette compression uniforme. Ainsi, la résultante des contraintes agissant sur chaque triangle est égale à  $(p \cdot t \cdot L/4)$ . L'extrapolation donne pour chaque triangle une égale répartition de cette résultante sur ses deux nœuds tel que chaque nœud du triangle recevra la moitié c'est-à-dire une force nodale égale à  $(p \cdot t \cdot L/8)$  (figure 10). Lorsqu'on additionne ces

forces nodales lors de l'assemblage du vecteur force global, on obtient le résultat illustré sur le maillage de la figure 11 ci-dessous.

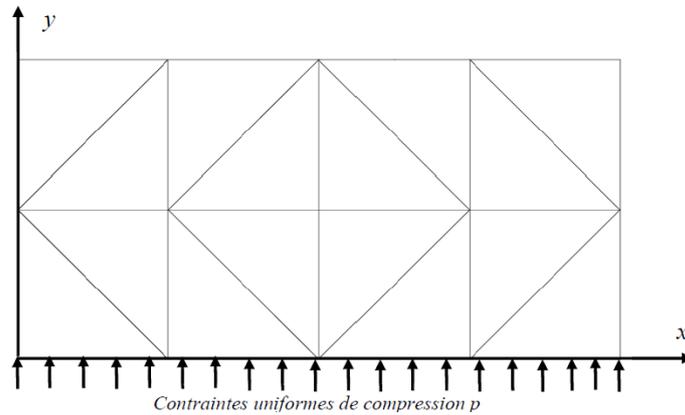


Figure 09 : plaque maillée avec des éléments TRI3, de longueur  $L$  et d'épaisseur  $t$  et soumise à des contraintes de compression uniformes

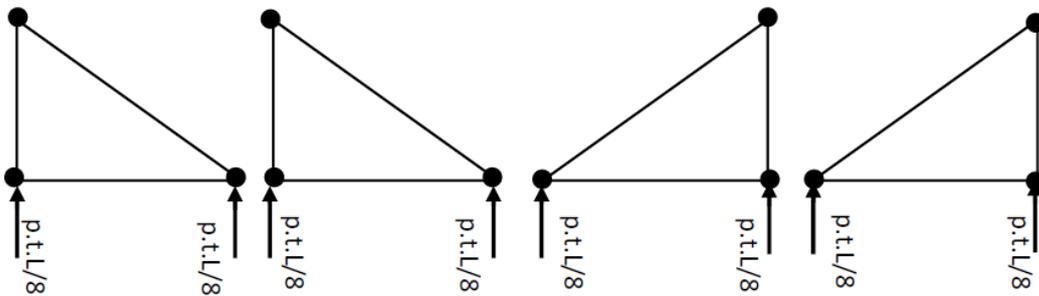


Figure 10 : Résultat de la première étape de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds à l'intérieur de chaque triangle TRI3

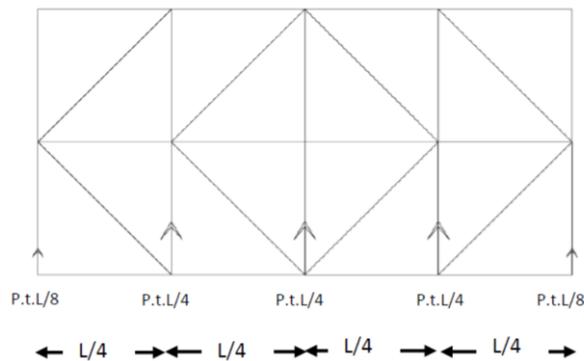


Figure 11 : Résultat de calcul après l'assemblage du vecteur forces globales

Ainsi, en observant les figures précédentes, on constate que la pression répartie de manière uniforme, se transforme en un ensemble de forces égales uniquement au niveau des nœuds intermédiaires. Les nœuds extrêmes reprennent la moitié des forces nodales appliquées au niveau des nœuds intermédiaires. Ce résultat concerne les éléments linéaires de degré 1. Qu'en est-il de la distribution des forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur les frontières des éléments de degré 2 (quadratiques) ? C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

#### 5.4 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire quadratique TRI6 :

Reprenons l'exemple du paragraphe 5.2 de la paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t=3mm$  et modélisée cette fois par un maillage composé d'un élément triangulaire quadratique à six nœuds de type TRI6 (figure 12). Si on applique la formule d'extrapolation des efforts répartis que nous rappelons ci-dessous, on trouve (figure 12 à droite) comme résultat que la résultante  $R_T$  ne se partage pas entre les nœuds de manière uniforme (voir exercice 03 ci-dessous). En effet, on constate que le nœud intermédiaire reprend les deux tiers de cette résultante  $R_T$  alors que les deux nœuds extrêmes reprennent chacun un sixième de  $R_T$ .

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

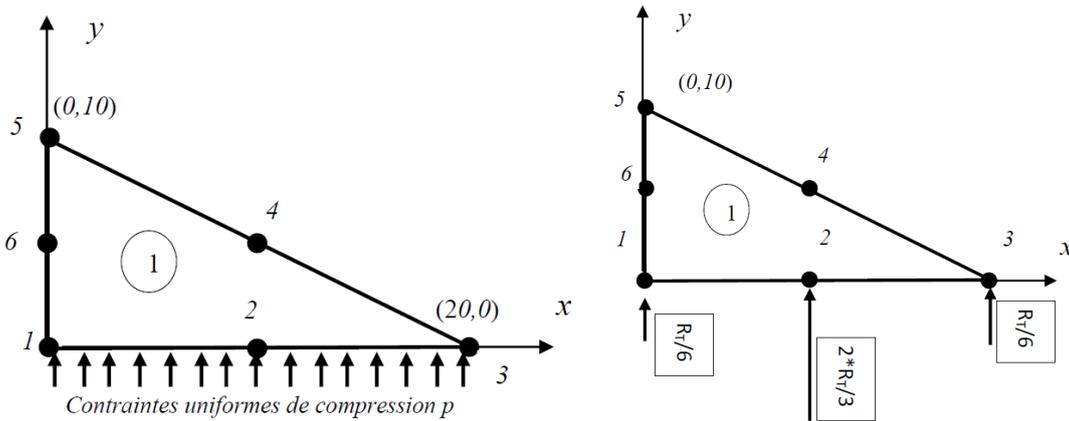


Figure 12 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds d'un triangle TRI6 d'épaisseur  $t$

### 5.5 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI6 adjacents :

Concernant le cas de plusieurs éléments quadratiques (dans notre cas triangulaires de type TRI6) adjacents et soumis à une pression uniforme, reprenons le cas de la plaque rectangulaire du paragraphe 5.3. Cette plaque est cette fois modélisée en état bidimensionnel de contraintes planes avec un maillage composé d'éléments triangulaires quadratiques de type TRI6. Soumise à des contraintes uniformes de compression  $p$  sur son côté longitudinal (figure 09 ci-dessus), chaque côté des quatre triangles est donc soumis à cette compression uniforme dont la résultante (agissant sur chaque triangle) est égale à  $(R_T=p.t.L/4)$ . Comme déjà vu dans le paragraphe précédent 5.4, Les calculs d'extrapolation ont donné pour chaque triangle une répartition non uniforme de cette résultante telle que les deux nœuds extrêmes reçoivent chacun  $(R_T/6)$  alors que le nœud intermédiaire reçoit une force nodale égale à  $(2 * R_T/3)$  (figure 13). Lorsqu'on additionne ces forces nodales lors de l'assemblage du vecteur force global, on obtient le résultat illustré sur le maillage de la figure 14 ci-dessous. Ainsi, on constate que plus on augmente le degré d'interpolation de nos éléments, plus l'allure de la distribution des forces nodales s'éloigne de l'allure réelle et uniforme de la distribution de la pression surfacique. Ce qui constitue un inconvénient.

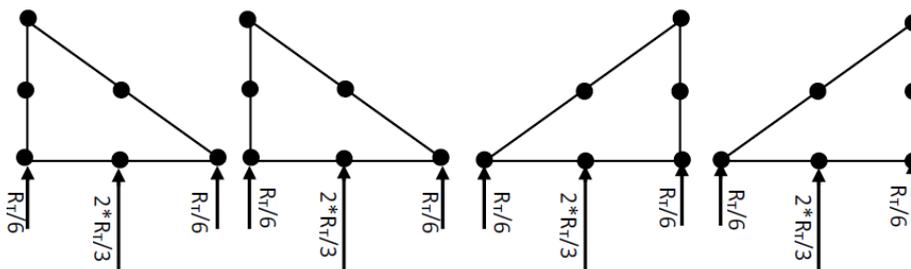


Figure 13 : Résultat de la première étape de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds à l'intérieur de chaque triangle TRI6

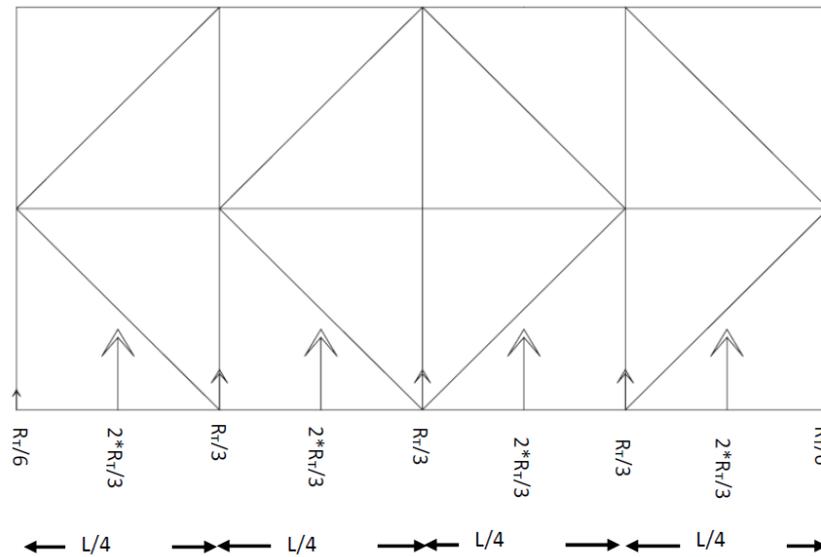


Figure 14 : Résultat des calculs après l'assemblage du vecteur forces globales

## 6 Calculs en état bidimensionnel de déformations planes : cas de la modélisation d'une digue de barrage d'eaux avec un élément triangulaire TRI3

Soit la digue en béton du barrage poids d'Oued-Fodda (wilaya de Chlef Algérie) de 190 m de longueur. La coupe transversale de cette digue présente une forme triangulaire avec une hauteur  $h=101\text{m}$  et une base en fondations  $b=68\text{ m}$  (figure 15). Dans le cadre d'un calcul préliminaire en état bidimensionnel 2D de déformations planes, on désire modéliser cette digue en comportement élastique avec un maillage composé d'un seul élément fini linéaire de type TRI3. Il est demandé de :

- 1- Calculer les forces nodales équivalentes au poids propre de cette digue
- 2- Calculer les forces nodales équivalentes aux pressions hydrostatiques exercées par les eaux retenues par cette digue.
- 3- Calculer la matrice de rigidité de cette digue
- 4- Le nœud 1 (appelé « talon ») étant bloqué uniquement en déplacement vertical ( $u_{y1}=0$ ) et le nœud 2 étant bloqué suivant les deux directions ( $u_{x2}=u_{y2}=0$ ), calculer le vecteur déplacement en crête du nœud 3 ( $u_{x3}=?$  et  $u_{y3}=?$ ) ainsi que le déplacement horizontal ( $u_{x1}=?$ )

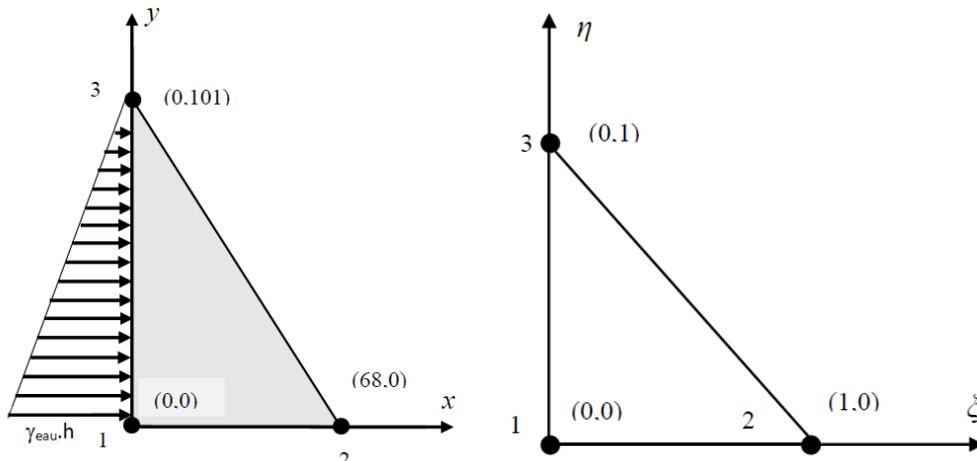


Figure 15 : Modélisation de la digue du barrage de Oued-Fodda soumise à une pression hydrostatique par un élément TRI3 (à gauche) associé à son élément de référence (à droite)

**Solution :**

1- Le Calcul des forces nodales équivalentes  $\{F_{(i)}\}$  au poids propre de la digue se fera selon l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega$$

Avec  $\langle F_{(i)} \rangle = \langle F_{1x} \ F_{1y} \ F_{2x} \ F_{2y} \ F_{3x} \ F_{3y} \rangle$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Concernant le vecteur  $\{F_V\}$  représentant le poids volumique (ou spécifique) de la digue, celui-ci possède deux composantes :

- Une composante nulle selon la direction horizontale ou bien l'axe x
- Une composante verticale portée par l'axe y égale à  $\gamma_b = 25 \text{ KN/m}^3$  mais dirigée vers le bas en sens contraire de l'orientation positive de l'axe y

Par conséquent :

$$\{F_V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

Dans l'élément de référence, le calcul de  $\{F_{(i)}\}$  est donc comme suit :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{A_{réf}} [N]^T \cdot \{F_V\} \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Les composantes de  $\{F_V\}$  étant constantes, l'écriture du vecteur  $\{F_V\}$  reste inchangée aussi bien dans l'élément réel que de référence.

La matrice Jacobienne  $[J]$  et son déterminant sont comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = b \cdot h = 101 * 68 = 6868 \text{ m}^2$$

Si on remplace la matrice  $[N]^T$ ,  $\det[J]$  et le vecteur  $\{f_v\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \int_{A_{réf}} [N]^T \cdot \{F_V\} \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta = b \cdot h \int_{A_{réf}} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma_b \end{Bmatrix} d\xi \cdot d\eta$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

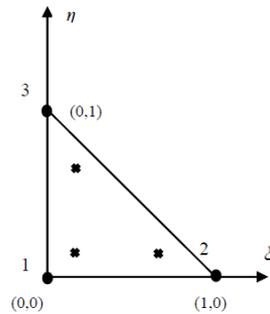
$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = -\gamma_b \cdot b \cdot h \int_{A_{réf}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi - \eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} d\xi \cdot d\eta$$

Pour calculer l'intégrale ci-dessus dans l'élément de référence, on applique la méthode de quadrature de Gauss-Legendre. Les polynômes à intégrer  $(1 - \xi - \eta)$ ,  $\xi$  et  $\eta$  étant tous de degré 1, le choix d'un schéma d'intégration à trois points de Gauss  $r=3$  correspondant à la figure 3-c du tableau 02 du chapitre 06 (et qui est reproduit dans la figure ci-dessous) et dont l'ordre  $m=2$  vérifie la condition  $m \geq i+j$  donc  $m \geq 1$ . On rappelle que :

le premier point de Gauss est de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{6}$  avec un coefficient poids  $w_1 = \frac{1}{6}$

le second point de Gauss est de coordonnées  $\xi_2 = \frac{2}{3}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{6}$  avec un coefficient poids  $w_2 = \frac{1}{6}$

le troisième point de Gauss est de coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{6}$  et  $\eta_3 = \frac{2}{3}$  avec un coefficient poids  $w_3 = \frac{1}{6}$



Ainsi, on peut calculer les intégrales ci-dessus comme suit :

$$\iint_{A_{réf}} (1 - \xi - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot (1 - \xi_1 - \eta_1) + w_2 \cdot (1 - \xi_2 - \eta_2) + w_3 \cdot (1 - \xi_3 - \eta_3)$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 - \xi - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\iint_{A_{réf}} \xi \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \xi_1 + w_2 \cdot \xi_2 + w_3 \cdot \xi_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\iint_{A_{réf}} \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \eta_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Finalement

$$\{F_{(i)}\} = -\gamma_b \cdot b \cdot h \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, sachant que le poids total résultat d'un tronçon de digue de longueur unité est égal à

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot \gamma_b \cdot b \cdot h \cdot 1$$

On constate que les calculs ont donné une égale répartition du poids total sur les trois nœuds. L'explication de ce résultat, qui semble irréaliste, réside dans le fait d'avoir utilisé un maillage très grossier composé uniquement d'un seul élément fini de type TRI3 et de degré 1.

2- Le calcul des forces nodales équivalentes aux pressions hydrostatiques exercées par les eaux en amont de la digue, consiste à utiliser l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

La matrice  $[N]$  ayant déjà été introduite dans la question précédente, quant au vecteur  $\{f_S\}$ , celui-ci possède deux composantes :

- Une première composante horizontale (selon l'axe  $x$ ) non nulle et dépendant de  $y$  telle que :  
 $f_{sx} = \gamma_{eau} \cdot (h - y)$  avec  $\gamma_{eau} = 10 \text{ KN/m}^3$
- Une seconde composante verticale (selon l'axe  $y$ ) nulle telle que :  $f_{sy} = 0$

Ainsi

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{eau} \cdot (h - y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \cdot (101 - y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, pour calculer  $\{F_{(i)}\}$  dans l'élément de référence, on doit trouver l'expression de la relation suivante :

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i = (1 - \xi - \eta) \cdot y_1 + \xi \cdot y_2 + \eta \cdot y_3 = 0 + 0 + \eta \cdot h$$

Donc

$$y(\xi, \eta) = h \cdot \eta \Rightarrow dy = h \cdot d\eta$$

Ainsi  $\{f_S\}$  s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{eau} \cdot (h - h \cdot \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \begin{Bmatrix} (1 - \eta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si on remplace la matrice  $[N]^T$  et le vecteur  $\{f_S\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \oint_{\Gamma_{F(i)}} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1 - \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma$$

Or  $\Gamma_{F_{(i)}} = e \cdot (L_{1-3}) = 1 \cdot (L_{1-3})$  car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-3 d'épaisseur *unité* ( $e=1m$ ). Ce côté 1-3 est porté par l'axe  $y$  dans l'élément réel. On peut donc intégrer dans l'élément de référence en remplaçant  $dy$  par  $(h \cdot d\eta)$  tel que :

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \oint_{L_{1-3}} \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} dy = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} h \cdot d\eta$$

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta$$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté  $L_{1-3}$  de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à  $0 \leq \eta \leq 1$  et  $\xi = 0$ . D'où en remplaçant  $\xi$  par sa valeur, cette intégrale devient :

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1-2\eta+\eta^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta-\eta^2 \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta$$

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \begin{Bmatrix} \eta - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} \\ 0 \end{Bmatrix}_0^1 = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ce résultat montre qu'en utilisant l'élément linéaire TRI3 que le nœud 1 (dit talon de la digue) reprend une force nodale équivalente d'intensité égale à  $F_1 = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{3}$ , tandis que le nœud 3 (sommet ou crete de la digue) reprend une force nodale équivalente d'intensité égale à  $F_3 = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{6}$  (figure 16 ci-dessous).

On voit bien que la somme des deux forces nodales  $F_1$  et  $F_3$  est égale à la résultante des pressions hydrostatiques  $R_T = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{2}$

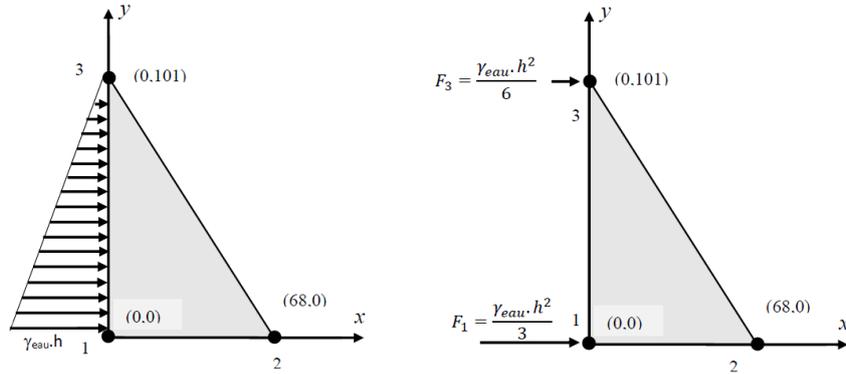


Figure 16-a : Forces nodales équivalentes (à droite) à une pression hydrostatique exercées sur la paroi verticale de la digue (à gauche).

3- La Matrice de rigidité de cette digue se calcule en état bidimensionnel de déformations planes selon la formule de l'expression (8-12a) telle que :

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T \cdot [H_{DP}] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (8-34)$$

La matrice de raideur reliant les contraintes aux déformations est issue de la relation en état de déformations planes :

$$\{\sigma\} = [H_{DP}] \cdot \{\varepsilon\}$$

Avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{DP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8-35)$$

et  $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

Sachant que le module d'élasticité transversale

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et en posant } a = 1 - \nu \text{ et } b = \frac{(1-2\nu)}{2}, \text{ la matrice } [H_{DP}] \text{ s'écrit :}$$

$$[H_{DP}] = \frac{G}{b} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

En effet, la matrice  $[B]$  ayant déjà été calculée dans l'exemple 03 du paragraphe 03 ci-dessus, la matrice  $[H_{DP}]$  étant rappelée dans (8-35), il suffit donc de remplacer ces deux matrices par leurs expressions respectives dans (8-34) pour obtenir :

$$[K_{(1)}] = \frac{G}{bA^2} \int_{\Omega_{(1)}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} d\Omega$$

En faisant sortir tous les termes constants de l'intégrale, on obtient :

$$[K_{(i)}] = \frac{G}{b \cdot A^2} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \int_{\Omega_{(i)}} d\Omega$$

Puisque  $\int_{\Omega^{(i)}} d\Omega = A \cdot e = \text{volume de l'élément considéré, et puisque on considère uniquement un tronçon de longueur unité tel que } e = 1m, \text{ on aura la matrice de rigidité de la digue par unité de longueur :}$

$$[K_{(i)}] = \frac{G \cdot 1}{b \cdot A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & v & 0 \\ v & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Après calculs, on obtient finalement la matrice de rigidité élémentaire symétrique suivante :

$$[K_{(i)}] = \frac{G}{b \cdot A} \begin{bmatrix} (ay_{23}^2 + bx_{32}^2) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{32} + b \cdot x_{32} \cdot y_{23}) & (a \cdot y_{23} \cdot y_{31} + b \cdot x_{32} \cdot x_{13}) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{13} + b \cdot x_{32} \cdot y_{31}) & (a \cdot y_{23} \cdot y_{12} + b \cdot x_{32} \cdot x_{21}) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{21} + b \cdot x_{32} \cdot y_{12}) \\ sym & (a \cdot x_{32}^2 + b \cdot y_{23}^2) & (v \cdot x_{32} \cdot y_{31} + b \cdot y_{23} \cdot x_{13}) & (a \cdot x_{32} \cdot x_{13} + b \cdot y_{23} \cdot y_{31}) & (v \cdot x_{32} \cdot y_{12} + b \cdot y_{23} \cdot x_{21}) & (a \cdot x_{32} \cdot x_{21} + b \cdot y_{23} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & (a \cdot y_{31}^2 + b \cdot x_{13}^2) & (v \cdot y_{31} \cdot x_{13} + b \cdot x_{13} \cdot y_{31}) & (a \cdot y_{31} \cdot y_{12} + b \cdot x_{13} \cdot x_{21}) & (v \cdot y_{31} \cdot x_{21} + b \cdot x_{13} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & sym & (a \cdot x_{13}^2 + b \cdot y_{31}^2) & (v \cdot x_{13} \cdot y_{12} + b \cdot y_{31} \cdot x_{21}) & (a \cdot x_{13} \cdot x_{21} + b \cdot y_{31} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & sym & sym & (a \cdot y_{12}^2 + b \cdot x_{21}^2) & (v \cdot y_{12} \cdot x_{21} + b \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & sym & sym & sym & (a \cdot x_{21}^2 + b \cdot y_{12}^2) \end{bmatrix}$$

AN :

Si on adopte comme valeurs de propriétés matérielles du béton  $E = 30 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.2$ , on aura

$$G = 12.5 \text{ GPa} = \frac{12.5 \cdot 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} = 12.5 \cdot 10^6 \text{ KN/m}^2, \quad a = 1 - 0.2 = 0.8 \text{ et } b = \frac{(1 - 2 \cdot 0.2)}{2} = 0.3$$

L'aire de la coupe transversale de la digue étant  $A = 68 \cdot \frac{101}{2} = 3434 \text{ m}^2$

Ainsi, la matrice symétrique de rigidité  $[K_{(1)}]$  s'écrit dans le système d'équations à résoudre comme suit:

$$\frac{12,5 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0.3 \cdot 3434} \begin{bmatrix} 9,548 & 3,434 & -8,1608 & -2,0604 & -1,3872 & -1,3736 \\ sym & 6,7595 & -1,3736 & -3,0603 & -2,0604 & -3,6992 \\ sym & sym & 8,1608 & 0,00 & 0,00 & 1,3736 \\ sym & sym & sym & 3,0603 & 2,0604 & 0,00 \\ sym & sym & sym & sym & 1,3872 & 0,00 \\ sym & sym & sym & sym & sym & 3,6992 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

4- Le nœud 1(ou bien le talon) étant bloqué uniquement en déplacement vertical ( $v_1 = 0$ ) et le nœud 2 étant bloqué selon les deux directions ( $u_2 = v_2 = 0$ ), calculer les composantes du vecteur-déplacements en crête du nœud 3 ( $u_3 = ?$  et  $v_3 = ?$ ) ainsi que le déplacement horizontal ( $u_1 = ?$ ) du nœud 1 (enfouissement horizontal du talon sous l'effet de la pression hydrostatique)

La détermination de ces déplacements exige la résolution du système d'équations précédent :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

Avec  $[K] = [K_{(1)}]$  car notre digue est maillée avec un seul élément TRI3

et  $\{U\} = \langle u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \rangle$  et  $\{F\} = \langle F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3} \rangle$

En tenant compte des conditions de blocage des nœuds citées ci-dessus telles que :  $v_1 = u_2 = v_2 = 0$ , donc les valeurs non nulles qui restent inconnues à déterminer sont  $u_1, u_3$  et  $v_3$ .

Ainsi le vecteur  $\{U\}$  s'écrit :  $\{U\} = \langle u_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ u_3 \ v_3 \rangle$ .

Par ailleurs, aux degrés de liberté des nœuds bloqués, correspondent des réactions d'appuis non nulles qui sont également des inconnues à déterminer  $F_{y1}$ ,  $F_{x2}$  et  $F_{y2}$ .

Pour leur part,  $F_{x1}$  et  $F_{x3}$  représentent les forces nodales équivalentes à la poussée hydrostatique des eaux qui a été calculée (en prenant  $\gamma_{eau} = 9.81 \text{ KN/m}^3$ ) dans la question 02 ci-dessus et dont les valeurs sont :

$$F_{x1} = F_{tal} = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{3} = \frac{9.81 \cdot 101^2}{3} = 3,336 \cdot 10^4 \text{ KN} = 33360 \text{ KN}$$

$$F_{x3} = F_{cre} = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{6} = \frac{9.81 \cdot 101^2}{6} = 1,6679 \cdot 10^4 \text{ KN} = 16679 \text{ KN}$$

On applique également les forces nodales équivalentes verticale notées ici  $F_{NV}$  vers le bas (avec un signe négatif) dues au poids propres répartis de la digue telle qu'elles ont été déterminées dans la question 01 ci-dessus avec (en prenant comme poids spécifique du béton  $\gamma_b = 25 \text{ KN/m}^3$ ) :

$$F_{NV} = \frac{1}{6} * \gamma_b * base * hauteur = \frac{1}{6} * 25 * 68 * 101 = 2,8617 \cdot 10^4 \text{ KN} = 28617 \text{ KN}$$

Finalement le vecteur  $\langle F \rangle$  s'écrit :

$$\langle F \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \rangle = \langle F_{tal} \quad (F_{y1} - F_{NV}) \quad F_{x2} \quad (F_{y2} - F_{NV}) \quad F_{cre} \quad -F_{NV} \rangle$$

AN :

$$\langle F \rangle = 10^4 \langle 3,336 \quad (F_{y1} - 2,8617) \quad F_{x2} \quad (F_{y2} - 2,8617) \quad 1,6679 \quad -2,8617 \rangle$$

Ainsi, en remplaçant les composantes des vecteurs  $\{U\}$  et  $\{F\}$  par leurs valeurs respectives dans le système d'équations précédent, on obtient finalement le système suivant :

$$10^6 * \begin{bmatrix} 7.2407 & 2.6042 & -6.1887 & -1.5625 & -1.052 & -1.0417 \\ 2.6042 & 5.1261 & -1.0417 & -2.3208 & -1.5625 & -2.8053 \\ -6.1887 & -1.0417 & 6.1887 & 0.00 & 0.00 & 1.0417 \\ -1.5625 & -2.3208 & 0.00 & 2.3208 & 1.5625 & 0.00 \\ -1.052 & -1.5625 & 0.00 & 1.5625 & 1.0520 & 0.00 \\ -1.0417 & -2.8053 & 1.0417 & 0.00 & 0.00 & 2.8053 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = 10^4 * \begin{Bmatrix} 3,336 \\ F_{y1} - 2,8617 \\ F_{x2} \\ F_{y2} - 2,8617 \\ 1,6679 \\ -2,8617 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (01) \\ (02) \\ (03) \\ (04) \\ (05) \\ (06) \end{matrix}$$

Après résolution du sous-système formé par les équations (01), (05) et (06), on trouve sous les effets combinés du poids propre de la digue et de la poussée hydrostatique les résultats suivants :

- Le glissement horizontal du talon est égal à  $u_1 = 1,7 \text{ mm}$
- Le déplacement horizontal du sommet de la digue (de la crête) :  $u_3 = 5,66 \text{ mm}$
- Le déplacement vertical du sommet de la digue (de la crête) :  $v_3 = -1,92 \text{ mm}$

On constate que ces déplacements sont assez faibles. On peut retrouver ces valeurs en utilisant le logiciel CAST3M pour un modèle composé d'un maillage à seul un élément TRI3. Les résultats obtenus sont illustrés en figure 16-b ci-dessous. Toutefois, ce maillage étant très grossier, un maillage plus raffiné utilisant un grand nombre d'éléments donnera des résultats plus précis.

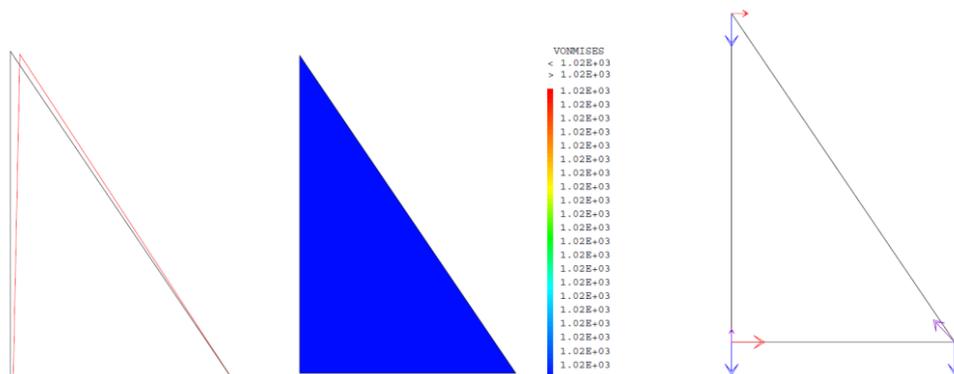


Figure 16-b : Forme déformée ( en rouge) et non déformée (en bleu), champ de contraintes (au milieu), et forces nodales équivalentes ainsi que les réactions aux appuis (à droite)

En ce qui concerne les réactions nodales, si on remplace les composantes trouvées précédemment par leurs valeurs dans les équations (02), (03) et (04), on trouve :

- Comme réaction verticale du sol au niveau du talon une force  $F_{y1}$  positive (dirigée vers le haut) et d'intensité  $F_{y1} = 3.2461 \cdot 10^4 \text{ KN}$ .
- Comme réaction horizontale du sol au niveau du nœud 2 une force  $F_{x2}$  négative (dirigée dans le sens contraire de la poussée des eaux) et d'intensité  $F_{x2} = -5.0039 \cdot 10^4 \text{ KN}$ .
- Comme réaction verticale du sol au niveau du nœud 2 une force  $F_{y2}$  positive (dirigée vers le haut) et d'intensité  $F_{y2} = 5.3392 \cdot 10^4 \text{ KN}$ .

## 7 Calculs en état bidimensionnel 2D de contraintes planes : cas de la modélisation d'une plaque rectangulaire avec un élément quadrangulaire QUA4

Reprendre le cas de la plaque étudiée dans les exemples 08 et 11 du chapitre 05. On rappelle qu'il s'agit d'une plaque rectangulaire en acier de 20 cm de longueur et de 10 cm de largeur et modélisée en état bidimensionnel 2D de contraintes planes avec un maillage composé d'un seul élément fini quadrangulaire de type QUA4 (figure 17). Le poids propre de cette plaque de faible épaisseur  $t=3\text{mm}$  est considéré comme négligeable.

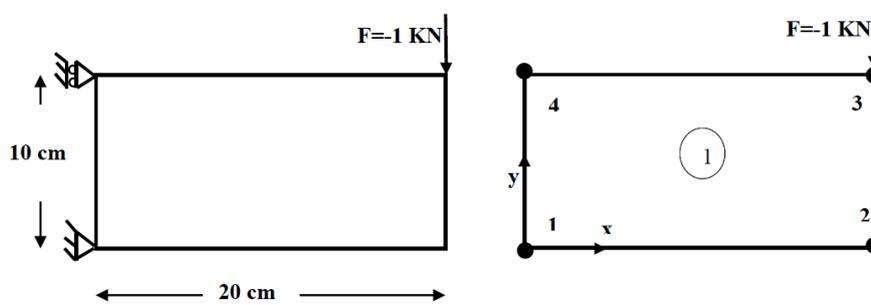


Figure 17 : Schéma de la plaque (à gauche) et son maillage EF avec un seul élément de type QUA4 (à droite).

Il est demandé de :

- 1- Calculer la matrice de rigidité de cette plaque en prenant  $E=210000\text{MPa}$  et  $\nu = 0.3$
- 2- Les nœuds 1 et 4 étant bloqués tels que  $u_1 = v_1 = u_4 = 0$ , calculer les vecteurs déplacements du nœud 2 ( $u_2 = ?$   $v_2 = ?$ ), du nœud 3 ( $u_3 = ?$   $v_3 = ?$ ) et du nœud 4  $v_4 = ?$
- 3- Calculer les composantes des vecteurs réactions nodales au niveau des nœuds bloqués ( $F_{x1} = ?$   $F_{y1} = ?$  et  $F_{x4} = ?$ )

### Solution :

- 1- Calcul de la matrice de rigidité

Cette plaque se trouvant sous un état bidimensionnel de contraintes planes en comportement élastique, on rappelle que la relation de Hooke contraintes-déformations est comme suit :

$$\{\sigma\} = [H_{CP}] \cdot \{\varepsilon\}$$

avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Par ailleurs, maillée avec un seul élément, la matrice de rigidité de cette plaque est égale à celle de l'élément QUA4 et son calcul se fera en appliquant la formule de l'expression (8-12a) :

$$[K] = [K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} [B]^T \cdot [H_{CP}] \cdot [B] \cdot d\Omega.$$

La matrice  $[H_{CP}]$  est donc donnée par la relation de Hooke ci-dessus. Pour sa part, la matrice  $[B]$  de cet élément QUA4 peut être obtenue comme suit :

Tout d'abord, on commence par associer l'élément réel à son élément de référence (figure 18) dont les relations et la matrice Jacobienne ont déjà été obtenues les exemples 08 et 11 du chapitre 05 sus cités, et que nous rappelons les expressions,.

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

ainsi que celle de la matrice Jacobienne :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et de son déterminant  $\det[J] = 50$

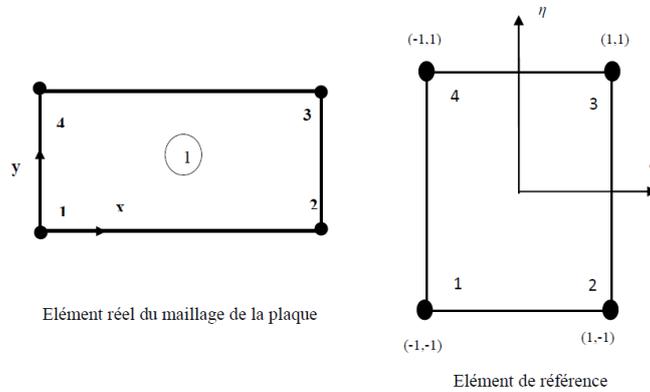


Figure 18 : élément réel du la plaque (à gauche) et son élément de référence associé (à droite)

Le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  étant défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

On définit dans l'élément de référence, le champ de déformations comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (8-25)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

Or les fonctions d'interpolations et leurs dérivées partielles sont comme suit :

$i$	$N_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(-1+\eta)$	$\frac{1}{4}(-1+\xi)$
2	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)$	$\frac{1}{4}(-1-\xi)$
3	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)$
4	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$	$\frac{1}{4}(-1-\eta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)$

En les remplaçant dans l'expression (8-25) précédente, on aura :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) \\ 0 & (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice Jacobienne  $[J]$  étant connue :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et son déterminant  $\det[J] = 50$

La matrice inverse  $[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$

peut être utilisée comme suit (voir paragraphe 4 chapitre 03) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = [j] \begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{pmatrix} = [j] \begin{pmatrix} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

En développant cette écriture matricielle, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0.1 \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.2 \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0.1 \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0.2 \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases} \quad (8-27)$$

Par ailleurs, le vecteur-déformations  $\langle \varepsilon \rangle$  dans l'élément réel est connu par ses composantes suivantes :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle = \left\langle \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \right\rangle$$

Si on remplace ces composantes par leurs expressions établies en (8-27), on aura :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (8-27)$$

D'autre part, en remplaçant le vecteur  $\left\langle \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right\rangle$  par son expression établie en (8-26) dans (8-27), on aura :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) \\ 0 & (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{pmatrix} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & 2(-1+\xi) & 0 & 2(-1-\xi) & 0 & 2(1+\xi) & 0 & 2(1-\xi) \\ 2(-1+\xi) & (-1+\eta) & 2(-1-\xi) & (1-\eta) & 2(1+\xi) & 0 & (1+\eta) & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

En tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été introduite en (8-04), dans laquelle on a :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-30)$$

En comparant les deux dernières expressions ci-dessus (8-29) et (8-30), la matrice  $[B]$  peut être déduite par identification comme suit :

$$[B] = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & 2(-1+\xi) & 0 & 2(-1-\xi) & 0 & 2(1+\xi) & 0 & 2(1-\xi) \\ 2(-1+\xi) & (-1+\eta) & 2(-1-\xi) & (1-\eta) & 2(1+\xi) & (1+\eta) & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix}$$

On constate cette fois dans (8-31) que les termes de la matrice  $[B]$  ne sont pas constants et dépendent linéairement soit de  $\xi$  soit de  $\eta$ . Ce qui permet de déduire que le champ de déformations (et donc de contraintes) évolue également manière linéaire à l'intérieur de l'élément quadrangulaire QUA4.

$$[K_{(4)}] = \frac{E}{40^2(1-\nu^2)} \int_{\Omega_{(4)}} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & 2(-1+\xi) \\ 0 & 2(-1+\xi) & (-1+\eta) \\ (1-\eta) & 0 & 2(-1-\xi) \\ 0 & 2(-1-\xi) & (1-\eta) \\ (1+\eta) & 0 & 2(1+\xi) \\ 0 & 2(1+\xi) & (1+\eta) \\ (-1-\eta) & 0 & 2(1-\xi) \\ 0 & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & 2(-1+\xi) & 0 & 2(-1-\xi) & 0 & 2(1+\xi) & 0 & 2(1-\xi) \\ 2(-1+\xi) & (-1+\eta) & 2(-1-\xi) & (1-\eta) & 2(1+\xi) & (1+\eta) & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta$$

Après développements, on obtient la matrice de rigidité élémentaire symétrique en page suivante. Pour calculer les intégrales des termes de la matrice de rigidité ci-dessous, on applique la méthode de Gauss-Legendre à ces fonctions polynomiales qui sont toutes de degré 02 tel que le monôme le plus élevé est de la forme  $\xi^i \cdot \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Ainsi, pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i+j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur pour  $m$  vérifiant la condition précédente et telle que  $m=3$ , on choisit le schéma d'intégration à  $r=4$  points de gauss de la figure 04-c qui est reproduite ci-dessous. Ce qui nous permet de calculer ces intégrales telles que la lecture du tableau 03 du chapitre 06, pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

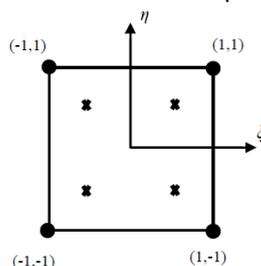
$$\iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4 \cdot \varphi(\xi_4, \eta_4)$$

Le premier point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_1 = 1$

Le second point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_2 = 1$

Le troisième point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_3 = 1$

Le quatrième point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_4 = 1$



$$\begin{aligned}
& [K_{(1)}] \\
& = \frac{50.E}{40^2.(1-\nu^2)} \int_{\Omega_{REF}} \left[ \begin{array}{cccccccc}
\frac{(\eta-1)^2 + 2(\xi-1)^2(1-\nu)}{(\eta-1)(\xi-1)(1+\nu)} & \frac{-(1-\eta)^2}{-2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \xi(1-\eta)(1+\nu) + \frac{(\eta^2-1) + 2(\xi^2-1)(1-\nu)}{(1-\eta)(3\nu-1)} & \frac{2v(\eta-1)(1+\xi) + (1-\eta)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1-\eta^2) - (1-3\nu)(1-\xi)}{2(1-\xi)^2(1-\nu)} & \frac{(1-\eta)^2 - (1-\eta)(1-\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1-\eta)^2 - (1-\eta)(1-\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1-\xi) + (1+\nu)\eta(1-\xi)}{(1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)} \\
\frac{(\eta-1)(\xi-1)(1+\nu)}{4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)(1-\eta)\xi + (1-\eta)(1-3\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{4(1-\xi^2) - \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{2v(\xi-1)(1+\eta) + (1-\nu)(\eta-1)(1+\xi)}{4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(\eta^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} \\
\frac{-(1-\eta)^2}{-2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)(1-\eta)\xi + (1-\eta)(1-3\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(\eta-1)^2 + (\eta-1)(\xi+1)(1+\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-\eta)^2}{-2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-\eta)^2}{-2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} \\
\frac{\xi(1-\eta)(1+\nu) + (1-\eta)(3\nu-1)}{\frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)} & \frac{4(1-\xi^2) - \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{4(\xi+1)^2 + \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1+\xi) - (1+\nu)\eta(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1+\xi) - (1+\nu)\eta(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} \\
\frac{(\eta^2-1) + 2(\xi^2-1)(1-\nu)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{2v(\xi-1)(1+\eta) + (1-\nu)(\eta-1)(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-\eta)^2}{-2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1+\xi) - (1+\nu)\eta(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1+\xi) - (1+\nu)\eta(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} \\
\frac{2v(\eta-1)(1+\xi) + (\xi-1)(1+\eta)(1-\nu)}{4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(\eta^2-1)(1-\nu)} & \frac{-(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{-(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{-(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{-(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} \\
\frac{(1-\eta^2) - 2(1-\xi)^2(1-\nu)}{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} \\
\frac{(1-3\nu)(1-\xi) + (1+\nu)\eta(1-\xi)}{-4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\nu)} & \frac{2v(1-\eta)(1-\xi) + (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{2v(1-\eta)(1-\xi) + (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{2v(1-\eta)(1-\xi) + (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{2v(1-\eta)(1-\xi) + (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)}
\end{array} \right] d\xi.d\eta
\end{aligned}$$

Après intégration numérique et en adoptant comme valeurs des propriétés matérielles de l'acier  $E=210000\text{MPa}=21000\text{ KN/cm}^2$  et  $\nu=0.3$ , la matrice symétrique de rigidité  $[K_{(i)}]$  s'écrira finalement :

$$[K_{(1)}] = (721.154)^* \begin{bmatrix} 20.267 & 5.20 & 9.067 & -0.4 & -6.4 & -5.2 & -7.787 & -2.4 \\ 5.20 & 87.2 & 0.4 & 8.8 & -5.2 & -11.6 & -0.4 & 86.267 \\ 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 & -2.133 & -0.4 & -6.4 & 5.2 \\ -0.4 & 8.8 & -5.2 & 23.2 & 0.4 & -20.4 & 5.2 & -11.6 \\ -6.4 & -5.2 & -2.133 & 0.4 & 12.8 & 5.2 & 9.067 & -0.4 \\ -5.2 & -11.6 & -0.4 & -20.4 & 5.2 & 23.2 & 0.4 & 8.8 \\ -7.787 & -0.4 & -6.4 & 5.2 & 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 \\ -2.4 & 86.267 & 5.2 & -11.6 & -0.4 & 8.8 & -5.2 & 87.2 \end{bmatrix} \text{KN/cm}^2$$

En tenant compte des conditions aux limites, le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  s'écrit comme suit :

$$\langle U_{(1)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad 0 \quad v_4 \rangle$$

Le vecteur force nodales est comme suit :

$$\langle F_{(1)} \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{x4} \quad F_{y4} \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad F_{x4} \quad F_{y4} \rangle$$

Le système d'équations à résoudre :

$$[K_{(1)}]\{U_{(1)}\} = \{F_{(1)}\}$$

s'écrit finalement comme suit :

$$(721.154)^* \begin{bmatrix} 20.267 & 5.20 & 9.067 & -0.4 & -6.4 & -5.2 & -7.787 & -2.4 \\ 5.20 & 87.2 & 0.4 & 8.8 & -5.2 & -11.6 & -0.4 & 86.267 \\ 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 & -2.133 & -0.4 & -6.4 & 5.2 \\ -0.4 & 8.8 & -5.2 & 23.2 & 0.4 & -20.4 & 5.2 & -11.6 \\ -6.4 & -5.2 & -2.133 & 0.4 & 12.8 & 5.2 & 9.067 & -0.4 \\ -5.2 & -11.6 & -0.4 & -20.4 & 5.2 & 23.2 & 0.4 & 8.8 \\ -7.787 & -0.4 & -6.4 & 5.2 & 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 \\ -2.4 & 86.267 & 5.2 & -11.6 & -0.4 & 8.8 & -5.2 & 87.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (01) \\ (02) \\ (03) \\ (04) \\ (05) \\ (06) \\ (07) \\ (08) \end{matrix}$$

La résolution de ce système d'équations consiste à trouver d'abord les valeurs des déplacements  $u_2, v_2, u_3$  et  $v_3$  et ce, en résolvant le sous-système formé par les équations (03), (04), (05) et (06) dont la solution est comme suit :

$$u_2 = -2.024 \cdot 10^{-04} \text{cm}, \quad v_2 = -6.81 \cdot 10^{-04} \text{cm}, \quad u_3 = 2.31 \cdot 10^{-04} \text{cm}, \quad v_3 = -7.048 \cdot 10^{-04} \text{cm} \text{ et } v_4 = -2.38 \cdot 10^{-04} \text{cm}$$

En remplaçant ces valeurs trouvées dans les équations (01), (02), (07) et (08), on trouve directement les valeurs des réactions suivantes :

$$F_{x1} = 2 \text{ KN}, \quad F_{y1} = 1 \text{ KN}, \quad F_{x4} = -2 \text{ KN} \text{ et } F_{y4} = 0 \text{ KN}$$

## 8 Exercices corrigés

### 8.1 Exercice 01 : barre tendue de section variable

Soit une barre rectiligne en acier de sections transversales à aires variables et de longueur  $L=50\text{cm}$ . La variation de ces aires est linéaire telle que l'aire de la section de l'extrémité 1 d'abscisse  $x_1=0$  est  $A_1=1\text{ cm}^2$  tandis que l'autre section d'extrémité 2 d'abscisse  $x_2=50\text{ cm}$ , possède une aire  $A_2=2\text{ cm}^2$ . La section 1 d'aire  $A_1$  est bloquée en déplacements. Par contre, la section d'aire  $A_2$  est soumise à une force centrée  $F$  de traction portée par l'axe longitudinal  $x$  et d'intensité  $F=50\text{ KN}$  (figure 19). En supposant un comportement élastique linéaire, il est demandé :

- 1- d'établir la matrice de rigidité de cette barre modélisée en EF par un seul élément unidimensionnel linéaire à deux nœuds de type SEG2 (figure 20).
- 2- de calculer le déplacement du nœud 2 tout en sachant que le module d'Young de cet acier est  $E=210000$  MPa.

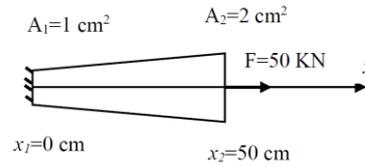


Figure 19 : barre tendue de section variable.

**Solution :**

On modélise cette barre dans l'espace unidimensionnel 1D par un seul élément linéaire de type SEG2 et on lui associe son élément de référence (figure 20).

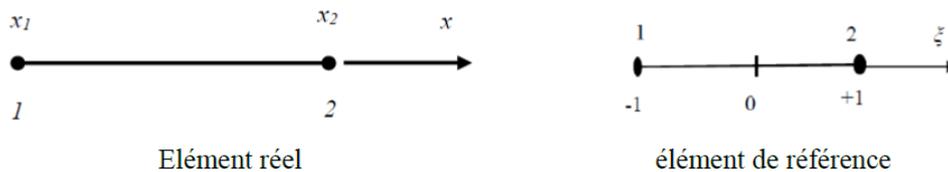


Figure 20 : maillage de la barre par un seul élément SEG2 et son élément de référence associé

- 1- L'établissement de la matrice de rigidité de cette barre s'effectue selon la formule

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot d\Omega.$$

Puisque nous sommes en traction unidimensionnelle 1D, les tenseurs des contraintes et des déformations s'écrivent pour tout point d'abscisse  $x$ :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle = \langle \sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

En tenant compte des valeurs précédentes des composantes de  $\langle \sigma \rangle$  et  $\langle \varepsilon \rangle$ , la relation de Hooke contraintes déformation  $\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\}$  donne  $[H] = E$

Nous avons vu que dans l'exemple 01 du paragraphe 3.1 ci-dessus, que la matrice  $[B]$  a comme expression :

$$[B] = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \text{ et } [B]^T = \left\{ \begin{matrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{matrix} \right\}$$

Par conséquent, en substituant les matrices  $[B]$  et  $[H]$  par leurs valeurs respectives plus haut dans l'expression de  $[K_{(1)}]$ , on peut écrire:

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} \left\{ \begin{matrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{matrix} \right\} \cdot E \cdot \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle d\Omega$$

Or pour tout point d'abscisse  $x$ ,  $d\Omega = A(x) \cdot dx$  avec  $A(x)$  une fonction linéaire en  $x$  de la forme :

$$A(x) = a \cdot x + b \quad \text{telle que pour } x=x_1=0, \quad A(x) = A(0) = 0 + b = b = A_1$$

Et pour  $x=x_2=L$ ,  $A(x) = A(L) = a \cdot L + A_1 = A_2$  ce qui implique que  $a = \frac{A_2 - A_1}{L}$

Ainsi, l'expression de  $A(x)$  est comme suit :  $A(x) = \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1$  donc  $d\Omega = A(x) \cdot dx = \left( \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1 \right) \cdot dx$

En remplaçant  $d\Omega$  par son expression et en faisant sortir tous les termes constants à l'extérieur de l'intégrale, on peut écrire :

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} \int_0^L \left( \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1 \right) \cdot dx = \frac{E}{L} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \cdot \left[ \left[ \frac{(A_2 - A_1)x^2}{2L} \right]_0^L + [A_1 x]_0^L \right]$$

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \left[ \frac{(A_2 - A_1)L^2}{2L} + A_1 L \right] = \frac{E}{L^2} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \left[ \frac{(A_2 L - A_1 L)}{2} + \frac{2 \cdot A_1 \cdot L}{2} \right]$$

Finalement :

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \left[ \frac{(A_2 + A_1)L}{2} \right] = \frac{E(A_2 + A_1)}{2L} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

A.N :

$$[K_{(1)}] = \frac{21000(2 + 1)}{2 * 50} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} = 630 \cdot \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

2- Le déplacement du nœud 2  $u_2 = ?$

Puisque notre maillage est composé d'un seul élément, l'équation d'équilibre global  $[K] \cdot \{U\} = \{F\}$  est réduite à celle de l'élément telle que  $[K] = [K_{(1)}]$ ,  $\{U\} = \{U_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$  et  $\{F\} = \{F_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Donc le système à résoudre consiste :

$$[K_{(1)}] \cdot \{U_{(1)}\} = \{F_{(1)}\}$$

Si on remplace chaque terme par son expression respective, on aura :

$$630 \cdot \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Or le nœud 1 étant bloqué donc  $u_1 = 0$  et le nœud 2 étant soumis à une force  $F$  orientée positivement selon l'axe  $x$  donc  $F_2 = F = 50 \text{ KN}$ . En remplaçant ces valeurs dans le système d'équations précédent, on aura :

$$630 \cdot \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

De la deuxième équation de ce système, on tire :

$$630 * u_2 = 50 \Rightarrow u_2 = \frac{50}{630} = 0.079 \text{ cm}$$

Par ailleurs, une fois  $u_2$  trouvée, l'inconnue  $F_1$  qui n'est rien d'autre que la réaction à l'appui 1, peut être tirée cette fois de la première équation ci-dessus, telle que :

$$630 * (-u_2) = F_1 = 630 * \left( -\frac{50}{630} \right) = -50 \text{ KN} = -F$$

Donc

$$F_1 = -F = -50 \text{ KN}$$

## 8.2 Exercice 02 Forces nodales équivalentes au poids propre d'une barre de sections variables

Reprendre le cas de l'exercice précédent, dans lequel la barre dont le matériau de masse volumique  $\rho=7850 \text{ Kg/m}^3$  est soumise à une force volumique représentant son propre poids. Maillée par un seul élément unidimensionnel linéaire à deux nœuds de type SEG2, l'axe des  $x$  est cette fois orienté verticalement vers le bas selon la direction de la pesanteur (figure 21). Il est demandé de :

- 1- Calculer la résultante de cette force répartie
- 2- Calculer les forces nodales équivalentes à ce poids volumique.

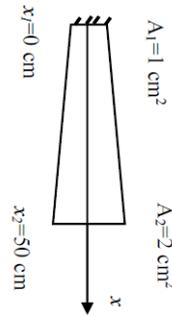


Figure 21 : Barre de section linéairement variable soumise à son poids propre

### Solution :

- 1- La résultante totale des forces de volume dues au poids propre, est :

$$R_T = \text{le poids spécifique } \gamma * \text{le volume total}$$

$$R_T = \gamma * \int_{\Omega} d\Omega = \gamma * \int_0^L A(x) \cdot dx = \rho * \int_0^L \left( \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1 \right) \cdot dx$$

$$R_T = \gamma * \left[ \frac{(A_2 - A_1)x^2}{2L} \right]_0^L + [A_1 x]_0^L = \frac{\gamma * (A_2 + A_1) * L}{2}$$

A.N.: Les unités utilisées étant le KN et le cm, le poids spécifique  $\gamma$  sera en  $\text{KN/cm}^3$  comme suit :

$$\gamma = 7850 * 9,81 * 10^{-3} \text{ KN} / (100\text{cm})^3 = 7,698 * 10^4 * 10^{-9} \text{ KN/cm}^3 = 7,698 * 10^{-5} \text{ KN/cm}^3$$

$$R_T = \frac{\gamma * (A_2 + A_1) \cdot L}{2} = \frac{7,698 \cdot 10^{-5} * (2 + 1) * 50}{2} = 5,7735 \cdot 10^{-3} \text{ KN}$$

- 2- Le Calcul des forces nodales équivalentes se fera selon l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega(i)} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega$$

Pour l'élément barre à deux nœuds, la matrice  $[N]$  (voir l'exemple 01 ci-dessus) s'écrit :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle$$

Pour leur part, les forces par unité de volume  $\{F_V\} = \gamma = \rho \cdot g$

En remplaçant  $[N]$  et  $\{F_V\}$  par leurs expressions respectives, on peut écrire :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega(i)} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega = \int_{\Omega(i)} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot d\Omega$$

avec

$$d\Omega = A(x). dx = A(x(\xi)). \det[J]. d\xi = \mathcal{B}(\xi). \frac{L}{2}. d\xi$$

$\mathcal{B}(\xi) = ?$

$$A(x) = \frac{(A_2 - A_1)}{L}. x + A_1$$

Or

$$x(\xi) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \xi & 1 + \xi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \xi & 1 + \xi \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} (1 + \xi)$$

Donc

$$A(x(\xi)) = \frac{A_2 - A_1}{L}. x(\xi) + A_1 = \frac{A_2 - A_1}{L}. \left( \frac{L}{2} (1 + \xi) \right) + A_1 = \frac{A_2 - A_1}{2}. (1 + \xi) + A_1$$

Ainsi

$$\mathcal{B}(\xi) = A(x(\xi)) = \frac{1}{2} ((A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1))$$

$$d\Omega = A(x(\xi)). \frac{L}{2}. d\xi = \left( \frac{1}{2} ((A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1)) \right). \frac{L}{2}. d\xi$$

Donc

$$\{F_{(i)}\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix}. \gamma. A(x). dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix}. \gamma. A(x(\xi)). \det[J]. d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix}. \gamma. \left( \frac{1}{2} ((A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1)) \right). \frac{L}{2}. d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma.L}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix}. ((A_2 - A_1).\xi + (A_2 + A_1)). d\xi$$

$$= \frac{\gamma.L}{8} \left( \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \xi - \xi^2 \\ \xi + \xi^2 \end{Bmatrix}. (A_2 - A_1). d\xi + \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix}. (A_2 + A_1). d\xi \right)$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma.L.(A_2 - A_1)}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \xi - \xi^2 \\ \xi + \xi^2 \end{Bmatrix}. d\xi + \frac{\gamma.L.(A_2 + A_1)}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix}. d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma.L.(A_2 - A_1)}{8} \left[ \begin{matrix} \xi^2 - \xi^3 \\ \xi^2 + \xi^3 \end{matrix} \right]_{-1}^{+1} + \frac{\gamma.L.(A_2 + A_1)}{8} \left[ \begin{matrix} \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \xi + \frac{\xi^2}{2} \end{matrix} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\gamma.L.(A_2 - A_1)}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} + \frac{3.\gamma.L.(A_2 + A_1)}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \gamma.L \left( \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{6} \right) \\ \gamma.L \left( \frac{A_1}{6} + \frac{A_2}{3} \right) \end{Bmatrix} = \frac{\gamma.L}{6} \begin{Bmatrix} 2.A_1 + A_2 \\ 2.A_2 + A_1 \end{Bmatrix}$$

On peut remarquer que si  $A_1 = A_2 = A$  (section constante) alors

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot L}{6} \begin{Bmatrix} 3 \cdot A \\ 3 \cdot A \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot L \cdot A}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On retrouve ainsi le résultat des calculs du paragraphe 5.1 d'une barre de section constante et où le poids propre a été remplacé par deux forces nodales équivalentes appliquées aux nœuds de l'élément et dont l'intensité de chacune de ces forces est égale à la moitié du poids total de la barre.

### 8.3 Exercice 03 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur un élément TRI6

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t=3mm$  et modélisée dans l'espace bidimensionnel 2D muni d'un repère orthonormé  $(1, x, y)$ , par un maillage composé d'un élément triangulaire quadratique à six nœuds de type TRI6 dont les coordonnées sont affichées en centimètres (figure 22).

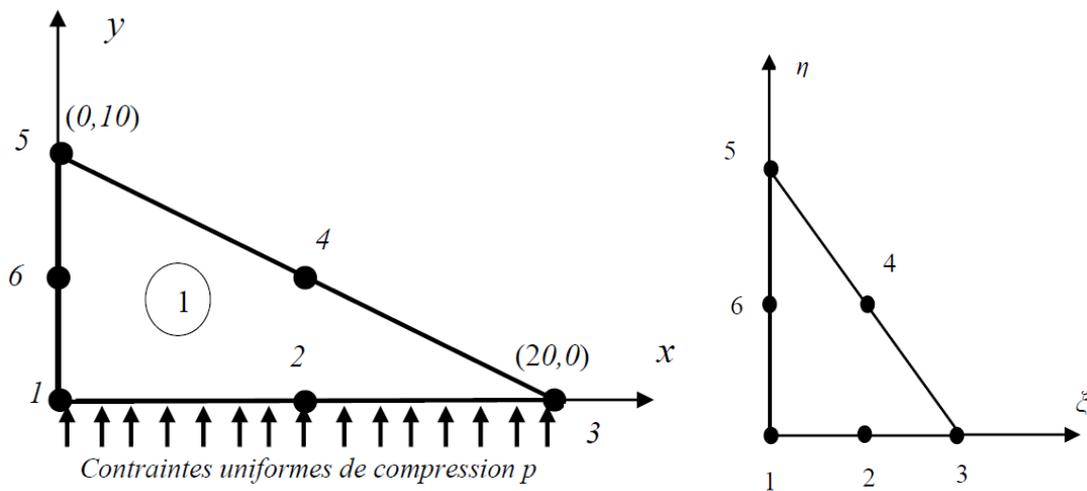


Figure 22 : maillage de la paroi métallique mince avec un élément TRI6 et son élément de référence

Cette paroi subit des pressions uniformes sur le côté 1-2-3 égales à  $p=50$  MPa. Calculer les forces nodales équivalentes à cette pression. Le poids propre de cette plaque est considéré comme négligeable.

#### Solution

La résultante des forces de pression exercées sur le côté 1-2-3 est égale à :

$$R_T = p \cdot L_{1-3} \cdot t = 50 \times 20 \times 0.3 = 300 \text{ KN}$$

Le calcul des forces nodales équivalentes consiste à utiliser l'expression (8-12b) :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

On associe cet élément réel à son élément de référence (figure 22). La matrice  $[N]$  a été introduite grâce à la relation :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\}$$

Avec

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \rangle$$

Telle que:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

avec

$N_1(\xi, \eta) = (-1 + \xi + \eta)(-1 + 2\xi + 2\eta)$	$N_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta$
$N_2(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$	$N_5(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta)$
$N_3(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi)$	$N_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$

Concernant le vecteur  $\{f_S\}$  représentant les forces par unité de surface, on peut écrire :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

$p$  : étant la pression exercée

Si on remplace la matrice  $[N]^T$  et le vecteur  $\{f_S\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \end{Bmatrix} = \int_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_5 \\ N_6 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} d\Gamma = \int_{\Gamma_{F(i)}} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = p \cdot \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ (-1 + \xi + \eta)(-1 + 2\xi + 2\eta) \\ 0 \\ 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ 0 \\ -\xi(1 - 2\xi) \\ 0 \\ 4\xi\eta \\ 0 \\ -\eta(1 - 2\eta) \\ 0 \\ 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{array} \right\} d\Gamma$$

Or  $\Gamma_{F_{(i)}} = t \cdot (L_{1-3})$  car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-2-3 d'épaisseur  $t$ . Ce côté 1-2-3 étant porté par l'axe  $x$  dans l'élément réel, on peut donc écrire en remplaçant  $d\Gamma = t \cdot dx$  dans l'expression précédente :

$$\{F_{(i)}\} = p \cdot t \cdot \int_{L_{1-2}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ (-1 + \xi + \eta)(-1 + 2\xi + 2\eta) \\ 0 \\ 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ 0 \\ -\xi(1 - 2\xi) \\ 0 \\ 4\xi\eta \\ 0 \\ -\eta(1 - 2\eta) \\ 0 \\ 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{array} \right\} dx$$

Pour pouvoir intégrer dans l'élément de référence, il va falloir retrouver la relation  $x(\xi, \eta)$  qui nous permettra par la suite de remplacer  $dx$  par  $d\xi$  dans l'intégrale ci-dessus.

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \quad N_5(\xi, \eta) \quad N_6(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix}$$

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \quad N_5(\xi, \eta) \quad N_6(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après développement :

$$x(\xi, \eta) = 10 \cdot N_2(\xi, \eta) + 20 \cdot N_3(\xi, \eta) + 10 \cdot N_4(\xi, \eta) = 10 \cdot 4 \cdot \xi(1 - \xi - \eta) - 20 \cdot \xi(1 - 2\xi) + 10 \cdot 4 \cdot \xi\eta$$

$$x(\xi, \eta) = 10 \cdot 4 \cdot \xi(1 - \xi) - 20 \cdot \xi(1 - 2\xi) = 40 \cdot \xi - 40 \cdot \xi^2 - 20\xi + 40 \cdot \xi^2$$

Finalement :

$$x(\xi, \eta) = 20\xi \quad \text{ce qui implique que } dx = 20 \cdot d\xi$$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté  $L_{1-3}$  de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $\eta = 0$ . D'où l'intégrale :

$$\{F_{(i)}\} = 20.p.t. \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1+\xi)(-1+2\xi) \\ 0 \\ 4\xi(1-\xi) \\ 0 \\ -\xi(1-2\xi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi = 20.p.t. \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3 \\ 0 \\ -\frac{\xi^2}{2} + \frac{2}{3}\xi^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = R_T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, on retrouve la distribution illustrée en figure 12 du paragraphe 5.4 où le nœud du milieu reprend les deux tiers de la résultante tandis que les nœuds d'extrémités reprennent chacun un sixième de cette résultante (figure 23 ci-dessous).

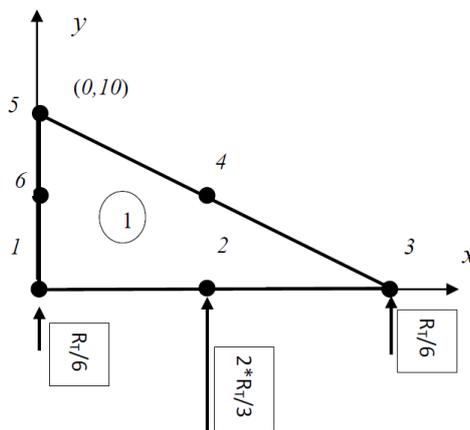


Figure 23 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds d'un triangle TR13 d'épaisseur  $t$

## Chapitre 08

### Modélisation et calculs de structures formées de barres

#### 1 Introduction

L'objectif de ce chapitre consiste non seulement à introduire l'élément fini à deux nœuds de type barre, mais également à présenter une méthode utilisant cet élément pour le calcul de structures formées de barres. A cet effet, nous commencerons en premier lieu, par rappeler quelques notions de base de la théorie de la résistance des matériaux. Ces notions sont celles relatives à la définition d'une barre, d'une poutre, d'une structure dites unidimensionnelle formées de barres continues portées par un seul axe, et enfin, d'une structure dite en treillis bidimensionnels ou tridimensionnels. Nous rappellerons non seulement les conditions de chargements et d'appuis aux nœuds liées à ces structures, mais également les conditions relatives à la nature articulée de rotation libre des sections d'extrémités de chaque barre.

Par la suite, après avoir procédé à la définition de cet élément fini linéique à deux nœuds, connu sous la désignation « d'élément barre », nous présenterons une méthode simple de construction de modèles E F constitués de ce type d'éléments. En effet, sans utiliser de formulations intégrales telles que nous les avons vues dans le chapitre précédent, nous présenterons une méthode directe et simple de calcul de la matrice de rigidité locale de ce type d'élément. Pour le présent chapitre, il est important de souligner que les calculs se feront directement sur l'élément réel et que nous n'utiliserons pas d'éléments de référence.

Par ailleurs, en suivant le même raisonnement que celui illustré dans le schéma global de résolution du chapitre 07 précédent, le calcul d'une structure formée de plusieurs barres, nécessite également la résolution d'un système global d'équations reliant les forces nodales extérieures aux déplacements nodaux et ce, grâce à la construction d'une matrice largement connue sous le nom de « *matrice de rigidité globale* ». Le premier membre de ce système consiste en le produit matriciel de cette *matrice de rigidité globale* par un *vecteur global de déplacements nodaux*. Le second membre de ce système consiste en un *vecteur global de forces nodales* représentant les forces extérieures appliquées ainsi que les réactions des appuis. La construction de cette *matrice de rigidité globale* est obtenue grâce à la construction et par la suite à l'assemblage de *matrices de rigidités dites locales (ou élémentaires)* de tous les éléments composant la structure. Nous verrons que cette opération d'assemblage peut être effectuée grâce à l'écriture sous *forme expansée* de ces *matrices de rigidités élémentaires*. Il est important de souligner que la résolution de ce système d'équations ne peut se faire sans l'introduction de conditions aux limites en déplacements qui consistent à tenir compte des blocages des degrés de liberté des nœuds situés au niveau des appuis.

#### 2 Quelques rappels de la théorie de la résistance des matériaux

##### 2.1 Définition d'une barre

En résistance des matériaux, une barre est définie comme étant un élément rectiligne de structure, dont les sections transversales ne sont soumises qu'à des efforts axiaux (soit de compression, soit de traction) centrés et portés par l'axe passant par les centres de gravité de ces sections. Il y a lieu également de rappeler que les dimensions de ces sections doivent être faibles devant celle de la longueur de cette barre.

##### 2.2 Définition d'une poutre

En résistance des matériaux, une poutre est définie comme étant un élément de structure (rectiligne ou courbe), qui peut travailler aussi bien en flexion, en cisaillement, en torsion et en compression-

traction. Ainsi, toutes les sections transversales de cet élément peuvent subir des moments fléchissants, des moments de torsion, des efforts tranchants ainsi que des efforts normaux. Les dimensions de ces sections transversales doivent également être faibles devant celles de la longueur de la poutre.

### 2.3 Structures en treillis

Ce type de structure consiste à utiliser des barres (telles que définies dans le paragraphe 2.1 précédent) de sorte à former de façon juxtaposée des triangles successifs dont les nœuds sont des articulations. Ceci donne lieu à une structure nommée "structure en treillis" (figures 01). Il est important de noter que ce système est basé sur le principe dit triangulation. En effet, prenons l'exemple d'une structure constituée de trois barres articulées et formant un triangle (figure 02). Celle-ci est stable et peut équilibrer, uniquement par des efforts internes axiaux dans les barres, tout effort appliqué sur ses trois nœuds et ce, quels que soient le sens et la direction de la force appliquée. Evidemment, il s'agit d'une structure plane (bidimensionnelle) qui ne peut reprendre que des efforts agissant dans son plan. Par contre, si on considère une structure formée de quatre barres articulées, celle-ci est instable. En effet, le mécanisme de ruine peut s'enclencher pour de très faibles intensités d'efforts appliqués sur ses nœuds (figure 03). Quelques exemples de poutres (ou de fermes) en treillis sont illustrés en figure 04.

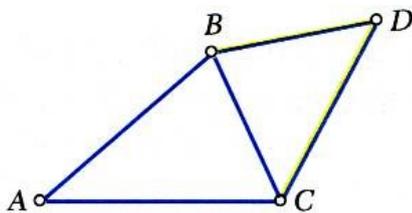


Figure 01: juxtaposition de deux triangles

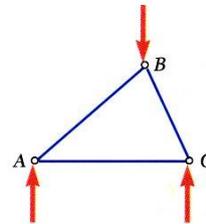


Figure 02: triangle stable formé de trois barres articulées

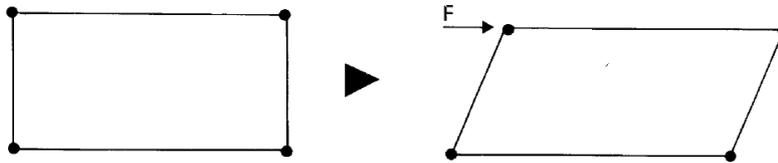


Figure 03 : quadrangle instable formé de quatre barres articulées à leurs extrémités.

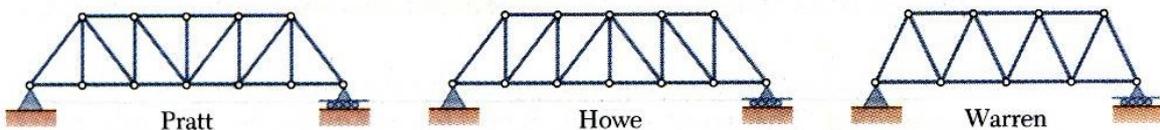


Figure 04 : Quelques exemples de poutres trapézoïdales en treillis

### 3 Element fini de barre

Considérons une barre modélisée par un seul élément fini de type SEG2 à deux nœuds nommés 1 et 2 et de coordonnées respectives  $x_1$  et  $x_2$ . Portées par l'axe (ox), des forces axiales de traction  $F_1$  et  $F_2$  d'intensités égales et opposées sont appliquées respectivement aux niveaux de ces nœuds. Les déplacements causés sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$  (figure 05).

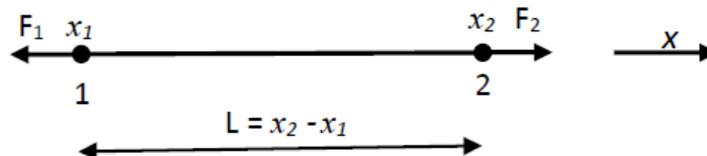


Figure 05 : Element barre à deux nœuds de type SEG2

L'allongement de cette barre est donc :

$$\Delta L = u_2 - u_1$$

La barre étant en équilibre, on peut écrire :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

En supposant que le champ de déformation soit constant à l'intérieur telle que :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (01)$$

En supposant un comportement élastique et en appliquant la loi de Hooke telle que :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F_2}{E.A} = -\frac{F_1}{E.A} \quad (02)$$

En égalisant les deux équations (01) et (02) précédentes, on peut déduire :

$$F_1 = \frac{E.A}{L} (u_1 - u_2) \quad (03)$$

$$F_2 = \frac{E.A}{L} (u_2 - u_1) \quad (04)$$

Sous forme matricielle, les deux équations précédentes peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (05)$$

Par ailleurs, nous rappelons l'équation reliant les forces nodales élémentaires aux vecteurs déplacements nodaux de l'élément barre telle que nous l'avons vue dans le chapitre 08 précédent :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (06)$$

Avec  $[K_1]$  : la matrice de rigidité élémentaire de cet élément barre.

En comparant les équations (05) et (06), nous retrouvons par identification l'expression de cette matrice de rigidité élémentaire telle qu'elle a été établie au chapitre précédent.

$$[K_1] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (07)$$

#### 4 Element fini de ressort

De la même manière, considérons un ressort modélisé par un seul élément fini de type SEG2 à deux nœuds de coordonnées respectives  $x_1$  et  $x_2$ . Portées par l'axe (ox), des forces axiales de traction  $F_1$  et  $F_2$  d'intensités égales et opposées sont appliquées respectivement aux niveaux de ces nœuds. Les déplacements causés sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$  (figure 06).

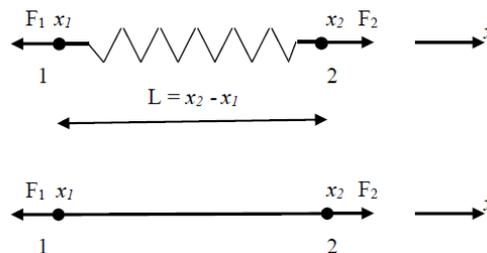


Figure 06 : Ressort modélisé par un élément ressort à deux nœuds de type SEG2

L'allongement de ce ressort est donc :

$$\Delta L = u_2 - u_1$$

L'équilibre en translation permet d'écrire :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

L'équilibre en translation des nœuds 1 et 2 subissant respectivement les forces extérieures  $F_1$  et  $F_2$  ainsi que des forces internes de rappel proportionnelles à la fois à la raideur  $k$  du ressort ainsi qu'à son allongement  $\Delta L$ , permet d'écrire pour chaque nœud :

$$F_1 = k \cdot \Delta L = k (u_1 - u_2) \quad (08)$$

$$F_2 = k \cdot \Delta L = k (u_2 - u_1) \quad (09)$$

Rappelons que la raideur  $k$  est une propriété matérielle qui peut être mesurée expérimentalement.

Sous forme matricielle, les deux équations précédentes peuvent être formulées :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Par ailleurs, rappelons l'équation reliant les forces nodales élémentaires aux vecteurs déplacements nodaux, telle que nous l'avons vue dans le chapitre précédent :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Avec  $[K_1]$  : la matrice de rigidité élémentaire de cet élément.

En comparant les équations (10) et (11), nous pouvons déduire par analogie l'expression de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément ressort telle que :

$$[K_1] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

**Remarque :** Si l'on compare les expressions (07) et (12), les deux matrices de rigidité élémentaires sont similaires. Il suffit simplement de substituer la raideur  $k$  du ressort par le terme  $(E.A/L)$  pour retrouver la matrice de rigidité de la barre.

## 5 Systèmes formés de barres continues unidimensionnelles

Considérons deux barres de longueur  $L$  chacune, et dont les sections transversales sont constantes avec des aires respectives  $A_1$  et  $A_2$  et constituées d'un même matériau dont le module d'Young est noté  $E$ . Ces barres sont disposées en série et reliées bout à bout. Elles sont portées verticalement le long d'un axe  $(ox)$  orienté positivement du haut vers le bas (figure 07). Une force  $F$  ponctuelle agissant vers le bas est appliquée au niveau de l'extrémité inférieure de la seconde barre. L'extrémité supérieure de la première barre étant bloquée en déplacements, elle engendrant une réaction d'appui  $\mathbf{R}$  égale et opposée à la force  $\mathbf{F}$ .

En observant le modèle élément fini adopté et illustré sur les figures 07 et 08 ci-dessous, on constate que la barre 1 correspond au premier élément barre numéro 01 reliant le nœud 1 au nœud 2 tandis que la barre 02 correspond au second élément fini reliant les nœuds 2 et 3. Isolons dans un premier temps chaque élément barre ainsi que chaque nœud (voir la figure 08). On note  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  les déplacements respectifs de chaque nœud. On note  $F_1^{(1)}$  et  $F_2^{(1)}$  les forces nodales internes transmises respectivement par les nœuds 1 et 2 aux sections d'extrémités de la barre 01. On note également  $F_2^{(2)}$  et  $F_3^{(2)}$  les forces nodales internes transmises respectivement par les nœuds 2 et 3 aux sections d'extrémités de la barre

02. Selon le principe de l'action et de la réaction, les forces internes transmises par les barres vers les nœuds sont égales et opposées aux forces internes  $F_j^{(i)}$  par les nœuds vers les barres (telles citées précédemment) (figure 08).

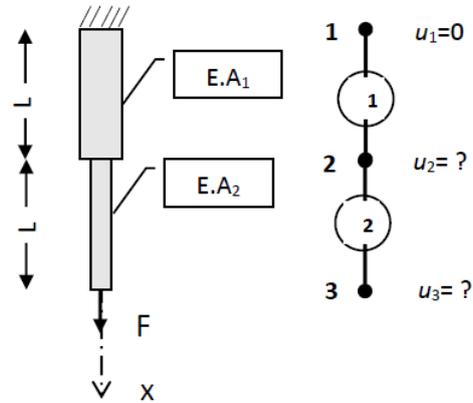


Figure 07 : Système unidimensionnel formé de deux barres continues discrétisé par un modèle EF à deux éléments de type SEG2 à droite

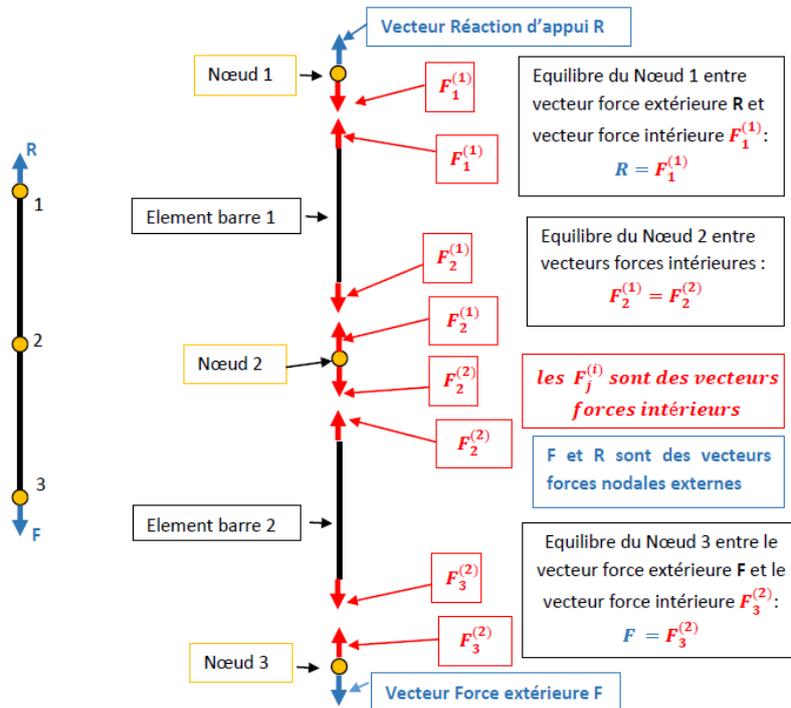


Figure 08 : Représentation des forces nodales externes et des forces internes illustrant les interactions entre les nœuds et les sections d'extrémités des éléments barre

Si on applique l'équation (07) précédente à ce modèle, on peut écrire pour chaque élément, les systèmes d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

En tenant compte des conditions aux limites telles  $F_1^{(1)} = R$ ,  $F_3^{(2)} = F$  et  $u_1 = 0$ , on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (13')$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (14')$$

Les formes expansées des systèmes d'équations précédents consistent à rajouter, dans chaque système, des équations d'équilibres supplémentaires à coefficients nuls des nœuds qui n'appartiennent pas à la barre considérée. Il s'agit en l'occurrence du nœud 3 et donc de l'équation 3 pour l'expression (13') relative à l'élément 01 et du nœud 1 et de l'équation 01 pour l'expression (14') relative à l'élément 02. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Le système globale d'équations ainsi que la matrice de rigidité globale peuvent être obtenu en additionnant deux à deux les membres des systèmes d'équations précédents tels que :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \left[ \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Les forces  $F_2^{(1)}$  et  $F_2^{(2)}$  sont des forces internes agissant sur le nœud 2. L'équilibre de ce nœud, numéro 2, impose que ces forces soient égales et de sens opposés. Ainsi, nous avons :

$$F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = 0$$

Après développement, obtient le système global suivant :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & 0 \\ -A_1 & (A_1 + A_2) & -A_2 \\ 0 & -A_2 & A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (01') \\ (02') \\ (03') \end{matrix} \quad (18)$$

On peut ainsi déduire l'expression de la matrice de rigidité globale du système formé par les deux barres telles que :

$$[\mathbf{K}] = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & 0 \\ -A_1 & (A_1 + A_2) & -A_2 \\ 0 & -A_2 & A_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Les équations (02') et (03') du système (18) sont des équations dont les inconnues sont les déplacements  $u_2$  et  $u_3$ . La démarche consiste à trouver, en premier lieu, les valeurs de ces inconnues  $u_2$  et  $u_3$ . En effet, en développant l'équation (02'), on peut déduire  $u_3$  en fonction de  $u_2$  telle que :

$$u_3 = \frac{(A_1 + A_2)}{A_2} u_2 \quad (20)$$

Si on remplace l'expression précédente (20) dans l'équation (03') du système (18), on trouvera la valeur de  $u_2$  telle que :

$$u_2 = \frac{F}{E.A_1} \quad (21)$$

La substitution de l'expression (21) de  $u_2$  dans celle de  $u_3$  en (20) donnera :

$$u_3 = \frac{(A_1+A_2)}{A_2} u_2 = \frac{(A_1+A_2)}{A_2} \frac{F}{E.A_1} = \frac{F}{E.A_1} + \frac{F}{E.A_2} \quad (22)$$

Par ailleurs, si on développe l'équation (01') du système (18), et en remplaçant  $u_2$  par son expression on obtient :

$$-E.A_1.u_2 = R \Rightarrow R = -E.A_1 \frac{F}{E.A_1} = -F \quad (23)$$

On retrouve ainsi l'équation d'équilibre globale en translation selon l'axe ox telle que :  $R = -F$ .

## 6 Systèmes bidimensionnels formés de barres disposées en treillis

### 6.1 Matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre dans l'espace 2d

Soit un élément barre reliant deux nœuds i et j et dont le repère local lié à cet élément est le repère  $(\bar{i}\bar{X}\bar{Y})$  (figure 09). L'axe local  $(\bar{i}\bar{X})$  est un axe longitudinal reliant le nœud i au nœud j. Le second axe local  $(\bar{i}\bar{Y})$  est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $(\bar{i}\bar{X})$  comme indiqué sur cette figure 09. L'axe local  $(\bar{i}\bar{X})$  est incliné d'un angle  $\varphi$  par rapport à l'axe (ox) du repère global. Sont également représentées sur cette figure 09, les composantes des vecteurs déplacements définis dans le repère local  $(\bar{i}\bar{X}\bar{Y})$ .

Correspondant respectivement aux nœuds i et j, elles sont notées  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  et  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$ . Les composantes des vecteurs déplacements  $(u_i, v_i)$  et  $(u_j, v_j)$  sont définies dans le repère global (oxy).

En reprenant le même raisonnement que celui qui a permis d'écrire l'expression (05) du paragraphe 3 précédent, le système d'équations reliant les composantes, écrites en repère local, des vecteurs forces nodales aux déplacements des nœuds i et j, peut être écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (24)$$

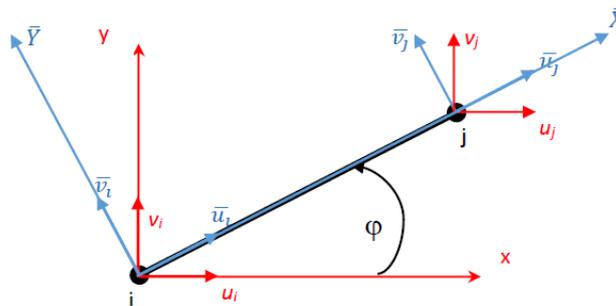


Figure 09 : représentation du repère local, du repère global et des vecteurs composantes associées

On en déduit que la matrice de rigidité de l'élément barre en 2d à deux degrés de liberté par nœud est comme suit :

$$[\bar{K}_e] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

**Remarque importante :** Il est important de souligner que cette matrice  $[\bar{K}_e]$  est écrite dans le repère local de l'élément considéré.

## 6.2 Matrice de rigidité élémentaire de l'élément ressort dans l'espace 2d

En suivant les mêmes démarches que celle du paragraphe précédent ainsi que celle qui a permis d'obtenir l'expression (10) du paragraphe 04, la matrice de rigidité de l'élément ressort en 2d à deux degrés de liberté par nœud, peut être formulée comme suit :

$$[\bar{K}_e] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

avec  $k$  la raideur du ressort

## 6.3 Transformations entre repères local et global

La projection des vecteurs déplacements locaux notées  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  et  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$ , illustrés en figure 09 ci-dessus, sur le repère global (oxy) donne pour les nœuds  $i$  et  $j$  les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{u}_i = c \cdot u_i + s \cdot v_i \\ \bar{v}_i = -s \cdot u_i + c \cdot v_i \\ \bar{u}_j = c \cdot u_j + s \cdot v_j \\ \bar{v}_j = -s \cdot u_j + c \cdot v_j \end{cases} \quad (27)$$

Avec  $c = \cos\varphi$  et  $s = \sin\varphi$

Sous Forme matricielle, le système d'équations précédent peut être écrit:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Ainsi, on en déduit que la matrice  $[T]$  n'est rien d'autre que la matrice de transformation ou de passage du repère local lié à l'élément considéré au repère global lié à la structure.

Il en est de même pour les vecteurs forces locaux qui peuvent être formulés en fonction de leurs composantes dans le repère global comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Sous formes condensées, les expressions précédentes (28) et (29) peuvent être formulées:

$$\{\bar{U}\} = [T]\{U\} \quad (30)$$

$$\text{et } \{\bar{F}\} = [T]\{F\} \quad (31)$$

Par ailleurs, les deux repères (local et global) étant orthonormés, ceci implique que la matrice inverse de la matrice  $[T]$  n'est rien d'autre que sa transposée, telle que :

$$[T]^{-1} = [T]^t$$

Réécrivons également l'expression (24) sous forme condensée telle que :

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}_e]\{\bar{U}\} \quad (32)$$

En remplaçant dans (32),  $\{\bar{F}\}$  et  $\{\bar{U}\}$  par leurs expressions respectives écrites en (31) et (30), on obtient :

$$[T]\{F\} = [\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (33)$$

En multipliant les deux membres de l'équation précédente par  $[T]^t$ , on obtient :

$$[T]^t[T]\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\}$$

Or  $[T]^t[T] = [I]$  : la matrice identité telle que :

$$[T]^t[T]\{F\} = \{F\}$$

On en déduit que :

$$\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (34)$$

On sait par ailleurs que, la relation entre les composantes des vecteurs forces et déplacements peuvent s'écrire dans le repère global comme suit :

$$\{F\} = [K_e]\{U\} \quad (35)$$

avec  $[K_e]$  : la matrice de rigidité élémentaire écrite cette fois ci dans le repère global.

En comparant les expressions (34) et (35), on en déduit par identification l'expression de la matrice  $[K_e]$  en fonction de la matrice de passage  $[T]$ , de sa transposée  $[T]^t$  et de la matrice  $[\bar{K}_e]$  telle que :

$$[K_e] = [T]^t[\bar{K}_e][T] \quad (36)$$

Si on remplace dans l'expression précédente (36) la matrice  $[\bar{K}_e]$  par son expression établie en (25) et la matrice  $[T]$  par son expression qu'on peut déduire de (28), et en effectuant le double produit matriciel, on obtient finalement :

$$[K_e] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & s.c & -c^2 & -s.c \\ s.c & s^2 & -s.c & -s^2 \\ -c^2 & -s.c & c^2 & s.c \\ -s.c & -s^2 & s.c & s^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Pour les structures en treillis bidimensionnelles 2d, c'est l'expression précédente qui sera directement utilisée dans les calculs tels que nous pouvons le constater dans les exemples suivants.

#### 6.4 Exemple 01 : cas d'une structure en treillis formée de barres

Considérons le cas de trois barres articulées à leurs extrémités et assemblées pour former un treillis plan tel celui représenté sur la figure 10 ci-dessous. La géométrie, les caractéristiques mécaniques, les conditions aux limites et le chargement y sont également donnés.

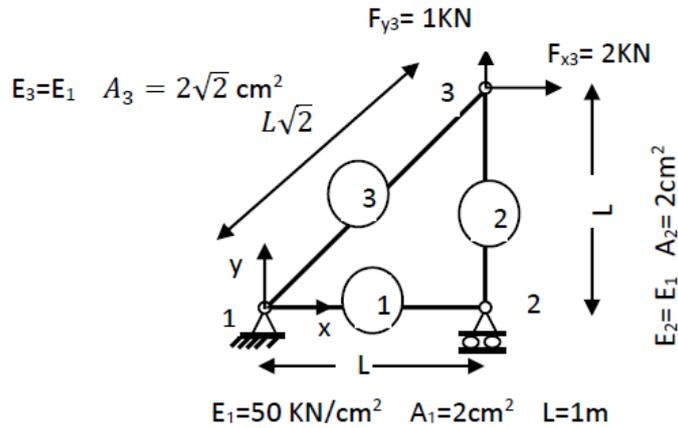


Figure 10 : Système bidimensionnel formé trois barres disposées en treillis pour former une triangulation et soumise aux deux forces indiquées

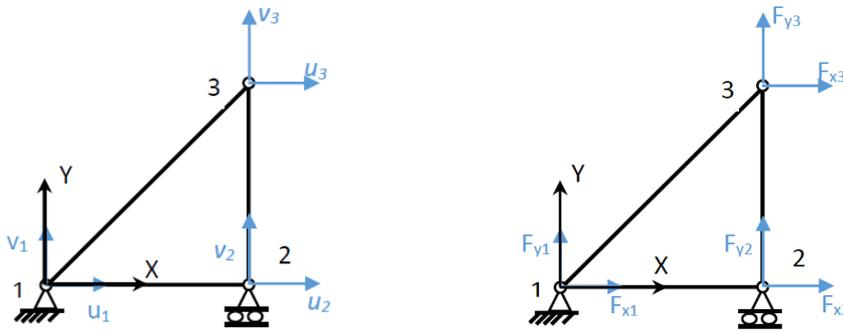


Figure 11 : Vecteurs représentant les composantes dans le repère global OXY des déplacements nodaux (à gauche) et des forces nodales extérieures (à droite)

Notre modèle de structure à étudier est donc à six degrés de liberté. Les vecteurs déplacements nodaux et les vecteurs forces nodales, définis dans le repère global, s'écrivent comme suit :

$$\langle U \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

$$\langle F \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \rangle$$

La relation entre ces deux vecteurs s'écrit grâce à la relation suivante :

$$\{F\} = [K].\{U\}$$

Avec  $[K]$  la matrice de rigidité globale carrée symétrique de dimensions  $(2n * 2n)$  avec  $n$  : le nombre total de nœuds de la structure. Dans le cas du présent exemple, puisque  $n$  est égal à 3, la matrice  $[K]$  est de dimensions  $(6*6)$ . La construction de cette matrice se fait grâce à la construction et à l'assemblage de matrices de rigidité locale de chaque élément. Ces matrices de rigidité élémentaires doivent être écrites dans le repère global. Dans ce qui suit, nous exposons les étapes qui vont permettre de construire cette matrice de rigidité globale.

**Etape 01 : calcul des matrices de rigidités élémentaires en repère global pour chaque élément**

En premier lieu, on pose  $E = E_1$ ,  $A = A_1$  et  $L = L_1$

**Calcul de la matrice de rigidité de l'élément 1  $[K_1]$  :**

Selon les figures 09 et 10 ci-dessus, l'angle d'inclinaison  $\varphi_1$  de l'élément 1 est nul :  $\varphi_1 = 0$ , les termes de la matrice  $[K_1]$  calculés en appliquant l'expression (37) sont comme suit :

$$[K_1] = \frac{E_1 \cdot A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, si on isole l'élément 1, les équations reliant les forces nodales intérieures (exercées par les nœuds 1 et 2 sur la barre 1) aux déplacements de ces nœuds peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

**Calcul de la matrice de rigidité de l'élément 2  $[K_2]$  :**

L'angle d'inclinaison  $\varphi_2$  de l'élément 2 est :  $\varphi_2 = \pi/2$ , les termes de la matrice  $[K_2]$  calculés en appliquant l'expression (37) sont comme suit :

$$[K_2] = \frac{E_2 \cdot A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les équations reliant les forces nodales intérieures (exercées par les nœuds 2 et 3 sur la barre 2) aux déplacements de ces nœuds peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

**Calcul de la matrice de rigidité de l'élément 3  $[K_3]$  :**

L'angle d'inclinaison  $\varphi_3$  de l'élément 3 est :  $\varphi_3 = \pi/4$ , les termes de la matrice  $[K_3]$  calculés en appliquant l'expression (37) sont comme suit :

$$[K_3] = \frac{E \cdot A \cdot \sqrt{2}}{L \cdot \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Les équations reliant les forces nodales intérieures (exercées par les nœuds 1 et 3 sur la barre 3) aux déplacements de ces nœuds peuvent être écrites comme suit (figure 10) :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(3)} \\ F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (40)$$

**Etape 02 : Ecriture des formes expansées des systèmes d'équations précédents**

Les formes expansées des systèmes d'équations précédents (38), (39) et (40) consistent à rajouter, dans chaque système, des équations d'équilibres supplémentaires à coefficients nuls des nœuds qui n'appartiennent pas à la barre considérée. Il s'agit en l'occurrence pour le système (38) du nœud 3 qui n'appartient pas à l'élément 1, pour le système (39) du nœud 1 qui n'appartient pas à l'élément 2, et pour le système (40) du nœud 2 qui n'appartient pas à l'élément 3.

**Forme expansée du système (38) et matrice de rigidité expansée de l'élément 1  $[K_{1exp}]$  :**

Selon la figure 10 ci-dessus, l'élément 1 relie le nœud 1 au nœud 2. Le nœud 3 est le nœud manquant. Ses degrés de liberté sont  $u_3$  et  $v_3$  qui correspondent aux rangées 5 et 6 et aux colonnes 5 et 6 de la matrice de rigidité globale.

$$\begin{pmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (41)$$

La matrice de rigidité expansée de l'élément 1  $[K_{1exp}]$  avec des rangées et colonnes nulles est donc comme suit :

$$[K_{1exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Forme expansée du système (39) et matrice de rigidité expansée de l'élément 2  $[K_{2exp}]$  :**

De la même manière que précédemment, l'élément 2 relie le nœud 2 au nœud 3 (figure 10). Le nœud 1 est le nœud manquant. Ses degrés de liberté sont  $u_1$  et  $v_1$  qui correspondent aux rangées 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2 de la matrice de rigidité globale.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (42)$$

L'expansion de la matrice  $[K_2]$  est donc comme suit :

$$[K_{2exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Forme expansée du système (40) et matrice de rigidité expansée de l'élément 3  $[K_{3exp}]$  :**

L'élément 3 reliant le nœud 1 au nœud 3, le nœud 2 est le nœud manquant. Ses degrés de liberté sont  $u_2$  et  $v_2$  qui correspondent aux rangées 3 et 4 et aux colonnes 3 et 4 de la matrice de rigidité globale.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

L'expansion de la matrice  $[K_3]$  est donc comme suit :

$$[K_{3exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

### Etape 03 : Assemblage des matrices expansées

En plus du principe de la **compatibilité** des déplacements des nœuds où le vecteur déplacement de chaque nœud est considéré comme **unique**, l'assemblage des matrices expansées repose sur un autre principe fondamental qui consiste en **l'équilibre du nœud**. En effet, la somme de toutes les forces internes transmises des éléments vers le nœud ainsi que de celles des charges appliquées (charges extérieures ou réactions d'appuis) est nulle. Ainsi, le vecteur force extérieure appliqué au nœud est égal et opposé à la résultante de toutes les forces internes transmises des barres vers le nœud telles celles exprimées dans les équations (41), (42) et (43). Par conséquent, en additionnant les vecteurs forces nodales internes expansées écrits dans ces équations (41), (42) et (43), on obtient le vecteur forces nodales extérieures

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1}^{(1)} + F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(1)} + F_{y1}^{(3)} \\ F_{x2}^{(1)} + F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(1)} + F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} + F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(2)} + F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Or les nœuds 1 et 2 ne sont chargés que par les réactions extérieures de l'appui double 1 dont les composantes sont les inconnues  $R_{x1}$  et  $R_{y1}$  et de la réaction de l'appui simple 2 dont l'unique composante inconnue est  $R_{y2}$ . Quant au nœud 3, celui-ci est chargé par une force ponctuelle dont les composantes sont  $F_{x3} = 2KN$  et  $F_{y3} = 1KN$ . Ainsi, le vecteur forces globales extérieures aura finalement pour composantes

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ R_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne, les vecteurs déplacements nodaux, nous avons à l'appui du nœud 1 :  $u_1=0$  et  $v_1=0$ , et à l'appui du nœud 2 :  $v_2=0$ . Ainsi, le vecteur déplacement global aura finalement pour composantes inconnues :  $u_2$ ,  $u_3$  et  $v_3$ .

Ainsi, la somme des membres à gauches des équations (41), (42) et (43) permet finalement d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ R_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \left[ [K_{1exp}] + [K_{2exp}] + [K_{3exp}] \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Si on remplace ces matrices expansées par leurs expressions respectives, on aura :

$$[K_{exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

La somme de ces trois matrices expansées donne la matrice de rigidité globale écrite dans le système à résoudre :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ R_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (01') \\ (02') \\ (03') \\ (04') \\ (05') \\ (06') \end{matrix}$$

Les équations (03') (05') et (06') possèdent les inconnues  $u_2$ ,  $u_3$  et  $v_3$ . Le développement de l'équation (03') permet d'obtenir  $u_2 = 0$ . Réécrivons les équations (05') et (06') tout en remplaçant  $u_2$  par sa valeur nulle. On obtient alors :

$$\begin{cases} 2 = \frac{E.A}{2L}(u_3 + v_3) \\ 1 = \frac{E.A}{2L}(u_3 + 3v_3) \end{cases}$$

La résolution de ce sous-système donne :  $u_3 = \frac{5.L}{E.A} = \frac{5 \cdot 100}{50 \cdot 2} = 5cm$  et  $v_3 = -\frac{L}{E.A} = -\frac{100}{50 \cdot 2} = -1cm$

En ce qui concerne les réactions  $R_{x1}$ ,  $R_{y1}$  et  $R_{y2}$  ; celles-ci sont obtenues en remplaçant les déplacements obtenus précédemment par leurs valeurs dans les équations (01') (02') et (04'). Ce qui permet d'obtenir :

$$R_{x1} = -\frac{E.A}{2L}(u_3 + v_3) = -\frac{E.A}{2L}\left(\frac{5.L}{E.A} - \frac{L}{E.A}\right) = -\frac{E.A}{2L}\left(\frac{4.L}{E.A}\right) = -2KN$$

$$R_{y1} = -\frac{E.A}{2L}(u_3 + v_3) = -2KN$$

$$R_{y2} = \frac{E.A}{L}(-v_3) = -\frac{E.A}{L}\left(-\frac{L}{E.A}\right) = +1KN$$

**Calcul des efforts internes dans les barres 1, 2 et 3 :**

**Efforts internes dans la barre 1 :**

La barre 01 reliant les nœuds 1 et 2, les composantes du vecteur déplacements nodaux en repère global sont comme suit :

$$\langle U_1 \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

On voit bien que toutes les composantes de ce vecteur sont nulles. Par conséquent, le produit matriciel de ce vecteur par la matrice de passage  $[T]$  donnée par l'expression(29), donnera également un vecteur déplacements à composantes en repère local nulles :

$$\langle \bar{U}_1 \rangle = \langle \bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

Or l'allongement  $d_1$  de la barre est toujours calculé en repère local, tel que :

$$d_1 = (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) = 0 - 0 = 0$$

Ce qui implique que l'effort interne dans la barre 1 est également nul tel que :

$$N_1 = \frac{E.A}{L}d_1 = 0$$

**Efforts internes dans la barre 2 :**

La barre 02 reliant les nœuds 2 et 3, les composantes du vecteur déplacements nodaux en repère global sont comme suit :

$$\langle U_2 \rangle = \langle u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 5 \quad -1 \rangle$$

Les composantes en repère local de ce vecteur sont obtenues en effectuant le produit matriciel de la matrice de passage  $[T]$  par ce vecteur tel que pour  $\varphi = \pi/2$ ,  $c = \cos\varphi = 0$  et  $s = \sin\varphi = 1$ , on a :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

On obtient donc les composantes locales suivantes

$$\langle \bar{U}_2 \rangle = \langle \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad -1 \quad -5 \rangle$$

Or l'allongement  $d_2$  de la barre est toujours calculé en repère local, tel que :

$$d_2 = (\bar{u}_3 - \bar{u}_2) = -1 - 0 = -1$$

L'allongement  $d_2$  étant négatif. Il s'agit donc d'un raccourcissement dû à un effort interne de compression tel que :

$$N_2 = \frac{E.A}{L}d_2 = \frac{50.2}{100} \cdot (-1) = -1KN$$

**Efforts internes dans la barre 3 :**

La barre 03 reliant les nœuds 1 et 3, les composantes du vecteur déplacements nodaux en repère global sont comme suit :

$$\langle U_3 \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 5 \quad -1 \rangle$$

Les composantes en repère local de ce vecteur sont obtenues en effectuant le produit matriciel de la matrice de passage  $[T]$  par ce vecteur tel que pour  $\varphi = \pi/4$ ,  $c = \cos\varphi = s = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on a :

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = [T] \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc les composantes locales suivantes

$$\langle \bar{U}_3 \rangle = \langle \bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 2\sqrt{2} \quad -3\sqrt{2} \rangle$$

Or l'allongement  $d_3$  de la barre est toujours calculé en repère local, tel que :

$$d_3 = (\bar{u}_3 - \bar{u}_1) = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}$$

L'allongement  $d_3$  étant positif. Il s'agit donc d'un allongement dû à un effort interne de traction tel que :

$$N_3 = \frac{E.A.\sqrt{2}}{L.\sqrt{2}} d_3 = \frac{50.2.\sqrt{2}}{100.\sqrt{2}} \cdot (2\sqrt{2}) = +2,828KN$$

## Chapitre 09

# Modélisation et calculs de structures formées de poutres

### 1 Introduction

Rappelons que du point de vue de la théorie de la résistance des matériaux, une poutre peut être définie comme étant un élément de structure (rectiligne ou courbe), qui peut travailler aussi bien en flexion, en cisaillement, en torsion qu'en compression-traction. Ainsi, toutes les sections transversales de cet élément peuvent être soumises à des moments fléchissants, des moments de torsion, des efforts tranchants ainsi qu'à des efforts normaux. Toutefois, les dimensions de ces sections transversales doivent être faibles devant la longueur de la poutre.

L'objectif de ce chapitre consiste non seulement à introduire l'élément fini linéique à deux nœuds SEG2 de type poutre, mais également à présenter une méthode utilisant ce type d'élément pour le calcul de structures. Sans utiliser de formulations intégrales, les calculs se feront directement sur l'élément réel. Ainsi, nous présenterons une méthode directe et simple de calcul de *la matrice de rigidité élémentaire* écrite en repère local. Après l'opération de transformation ou bien d'écriture de ces matrices de rigidités élémentaires dans le repère global, les matrices obtenues seront assemblées pour former «une matrice de rigidité dite globale» notée  $[K]$  et représentant la rigidité de toute la structure formée par ces éléments. Cette matrice sera ensuite utilisée pour la résolution d'un système global d'équations reliant le vecteur déplacements nodaux  $\{U\}$  au vecteur forces nodales extérieures  $\{F\}$  au telle que :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\} \quad (01)$$

Ce dernier (le *vecteur global de forces nodales*  $\{F\}$ ) représente les forces extérieures appliquées ainsi que les réactions des appuis. La résolution de ce système d'équations doit se faire avec l'introduction de conditions aux limites en déplacements qui consistent à tenir compte des blocages des degrés de liberté des nœuds situés au niveau des appuis.

Par ailleurs, considérons une poutre isostatique, de longueur  $l$ , (figure 01) reposant sur deux appuis et située dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$ . L'axe  $ox$  est porté par l'axe longitudinal (figure 01). Soit une section transversale quelconque située en un point d'abscisse  $x$ .

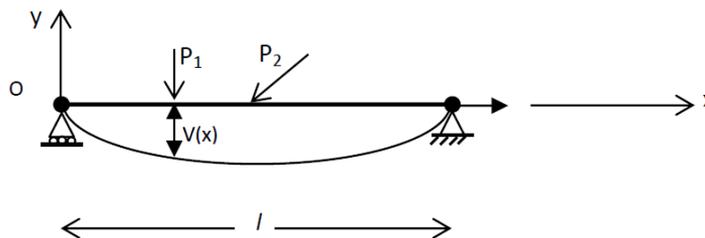


Figure 01 : poutre isostatique sur deux appuis

Les mouvements possibles de ce point ou bien les degrés de libertés (notés par  $ddl$ ) associés à ce point, sont :

- deux translations  $u(x)$  et  $v(x)$  respectivement selon les axes  $ox$  et  $oy$
- une rotation  $\theta(x)$  autour de l'axe  $oz$  perpendiculaire au plan lié au repère  $(o,x,y)$ .

La translation  $u(x)$  de ce point est due à la composante parallèle à l'axe longitudinal  $ox$  (cas de la force inclinée  $P_2$  de la figure 01). La translation  $v(x)$  de ce point est due à la composante parallèle à l'axe  $oy$ . Dans le cas où les charges sont perpendiculaires à l'axe  $ox$  (cas de la force  $P_1$  de la figure 01), les translations  $u(x)$  deviennent nulles. Dans ce cas, nous ne considérerons que les translations  $v(x)$  ainsi que les rotations  $\theta(x)$  telle que :

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

## 2 L'élément poutre

De manière générale, on définit l'élément poutre comme un élément unidimensionnel 1D, à deux nœuds  $i$  et  $j$  tel qu'illustré dans la figure 2 ci-dessous :

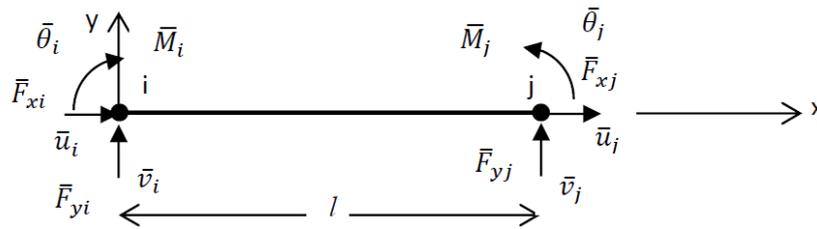


Figure 02 : Élément poutre avec les degrés de libertés associés aux nœuds  $i$  et  $j$  ainsi que les forces nodales correspondantes

Dans un premier temps, considérons uniquement le cas de deux degrés de libertés par nœud :

- la translation  $v(x)$  selon l'axe  $oy$
- la rotation  $\theta(x)$  autour de l'axe  $oz$  perpendiculaire au plan lié au repère  $(o,x,y)$ .

La prise en compte du déplacement axial  $u(x)$  sera considérée plus loin. Ainsi, les quatre *ddl* de notre élément sont :  $v_i$ ,  $\theta_i$ ,  $v_j$  et  $\theta_j$ . Ainsi, puisqu'il existe quatre valeurs nodales, la valeur de  $v(x)$  en un point quelconque d'abscisse  $x$  doit être interpolée avec un polynôme de degré 03 :

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (02)$$

$\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des constantes inconnues que nous pouvons déterminer en utilisant les conditions aux limites telles que :

$$v(0) = \alpha_0 = \bar{v}_i, \rightarrow \bar{v}_i = \alpha_0 = \langle 1 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = \bar{\theta}_i = \alpha_1 + 0, \rightarrow \bar{\theta}_i = \alpha_1 = \langle 0 \ 1 \ 0 \ 0 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(l) = \bar{v}_j = \alpha_0 + \alpha_1 l + \alpha_2 l^2 + \alpha_3 l^3 = \langle 1 \ l \ l^2 \ l^3 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{dv(l)}{dx} = \bar{\theta}_j = \alpha_1 + 2\alpha_2 l + 3\alpha_3 l^2 = \langle 0 \ 1 \ 2l \ 3l^2 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Sous forme matricielle, le système formé par les quatre équations précédentes s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (03)$$

La résolution du système précédent (03) donne :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \bar{v}_i, \\ \alpha_1 &= \bar{\theta}_i, \\ \alpha_2 &= \frac{3}{2}(-\bar{v}_i + \bar{v}_j) - \frac{1}{l}(2\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j) \\ \alpha_3 &= \frac{2}{l^3}(\bar{v}_i - \bar{v}_j) + \frac{1}{l^2}(\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (04)$$

En remplaçant les expressions précédentes de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  dans l'expression (02) de  $v(x)$ , on aura :

$$v(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (05)$$

Ou bien

$$v(x) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right) \bar{v}_i + \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \bar{\theta}_i + \left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right) \bar{v}_j + \left(-\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \bar{\theta}_j \quad (06)$$

Par ailleurs, en introduisant les fonctions d'interpolations  $N_i(x)$ ,  $i=1,4$  sur l'élément poutre  $ij$ , on peut écrire sous forme matricielle ;

$$v(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (07)$$

En comparant les deux expressions précédentes (06) et (07), on peut déduire par identification les expressions de ces fonctions d'interpolations telles que :

$$\begin{cases} N_1(x) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right) \\ N_2(x) = \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \\ N_3(x) = \left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right) \\ N_4(x) = \left(-\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \end{cases} \quad (08)$$

### 3 Matrice de rigidité élémentaire

Rappelons également un résultat important tiré de la théorie des poutres en RDM qui consiste en la proportionnalité de la déformation en flexion vis-à-vis de la courbure de l'élément autrement dit à la dérivée seconde du déplacement  $v(x)$  tel que :

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (09)$$

En remplaçant  $v(x)$  écrit précédemment dans (09) par son expression tirée de (07), on aura :

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2}{dx^2} \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{avec } \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \text{vecteur constant}$$

Ainsi, nous retrouvons la même expression que celle définissant la matrice  $[B]$  définie au chapitre 08 reliant la déformation en point quelconque à l'intérieur de l'élément vecteur déplacements nodaux telle que :

$$\varepsilon_x = [B] \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (11)$$

En comparant les deux expressions précédentes (10) et (11), et en remplaçant les fonctions  $N_i(x)$ ,  $i=1,4$  par leurs expressions écrites en (08), on peut tirer :

$$[B] = -y \frac{d^2}{dx^2} \langle \left(1 - \frac{3}{l^2} x^2 + \frac{2}{l^3} x^3\right) \quad \left(x - \frac{2}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3\right) \quad \left(\frac{3}{l^2} x^2 - \frac{2}{l^3} x^3\right) \quad \left(-\frac{1}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3\right) \rangle \quad (12)$$

La matrice  $[B]$  est connue pour son rôle de matrice de dérivées de fonctions d'interpolation reliant les déformations aux déplacements nodaux.

Par ailleurs, la loi de Hooke, pour un élément fini unidimensionnel, s'écrit :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

avec  $E$  : le module de Young

On rappelle l'expression (8-12a) établie au chapitre 08 :

$$[\bar{K}^e] = \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad \text{avec } [H] = E \text{ et } d\Omega = dx \cdot dS$$

Ceci implique que :

$$[\bar{K}^e] = E \int_0^l dx \int_S [B]^T [B] dS$$

avec  $dS = dy \cdot dz$

Après développement, la matrice de rigidité  $[\bar{K}^e]$  dans le repère local sera égale à :

$$[\bar{K}^e] = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Avec  $I_z$  : le moment d'inertie de la section transversale par rapport à l'axe z

Finalement, au niveau local ou du repère local lié à l'élément considéré  $ij$ , la relation entre le vecteur forces nodales et le vecteur déplacements nodaux s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Si on tient compte des déplacements axiaux (ou bien du troisième degré de liberté  $u_i$ ), on aura :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ii}] & [\bar{K}_{ij}] \\ [\bar{K}_{ji}] & [\bar{K}_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Les sous matrices exposées ci-dessus s'écrivent :

$$[\bar{K}_{ii}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{jj}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$[\bar{K}_{ij}] = [\bar{K}_{ji}]^T$  car la matrice de rigidité est symétrique.

#### 4 Matrice de rigidité dans le repère global

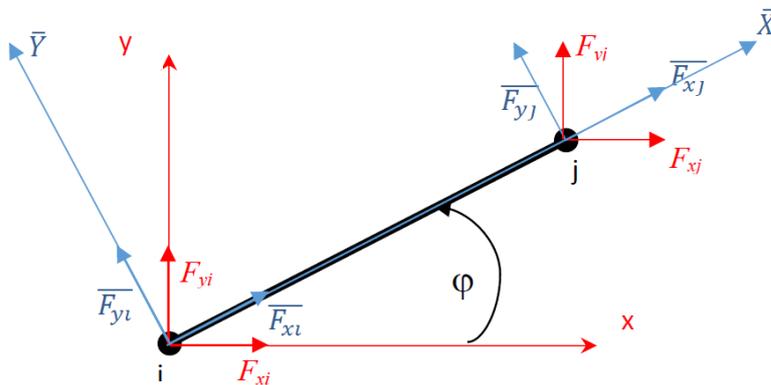


Figure 03 : représentation du repère local, du repère global et des vecteurs composantes associées

Les vecteurs forces locaux peuvent être exprimés en fonction de leurs composantes dans le repère global comme suit :

$$\begin{cases} \bar{F}_{xi} = c.F_{xi} + s.F_{yi} \\ \bar{F}_{yi} = -s.F_{xi} + c.F_{yi} \\ \bar{M}_{zi} = M_{zi} \\ \bar{F}_{xj} = c.F_{xj} + s.F_{yj} \\ \bar{F}_{yj} = -s.F_{xj} + c.F_{yj} \\ \bar{M}_{zj} = M_{zj} \end{cases} \quad (17)$$

Avec  $c = \cos\varphi$  et  $s = \sin\varphi$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Les composantes des vecteurs déplacements locaux notés  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  et  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$  sont illustrés en figure 09 du chapitre 08. Leur projection sur le repère global (oxy) donne pour les nœuds  $i$  et  $j$  les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{u}_i = c.u_i + s.v_i \\ \bar{v}_i = -s.u_i + c.v_i \\ \bar{\theta}_i = \theta_i \\ \bar{u}_j = c.u_j + s.v_j \\ \bar{v}_j = -s.u_j + c.v_j \\ \bar{\theta}_j = \theta_j \end{cases} \quad (18)$$

Sous Forme matricielle, le système précédent peut être écrit:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Sous formes condensées, les expressions précédentes (17) et (19) peuvent être formulées:

$$\{\bar{U}\} = [T]\{U\} \quad (20)$$

$$\text{et } \{\bar{F}\} = [T]\{F\} \quad (21)$$

Ainsi, on voit bien que la matrice  $[T]$  est la matrice de transformation ou de passage du repère local lié à l'élément considéré au repère global lié à la structure.

Par ailleurs, rappelons que si les deux repères (local et global) sont orthonormés, ceci implique que la matrice inverse de la matrice  $[T]$  ne sera rien d'autre que sa transposée, telle que :

$$[T]^{-1} = [T]^t$$

Réécrivons également l'expression (15) sous forme condensée telle que :

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}_e]\{\bar{U}\} \quad (22)$$

En remplaçant dans (22),  $\{\bar{F}\}$  et  $\{\bar{U}\}$  par leurs expressions respectives écrites en (20) et (21), on obtient :

$$[T]\{F\} = [\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (23)$$

En multipliant les deux membres de l'équation précédente par  $[T]^t$ , on obtient :

$$[T]^t[T]\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\}$$

Or  $[T]^t[T] = [I]$  : la matrice identité telle que :

$$[T]^t[T]\{F\} = \{F\}$$

On en déduit que :

$$\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (24)$$

On sait par ailleurs que, la relation entre les composantes des vecteurs forces et déplacements peuvent s'écrire dans le repère global comme suit :

$$\{F\} = [K_e]\{U\} \quad (25)$$

avec  $[K_e]$  : la matrice de rigidité élémentaire écrite cette fois ci dans le repère global.

En comparant les expressions (24) et (25), on en déduit par identification l'expression de la matrice

$[K_e]$  en fonction de la matrice de passage  $[T]$ , de sa transposée  $[T]^t$  et de la matrice  $[\bar{K}_e]$  telle que :

$$[K_e] = [T]^t[\bar{K}_e][T] \quad (26)$$

Ainsi, les termes de la matrice  $[K_e]$  peuvent être obtenus en remplaçant dans l'expression précédente (26) la matrice  $[\bar{K}_e]$  par son expression établie en (15) et la matrice  $[T]$  par son expression qu'on peut déduire de (17), et en effectuant le double produit matriciel.

## 5 Exemples

### 5.1 Exemple 01 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge ponctuelle en son milieu

Soit la poutre représentée dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$  tel qu'illustré en figure 04 ci-dessous. Cette poutre est soumise en son milieu à une charge verticale  $P$  perpendiculaire à son axe longitudinal  $ox$ . Elle est donc modélisée par un maillage composé de deux éléments finis connectés entre eux au niveau du nœud 2 correspondant au point d'application de la charge  $P$ . Il est demandé de calculer:

- 1- la flèche de cette poutre (ou bien la valeur du déplacement vertical  $v_2$  du nœud 2).
- 2- les valeurs des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  des sections d'extrémités
- 3- les valeurs des réactions aux appuis  $F_{y1}$  et  $F_{y2}$ .
- 4- La valeur du moment fléchissant  $M_{2z}$  en repère global ainsi que le moment  $\bar{M}_{22}$  en repère local.

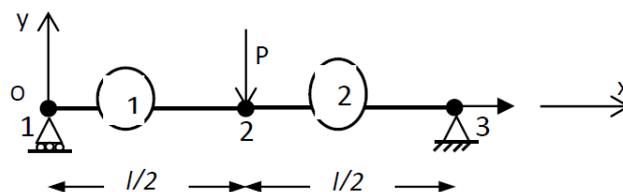


Figure 04: modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et chargée au milieu

**Solution :**

Puisque la charge P est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $ox$ , il n'y a donc pas d'efforts normaux. Ceci implique que

$$u(x) = 0 \quad \forall x$$

Ainsi, nous ne considérerons que deux degrés de libertés par nœud à savoir : le déplacement vertical  $v$  et la rotation  $\theta$ . Le système global d'équations à résoudre sera donc comme suit :

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

Avec

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \text{ la matrice de rigidité globale } [K] \text{ sera de dimension } (6,6)$$

Par ailleurs, les repères locaux liés aux éléments sont tous parallèles au repère global

$$\Rightarrow [T] = [T]^t = [I]$$

$$\Rightarrow [K_1] = [T]^t [\bar{K}_1] [T] = [\bar{K}_1] \quad \text{et} \quad [K_2] = [T]^t [\bar{K}_2] [T] = [\bar{K}_2]$$

Si on applique l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 1 reliant les nœuds 1 et 2 (à 2 ddl par nœud sans déplacements axiaux) est comme suit :

$$\Rightarrow [K_1] = \frac{EI}{(l/2)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(\frac{l}{2}) & -12 & 6(\frac{l}{2}) \\ 6(\frac{l}{2}) & 4(\frac{l}{2})^2 & -6(\frac{l}{2}) & 2(\frac{l}{2})^2 \\ -12 & -6(\frac{l}{2}) & 12 & -6(\frac{l}{2}) \\ 6(\frac{l}{2}) & 2(\frac{l}{2})^2 & -6(\frac{l}{2}) & 4(\frac{l}{2})^2 \end{bmatrix}$$
$$[K^1] = [K^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{11}^1] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l \\ 3l & l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{22}^1] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -3l \\ -3l & l^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K_{12}^1] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 3l \\ -3l & l^2/2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{21}^1] = [K_{12}^1]^T \quad \text{car la matrice de rigidité } [K_1] \text{ est symétrique.}$$

De la même manière, en appliquant l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 2 reliant les nœuds 2 et 3 est comme suit :

$$[K^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{22}^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l \\ 3l & l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{33}^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -3l \\ -3l & l^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K_{23}^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 3l \\ -3l & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix}$$

$[K_{32}^2] = [K_{23}^2]^T$  car la matrice de rigidité  $[K_2]$  est également symétrique.

Assemblage des deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] + [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

En remplaçant les différentes sous matrices par leurs valeurs, on obtient :

$$[K] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3l & 24 & 0 & -12 & 3l \\ 3l & l^2/2 & 0 & 2l^2 & -3l & l^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3l & 12 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites :

$$v_1 = v_3 = 0; \quad \theta_2 = 0; \quad M_{z1} = M_{z3} = 0 \quad \text{et} \quad F_{y2} = -P$$

$$\Rightarrow [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $v_2$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (2), (3) et (6), telles que :

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow & l^2\theta_1 - 3lv_2 = 0 \\ (3) \Rightarrow & \frac{8EI}{l^3}(-3l\theta_1 + 24v_2 + 3l\theta_3) = -P \\ (6) \Rightarrow & 3lv_2 + l^2\theta_3 = 0 \end{cases}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $\theta_1 = -\theta_3$  : on peut facilement vérifier ce résultat en faisant la somme des équations (2) et (6).

$$\text{Par ailleurs, (2)} \Rightarrow \theta_1 = \frac{3v_2}{l} = -\theta_3$$

$$\text{D'autre part (3)} \Rightarrow -2.3.l.\theta_1 + 24.v_2 = -\frac{Pl^3}{8EI}$$

En remplaçant  $\theta_1$  par  $\frac{3v_2}{l}$  dans l'expression précédente, on aura :

$$-6.l.\frac{3v_2}{l} + 24.v_2 = -18v_2 + 24.v_2 = 6v_2 = -\frac{Pl^3}{8EI}$$

$$\begin{aligned} \implies v_2 &= -\frac{Pl^3}{48EI} \\ \implies \theta_1 = -\theta_3 = \frac{3v_2}{l} &= -\frac{3}{l} \cdot \frac{Pl^3}{48EI} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{Pl^2}{16EI} \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{Pl^2}{16EI} \end{aligned}$$

En résolvant le sous-système formé par les équations (1), (4) et (5), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}, F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 tels que :

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (-3l\theta_1 - 12v_2) &= F_{y1} \\ \implies F_{y1} &= \frac{8EI}{l^3} \left( -3l \left( -\frac{Pl^2}{16EI} \right) - 12 \left( -\frac{Pl^3}{48EI} \right) \right) = 1.5P + 2P = 0.5P \end{aligned}$$

$$\text{Donc } F_{y1} = 0.5P$$

De la même manière, le développement de l'équation (5) donnera le même résultat :

$$F_{y3} = 0.5P$$

Quant à l'équation (4), son développement donnera :

$$M_{z2} = \left( \frac{l^2}{2} \theta_1 + \frac{l^2}{2} \theta_3 \right) \frac{8EI}{l^3}$$

$$\text{or } \theta_1 = -\theta_3 \quad \Rightarrow \quad M_{z2} = 0$$

Par contre, si on considère l'élément (1) dans son repère local tel que

$$\frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 (= 0) \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 (= 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} = 0 \\ -P + T_d \\ M_{z2} + M_d \end{Bmatrix}$$

De la dernière équation de ce système, nous pouvons tirer la valeur du moment fléchissant  $M_d$ , considéré ici comme l'action interne de la partie de la poutre située à droite du nœud 2. Donc l'équation (4) de ce système s'écrit :

$$\frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \theta_1 - 3l \cdot v_2 \right) = M_{z2} + M_d$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $M_{z2}$  par leurs valeurs respectives, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \left( -\frac{Pl^2}{16EI} \right) - 3l \cdot \left( -\frac{Pl^3}{48EI} \right) \right) &= 0 + M_d \\ \implies M_d &= \frac{8EI}{l^3} \left( -\frac{Pl^4}{32EI} + \frac{Pl^4}{16EI} \right) = \frac{8EI}{l^3} \frac{Pl^4}{32EI} = \frac{Pl}{4} \end{aligned}$$

Finalement, le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local :

$$\bar{M}_{z2} = M_d = \frac{Pl}{4}$$

## 5.2 Exemple 02 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge uniformément répartie

Soit la poutre représentée dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$  tel qu'illustré en figure 05 ci-dessous. Cette poutre est soumise sur toute sa longueur à une charge uniformément répartie  $q$  agissant perpendiculairement à son axe longitudinal  $ox$ . Cette poutre est modélisée par un maillage composé de

deux éléments finis connectés entre eux au niveau du nœud 2 situé au milieu de cette poutre. Il est demandé de calculer:

- 1- la flèche de cette poutre (ou bien la valeur du déplacement vertical  $v_2$  du nœud 2).
- 2- les valeurs des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  des sections d'extrémités
- 3- les valeurs des réactions aux appuis  $F_{y1}$  et  $F_{y2}$ .
- 4- La valeur du moment fléchissant  $M_{z2}$  en repère global ainsi que le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local.

Nota :  $E=2100000$  MPa,  $I_z = 8356$  cm<sup>4</sup>  $q=5$  KN/ml

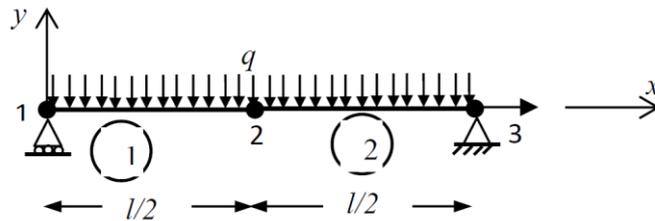


Figure 05: modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et uniformément chargée

### Solution

$$[K^1] = [K^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

Les matrices de rigidité élémentaires sont les mêmes que celles de l'exemple précédent. Il en est de même pour la matrice de rigidité globale :

$$[K] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3l & 24 & 0 & -12 & 3l \\ 3l & l^2/2 & 0 & 2l^2 & -3l & l^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3l & 12 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne la détermination des composantes du vecteur forces nodales équivalentes, la démarche consiste à isoler en premier chaque élément et à représenter les charges appliquées en travée. Par la suite, on remplace, ces charges en travée par les réactions des nœuds supposés comme étant des appuis encastrés et ce, avec changement de signe (figures 06 et 07).

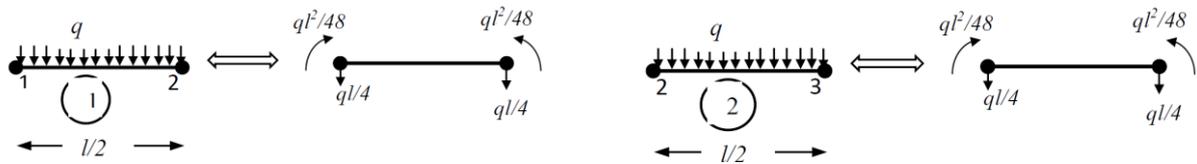


Figure 06: Moments et Forces nodales équivalents aux charges uniformément réparties sur les éléments 1 et 2

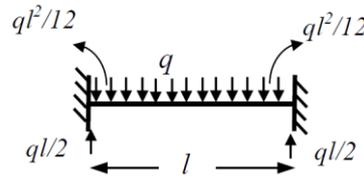


Figure 07: Rappel sur les valeurs des moments et Forces nodales dues aux réactions des appuis et aux charges uniformément réparties  $q$  appliquées sur une poutre de longueur  $l$

Ainsi, en adoptant un sens positif contraire à celui du sens horaire, le vecteur forces nodales équivalentes peut s'écrire :

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\left(\frac{ql}{4} + \frac{ql}{4}\right) \\ \left(-\frac{ql^2}{48} + \frac{ql^2}{48}\right) \\ F_{y3} - \frac{ql}{4} \\ +\frac{ql^2}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\frac{ql}{2} \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{ql}{4} \\ +\frac{ql^2}{48} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système global à résoudre devient :

$$\frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3l & 24 & 0 & -12 & 3l \\ 3l & l^2/2 & 0 & 2l^2 & -3l & l^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3l & 12 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\frac{ql}{2} \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{ql}{4} \\ +\frac{ql^2}{48} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $v_2$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (2), (3) et (6), telles que :

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (l^2\theta_1 - 3lv_2) = -\frac{ql^2}{48} \\ (3) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (-3l\theta_1 + 24v_2 + 3l\theta_3) = -\frac{ql}{2} \\ (6) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (3lv_2 + l^2\theta_3) = \frac{ql^2}{48} \end{cases}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $\theta_1 = -\theta_3$ : on peut facilement vérifier ce résultat en faisant la somme des équations (2) et (6).

La résolution de ce sous-système donne :

$$\theta_1 = -\frac{ql^3}{24EI} = -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^3}{24 \cdot 21000 \cdot 8356} = -1,48 \cdot 10^{-3} \text{ radians}$$

$$v_2 = -\frac{5ql^4}{384EI} = -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^4}{384 \cdot 21000 \cdot 8356} = -0,23 \text{ cm}$$

$$\theta_3 = -\theta_1 = 1,48 \cdot 10^{-3}$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $v_2$  dans les équations (1), (4) et (5), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}$ ,  $F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 et on obtient:

$$(1) \implies F_{y1} = \frac{ql}{2},$$

$$(5) \implies F_{y3} = \frac{ql}{2}$$

De la même manière que l'exemple précédent, le développement de l'équation (4) donnera :

$$M_{z2} = \left( \frac{l^2}{2} \theta_1 + \frac{l^2}{2} \theta_3 \right) \frac{8EI}{l^3}$$

$$\text{or } \theta_1 = -\theta_3 \quad \Rightarrow \quad M_{z2} = 0$$

Par contre, si on considère l'équilibre de l'élément (1) dans son repère local tel que

$$\frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 (= 0) \\ \theta_1 (= -\frac{ql^3}{24EI}) \\ v_2 (= -\frac{5ql^4}{384EI}) \\ \theta_2 (= 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\frac{ql}{4} + T_d \\ \frac{ql^2}{48} + M_d \end{Bmatrix}$$

De la dernière équation de ce système, nous pouvons tirer la valeur du moment fléchissant  $M_d$ , considéré ici comme l'action interne de la partie de la poutre située à droite du nœud 2. Donc l'équation (4) de ce système s'écrit :

$$\frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \theta_1 - 3l \cdot v_2 \right) = \frac{ql^2}{48} + M_d$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $M_d$  par leurs valeurs respectives, on aura :

$$\frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \left( -\frac{ql^3}{24EI} \right) - 3l \cdot \left( -\frac{5ql^4}{384EI} \right) \right) = \frac{ql^2}{48} + M_d$$

$$\implies M_d = \frac{8ql^5}{l^3} \left( -\frac{1}{48} + \frac{15}{384} \right) = \frac{ql^5}{l^3} \left( -\frac{8}{6 \cdot 8} + \frac{15}{6 \cdot 8} \right) - \frac{ql^2}{48} = \frac{7ql^2}{48} - \frac{ql^2}{48} = \frac{6ql^2}{48}$$

Finalement, le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local

$$\bar{M}_{z2} = M_d = \frac{ql^2}{8}$$

### 5.3 Exemple 03 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge ponctuelle non centrée

Soit la poutre représentée dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$  tel qu'illustré en figure 08 ci-dessous. Cette poutre est soumise aux deux tiers de sa longueur (voir figure 07) à une charge verticale  $P$  perpendiculaire à son axe longitudinal  $ox$ . Elle est donc modélisée par un maillage composé de deux éléments finis connectés entre eux au niveau du nœud 2 correspondant au point d'application de la charge  $P$ . Il est demandé de calculer:

- 1- la flèche de cette poutre (ou bien la valeur du déplacement vertical  $v_2$  du nœud 2) ainsi que les valeurs des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  des sections d'extrémités et  $\theta_2$  au droit du point d'application de la force  $P$
- 2- les valeurs des réactions aux appuis 1 et 3 :  $F_{y1}$  et  $F_{y3}$ .
- 3- La valeur du moment fléchissant  $\bar{M}_{z2}$  en repère local.

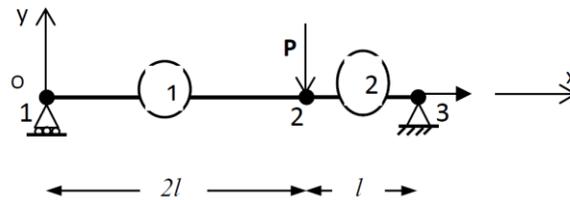


Figure 07: modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et chargée au milieu

#### Solution :

On adopte la même démarche que celle des deux exemples précédents, à savoir : puisque la charge  $P$  est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $ox$ , il n'y a donc pas d'efforts normaux. Ceci implique que nous ne considérerons que deux degrés de libertés par nœud à savoir : le déplacement vertical  $v$  et la rotation  $\theta$ . Le système global d'équations à résoudre sera donc:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

Avec

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \text{la matrice de rigidité globale } [K] \text{ sera de dimension } (6,6)$$

Les repères locaux liés aux éléments sont tous parallèles au repère global

$$\Rightarrow [T] = [T]^t = [I]$$

$$\Rightarrow [K_1] = [T]^t [\bar{K}_1] [T] = [\bar{K}_1] \quad \text{et} \quad [K_2] = [T]^t [\bar{K}_2] [T] = [\bar{K}_2]$$

Si on applique l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 1 reliant les nœuds 1 et 2 (à 2 ddl par nœud sans déplacements axiaux) est comme suit :

$$\Rightarrow [K_1] = \frac{EI_z}{(2l)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(2l) & -12 & 6(2l) \\ 6(2l) & 4(2l)^2 & -6(2l) & 2(2l)^2 \\ -12 & -6(2l) & 12 & -6(2l) \\ 6(2l) & 2(2l)^2 & -6(2l) & 4(2l)^2 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{8l^3} \begin{bmatrix} 12 & 12l & -12 & 12l \\ 12l & 16l^2 & -12l & 8l^2 \\ -12 & -12l & 12 & -12l \\ 12l & 8l^2 & -12l & 16l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{11}^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3l/2 \\ 3l/2 & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{22}^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3/2 & -3l/2 \\ -3l/2 & 2l^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K_{12}^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -3/2 & 3l/2 \\ -3l/2 & l^2 \end{bmatrix}$$

$[K_{21}^1] = [K_{12}^1]^T$  car la matrice de rigidité  $[K_1]$  est symétrique.

De la même manière, en appliquant l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 2 reliant les nœuds 2 et 3 est comme suit :

$$[K^2] = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{22}^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{33}^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K_{23}^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l \\ -6l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

$[K_{32}^2] = [K_{23}^2]^T$  car la matrice de rigidité  $[K_2]$  est également symétrique.

Assemblage des deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] + [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

En remplaçant les différentes sous matrices par leurs valeurs, on obtient :

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3l/2 & -3/2 & 3l/2 & 0 & 0 \\ 3l/2 & 2l^2 & -3l/2 & l^2 & 0 & 0 \\ -3/2 & -3l/2 & 27/2 & 9l/2 & -12 & 6l \\ 3l/2 & l^2 & 9l/2 & 6l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites :

$$v_1 = v_3 = 0; \quad ; \quad M_{z1} = M_{z3} = 0 \quad \text{et} \quad F_{y2} = -P$$

$$\Rightarrow [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ F_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $v_2$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (2), (3), (4) et (6), telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2) \Rightarrow 2l^2\theta_1 - \frac{3l}{2}v_2 + l^2\theta_2 = 0 \\ (3) \Rightarrow -\frac{3l}{2}\theta_1 + \frac{27}{2}v_2 + \frac{9l}{2}\theta_2 + 6l\theta_3 = -\frac{Pl^3}{EI} \\ (4) \Rightarrow l^2\theta_1 + \frac{9l}{2}v_2 + 6l^2\theta_2 + 2l^2\theta_3 = 0 \\ (6) \Rightarrow 6lv_2 + 2l^2\theta_2 + 4l^2\theta_3 = 0 \end{array} \right.$$

Après résolution, on trouve :

$$v_2 = -\frac{4Pl^3}{9EI}$$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = -\frac{4Pl^2}{9EI} \\ \theta_2 = +\frac{2Pl^2}{9EI} \\ \theta_3 = \frac{5Pl^2}{9EI} \end{array} \right.$$

En remplaçant  $v_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , et  $\theta_3$  par leurs valeurs dans les équations (1), (4) et (6), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}$ ,  $F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 tels que :

$$(1) \Rightarrow F_{y1} = \frac{P}{3}$$

$$(6) \Rightarrow F_{y3} = \frac{2P}{3}$$

si on considère l'élément (1) dans son repère local tel que

$$\frac{EI_z}{8l^3} \begin{bmatrix} 12 & 12l & -12 & 12l \\ 12l & 16l^2 & -12l & 8l^2 \\ -12 & -12l & 12 & -12l \\ 12l & 8l^2 & -12l & 16l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 (= 0) \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} = 0 \\ -P + T_d \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix}$$

De la dernière équation de ce système, nous pouvons tirer la valeur du moment fléchissant  $\bar{M}_{z2}$ , considéré ici comme l'action interne de la partie de la poutre située à droite du nœud 2. Donc l'équation (4) de ce système s'écrit :

$$\bar{M}_{z2} = \frac{EI_z}{8l^3} (8l^2 \cdot \theta_1 - 12l \cdot v_2 + 16l^2 \theta_2)$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $\theta_2$  par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\bar{M}_{z2} = \frac{2}{3}Pl$$

#### 5.4 Exemple 04 : cas d'une structure bidimensionnelle formant une rampe uniformément chargée

Soit la structure bidimensionnelle d'une rampe constituée de profilés métalliques de type IPE 300 représentée sur la figure 08 ci-dessous et soumise à une charge verticale appliquée sous forme d'une charge uniformément répartie égale à 6KKN/ml. Il est demandé de calculer:

- 1- les déplacements verticaux  $v_2$  et horizontaux  $u_2$  ainsi que la rotation  $\theta_2$  du nœud 2
- 2- les composantes horizontales et verticales des réactions  $F_{x1}$  et  $F_{y1}$  pour l'appui 1 et  $F_{y3}$  de l'appui 3.

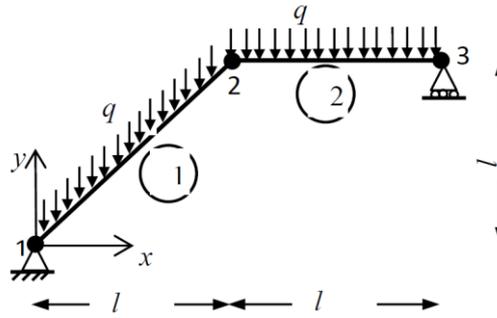


Figure 08 : modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et chargée au milieu

**Nota :**  $E= 210000 \text{ MPa}$  Pour un IPE 300  $I_z = 8356 \text{ cm}^4$  et  $A = 53.8 \text{ cm}^2$

**Solution :**

La charge uniformément répartie  $q$  n'est pas perpendiculaire à l'axe longitudinal de l'élément 1. En effet, dans le repère local lié à cet élément (figure 9), cette charge  $q$  possède deux composantes. La première est portée par l'axe longitudinal  $\overline{OX}$  et engendre des efforts normaux dans les sections transversales. Quant à la seconde composante, celle-ci est portée par l'axe perpendiculaire  $\overline{OY}$ . Elle engendre des efforts tranchants ainsi que des moments fléchissants. Par conséquent, nous devons tenir compte du troisième degré de liberté  $u_i$  tel que chaque nœud  $i$  de cette structure possède, selon le repère global de la figure 08, trois degrés de libertés à savoir : le déplacement horizontal  $u$  selon l'axe  $ox$ , le déplacement vertical  $v$  selon  $oy$  et la rotation  $\theta$  (due au moment fléchissant) autour de l'axe  $oz$  qui est perpendiculaire au repère  $oxy$ . Le système global d'équations à résoudre sera donc:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

$$\text{Avec } \{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{la matrice de rigidité globale } [K] \text{ sera de dimension } (9,9)$$

**Matrice de rigidité élémentaire de l'élément 1 :**

Selon le repère local lié à cet élément 1 reliant les nœuds 1 et 2, la relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux peut être écrite comme suit

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{x1} \\ \overline{F}_{y1} \\ \overline{M}_{z1} \\ \overline{F}_{x2} \\ \overline{F}_{y2} \\ \overline{M}_{z2} \end{Bmatrix} = [\overline{K}^1] \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\overline{K}_{11}] & [\overline{K}_{12}] \\ [\overline{K}_{21}] & [\overline{K}_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \\ \overline{u}_2 \\ \overline{v}_2 \\ \overline{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[\overline{K}^1]$  est de dimension (6,6). Comme mentionné dans l'expression (16) du paragraphe 3, les sous matrices exposées ci-dessus s'écrivent :

$$[\bar{K}_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{-3EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-3EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{-E.A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-3EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$[\bar{K}_{ij}] = [\bar{K}_{ji}]^T$  car la matrice de rigidité est symétrique. Ainsi  $[\bar{K}^1]$  peut être écrite comme suit :

$$[\bar{K}^1] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3I_z}{l^2} & 0 & \frac{-6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3I_z}{l^2} \\ 0 & \frac{3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} \\ \frac{-A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{-3I_z}{l^2} & 0 & \frac{6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{-3I_z}{l^2} \\ 0 & \frac{3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Le passage du repère local lié à l'élément 1 au repère global lié à la structure se fait grâce à la matrice de passage  $[T]$  tel que :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Avec  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  donc  $c = \cos \varphi = s = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ce qui implique :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On rappelle l'expression de la matrice  $[K^1]$  en fonction de  $[\bar{K}^1]$ , telle que :

$$[K^1] = [T]^t [\bar{K}^1] [T]$$

Après développement, on obtient la matrice  $[K^1]$  écrite dans le repère global:

$$[K^1] = \frac{E\sqrt{2}}{2l} \begin{bmatrix} \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\frac{3I_z}{l} & -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\frac{3I_z}{l} \\ \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} & \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} \\ -\frac{3I_z}{l} & \frac{3I_z}{l^2} & 4I_z & \frac{3I_z}{l} & \frac{-3I_z}{l} & 4I_z \\ -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} & \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} \\ \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{-3I_z}{l} & \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{-3I_z}{l} \\ -\frac{3I_z}{l} & \frac{3I_z}{l^2} & 4I_z & \frac{3I_z}{l} & \frac{-3I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire de l'élément 2 :

Selon le repère local lié à cet élément 2 reliant les nœuds 2 et 3, la relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux peut être écrite comme suit

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \\ \bar{F}_{x3} \\ \bar{F}_{y3} \\ \bar{M}_{z3} \end{Bmatrix} = [K^2] \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{22}] & [\bar{K}_{23}] \\ [\bar{K}_{32}] & [\bar{K}_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

avec

$$[\bar{K}_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{33}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{23}] = \begin{bmatrix} \frac{-E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

$[\bar{K}_{32}] = [\bar{K}_{23}]^T$  car la matrice de rigidité est symétrique. Ainsi  $[\bar{K}^2]$  peut être écrite comme suit :

$$[\bar{K}^2] = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} & 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} \\ 0 & \frac{6I_z}{l} & 4I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 2I_z \\ \frac{-A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} & 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} \\ 0 & \frac{6I_z}{l} & 2I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, les axes du repère local lié à l'élément 2 sont tous parallèles au repère global

$$\implies [T] = [T]^t = [I]$$

$$\implies [K^2] = [T]^t [\bar{K}^2] [T] = [\bar{K}_2]$$

Assemblage des deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [K_{21}^1] & [[K_{22}^1] + [K_{22}^2]] & [K_{23}^2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

En remplaçant les différentes sous matrices par leurs valeurs, on obtient :

$$\{F\} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l^2} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l^2} \frac{1}{2} & 2I_z \sqrt{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & 2I_z \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) + A & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{3I_z}{l} & -A & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) + \frac{12I_z}{l^2} & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} + \frac{6I_z}{l} & 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} \\ -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l^2} \frac{1}{2} & 2I_z \sqrt{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} + \frac{6I_z}{l} & 2I_z \sqrt{2} + 4I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 2I_z \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} & 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{l} & 2I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix} \{U\}$$

**Application numérique** : En remplaçant l'aire de la section transversale  $A (=53,8 \text{ cm}^2)$ , le moment d'inertie  $I_z (=8356 \text{ cm}^4)$  ainsi que la longueur  $l (=500 \text{ cm})$  et le module de Young (égal à  $21000 \text{ KN/cm}^2$ ) par leurs valeurs respectives, on obtient finalement le système d'équations suivant :

$$\{F\} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} 801.87 & 795.91 & -1489.0 & -801.87 & -795.91 & -1489.0 & 0 & 0 & 0 \\ 795.91 & 801.87 & 1489.0 & -795.91 & -801.87 & -2.9779 & 0 & 0 & 0 \\ -1489.0 & 1489.0 & 9.92642E+05 & 1489.0 & 1489.0 & 9.92642E+05 & 0 & 0 & 0 \\ -801.87 & -795.91 & 1489.0 & 3061.5 & 795.91 & 1489.0 & 2259.6 & 0 & 0 \\ -795.91 & -801.87 & -1489.0 & 801.87 & 818.71 & -1.45090E+05 & 0 & -16.846 & 4211.4 \\ -1489.0 & -2.9779 & 9.92642E+05 & 1489.0 & -1.45090E+05 & 3.31795E+10 & 0 & -4211.4 & 7.01904E+05 \\ 0 & 0 & 0 & 2259.6 & 0 & 0 & 2259.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16.846 & -4211.4 & 0 & 16.846 & -4211.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4211.4 & 7.01904E+05 & 0 & 4211.4 & 1.40381E+06 \end{bmatrix} \{U\}$$

Les conditions de blocage aux appuis étant  $u_1 = v_1 = v_3 = 0$ , le vecteur déplacements  $\{U\}$  s'écrit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne la détermination des composantes du vecteur  $\{F\}$ , la démarche consiste à isoler en premier chaque élément et à représenter les charges appliquées en travée. Par la suite, on remplace, ces charges en travée par les réactions des nœuds supposés comme étant des appuis encastrés et ce, avec changement de signe (figure 10).

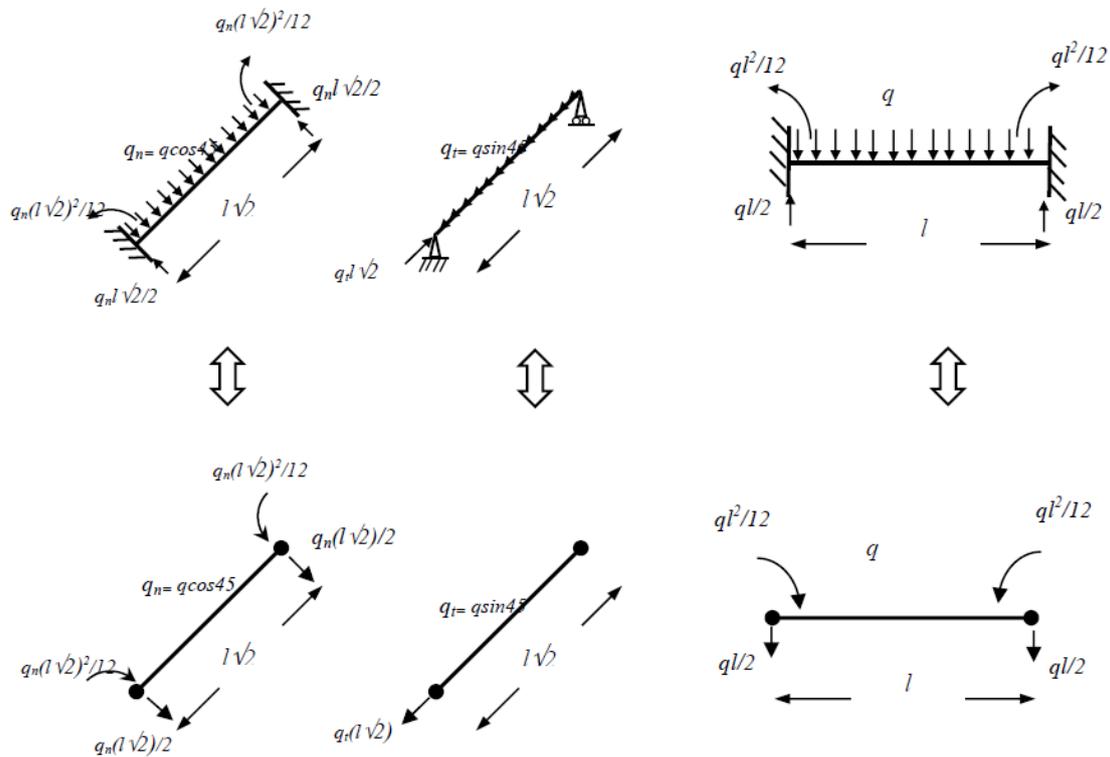


Figure 10 : Moments et Forces nodales équivalents aux charges uniformément réparties sur les éléments 1 et 2

Ainsi, en adoptant un sens positif contraire à celui du sens horaire, le vecteur forces nodales équivalentes peut s'écrire :

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_{x1} + \frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \sin 45 - q_t l \sqrt{2} \cos 45 \\ F_{y1} - \frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \cos 45 - q_t l \sqrt{2} \sin 45 \\ -\frac{q_n (l \sqrt{2})^2}{12} \\ \frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \sin 45 \\ -\frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \cos 45 - \frac{q_l}{2} \\ \frac{q_n (l \sqrt{2})^2}{12} - \frac{q_l^2}{12} \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{q_l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} - \frac{q_l \sqrt{2}}{4} \\ F_{y1} - \frac{3 q_l \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{q_l^2 \sqrt{2}}{12} \\ \frac{q_l \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{q_l}{4} (\sqrt{2} + 2) \\ \frac{q_l^2}{12} (\sqrt{2} - 1) \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{q_l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} - \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \sqrt{2}}{4} \\ F_{y1} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^2 \sqrt{2}}{12} \\ \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500}{4} (\sqrt{2} + 2) \\ \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^2}{12} (\sqrt{2} - 1) \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} - 8,8388 \\ F_{y1} - 26,5165 \\ -1473,1391 \\ 8,8388 \\ -21,3388 \\ 431,4725 \\ 0 \\ F_{y3} - 12,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système global à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} - 8,8388 \\ F_{y1} - 26,5165 \\ -1473,1391 \\ 8,8388 \\ -21,3388 \\ 431,4725 \\ 0 \\ F_{y3} - 12,5 \\ 0 \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (01) \\ (02) \\ (03) \\ (04) \\ (05) \\ (06) \\ (07) \\ (08) \\ (09) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $u_2, v_2$  et  $u_3$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (3), (4), (5), (6), (7) et (9), telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (3)/1489 \Rightarrow 666,65\theta_1 + u_2 + v_2 + 666,65\theta_2 = -0,9893 \\ (4)/1489 \Rightarrow \theta_1 + 2,0561u_2 + 0,5345v_2 + \theta_2 + 1,5175u_3 = 5,9361 \cdot 10^{-3} \\ (5)/1489 \Rightarrow -\theta_1 + 0,5385u_2 + 0,5498v_2 - 97,441\theta_2 + 2,8283\theta_3 = -1,4331 \cdot 10^{-2} \\ (6)/1489 \Rightarrow 666,65\theta_1 + u_2 - 97,441v_2 + 2,22831 \cdot 10^7 \theta_2 + 471,39\theta_3 = 0,2898 \\ (7) \\ \frac{(7)}{2259,6} \Rightarrow u_2 - u_3 = 0 \\ (9) / 4211,4 \Rightarrow v_2 + 166,67\theta_2 + 133,34 \theta_3 = 0 \end{array} \right.$$

Après résolution, on trouve :  $u_2 = u_3 = 5,92 \text{ cm}$   $v_2 = -5,93 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0,0205 \text{ radians} \\ \theta_2 = -0,0024 \text{ radians} \\ \theta_3 = -0,01725 \text{ radians} \end{cases}$$

En remplaçant  $v_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , et  $\theta_3$  par leurs valeurs dans les équations (1), (2) et (8), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}$ ,  $F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 tels que :

$$(1) \Rightarrow F_{x1} = 1,8 \cdot 10^{-12} \text{ KN} \cong 0 \text{ KN}$$

$$(2) \Rightarrow F_{y1} = 35,48 \text{ KN}$$

$$(7) \Rightarrow F_{y3} = 29,874 \text{ KN}$$

## Références bibliographiques

1. Recho Naman, Richard Benjamin et Bares Jonathan «*Méthode de calcul par éléments finis : principe, matrices élémentaires, assemblage : cours et exercices corrigés* » Paris : Ellipses, 2015
2. Alaa Châteauneuf «*Comprendre les éléments finis : principes, formulations et exercices corrigés* » Editions Ellipses 2eme édition 2010
3. Jean Christophe Cuilliere «*Introduction à la méthode des éléments finis : cours et exercices corrigés* » Editions Dunod 2eme édition 2016
4. Francois Frey et Jaroslav Jirousek «*Analyse des structures et milieux continus : Méthode des éléments finis* » volume 06 de la collection du traité de génie civil de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne EPFL. Editions des Presses Polytechniques et Universitaires Romandes 2eme édition 2009
5. David V Hutton, «*Fundamentals of Finite Element Analysis*» New-York : McGraw-Hill Companies, 2004
6. Marc Bonnet et Attilio Frangi «*Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis* » Paris : Editions de l'école polytechnique, 2010
7. Merouane Salhi, Abdelkader Kirad, Mohamed Roudane «*Méthode des éléments finis en génie mécanique : Simulations et applications* » Editions Universitaires Européennes, 2019
8. Olek C Zienkiewicz et Robert L. Taylor : «*The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*» Butterworth-Heinemann editions 7<sup>th</sup> 2013
9. Michel Cazenave «*Méthode des éléments finis: Approche pratique en mécanique des structures* » Paris : Dunod, 2017 2<sup>ème</sup> édition
10. Amar khennane «*Méthode des éléments finis: énoncé des principes de base* » Alger : OPU, 1997
11. Gouri Dhatt, Gilbert Touzot et Emmanuel Lefrançois «*Méthode des éléments finis* » Paris éditions Lavoisier, 2015