

## Corrigé-type de la série 4 STAT II 2023 . 2024

### Corrigé de l'exercice 1

1. La loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètre  $P = 0,01$  et  $n = 100$   $X \sim B(100, 0,01)$   
 $P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$

#### 2. calcul de l'espérance et de la variance de X

$$E(X) = n \times p = 100 \times 0,01 = 1$$

Interprétation : sur 100 appareils, en moyenne, un appareil risque d'être défectueux

#### 3. Calcul de la variance

$$V(X) = n \times p \times q = 100 \times 0,01 \times 0,99 = 0,99$$

#### Calcul de l'écart-type

$$\delta x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,99} = 0,9949$$

#### 4. Calcul des probabilités d'avoir :

##### a. une panne

$$P(X = 1) = C_{100}^1 (0,01)^1 (0,99)^{99} = 0,3697$$

##### b- aucune panne,

$$P(X = 0) = C_{100}^0 (0,01)^0 (0,99)^{100} = 0,366$$

##### c- plus de 4 pannes

$$P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)) = 1 - 0,995 = 0,005$$

#### 5. L'expression de Y en fonction de X

$$Y = 50 X$$

$$E(Y) = 50 E(X) = 50 \times 1 = 50€$$

**50 au lieu de 500**

$$V(Y) = 50^2 V(X) = 50^2 \times 0,99 = 2475€$$

6. Pour pouvoir procéder à l'approximation de la loi binomiale par la loi de poisson, trois conditions doivent être satisfaites :

a.  $n \geq 30$  dans notre cas  $n = 100$  (satisfaite)

b.  $P \leq 0,01$  dans notre cas  $P = 0,01$  (satisfaite)

c.  $n * p < 15$  dans notre cas  $n * p = 100 * 0,01 = 1$  (satisfaite)

Donc, on peut procéder à l'approximation avec  $\lambda = n * p$

la loi de X est donc  $X \sim P(1)$

$$P(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Calcul des probabilités d'avoir :

a. Entre 3 et 5 pannes

$$P(3 \leq x \leq 5) = P(x=3) + P(x=4) + P(x=5) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} + \frac{1^4}{4!} e^{-1} + \frac{1^5}{5!} e^{-1} = 0,0613 + 0,0153 + 0,003 = 0,0796$$

, **b. Moins de 5 pannes,**

$$P(x < 5) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} + \frac{1^2}{2!} e^{-1} + \frac{1^3}{3!} e^{-1} + \frac{1^4}{4!} e^{-1} = 0,3678 + 0,3678 + 0,1839 + 0,0613 + 0,0153 = 0,9961$$

b. Au plus 3 pannes

$$P(x \leq 3) = P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) = 0,3678 + 0,3678 + 0,1839 + 0,0613 = 0,9808$$

**d. Au moins 5 pannes**

$$P(x \geq 5) = 1 - P(x < 5) = 1 - P(x \leq 4) = [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)] = 1 - 0,9961 = 0,0039$$

### Corrigé de l'exercice 3

1. La loi de X : On a deux issues : échec ou succès et l'épreuve est répétée autant de fois nécessaires jusqu'à la réalisation du succès, par conséquent, la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre  $p = 0,02$  et on note  $X \sim G(0,02)$ ,

et on a :  $P(X = k) = p * (1 - p)^{k-1} = (0,02)(0,98)^{k-1}$ .

1. Calcul de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,02} = 50$$

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-(0,02)}{(0,02)^2} = 2450$$

2. La probabilité que le tireur touche la cible

a. au premier tir est

$$P(x=1) = (0,02)(0,98)^{1-1} = 0,02$$

b. Avant le troisième tir

$$P(x < 3) = P(x=1) + P(x=2) = (0,02)(0,98)^{1-1} + (0,02)(0,98)^{2-1} = 0,02 + 0,0196 = 0,0396$$

**C. Après le troisième tir**

$$P(x > 3) = 1 - P(x \leq 3) = 1 - [P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)] = 1 - [0,0396 + 0,02 * 0,98^{(3-1)}] = 1 - 0,058808 = 0,9411$$

### Corrigé de l'exercice 4

La variable aléatoire X suit une loi normale de paramètres  $E(X) = 20$  et  $\sigma(X) = 5$ , on écrit

$$X \sim N(20, 5).$$

$$\text{On pose } Z = \frac{X-20}{5}$$

$$Z \sim N(0, 1)$$

a. Calculer la probabilité des administrations dont la consommation de papier est :

1. moins de 10 rames par jour

$$P(X < 10) = P\left(Z < \frac{10-20}{5}\right)$$

$$= P(Z < -2)$$

$$= F_Z(-2)$$

$$= 1 - F_Z(2)$$

$$= 1 - 0,9772 = 0,0228$$

$$P(X < 10) = 0,0228$$

## 2. Plus de 30 rames par jour

$$P(X > 30) = P\left(Z > \frac{30-20}{5}\right)$$

$$= P(Z > 2)$$

$$= 1 - P(Z \leq 2)$$

$$= 1 - F_Z(2)$$

$$= 1 - 0,9772$$

$$= 0,0228$$

$$\mathbf{P(X > 30) = 0,0228}$$

### b..Détermination de la consommation maximale de la moitié des administrations

Il s'agit de déterminer la valeur de C, tel que :

$$P(X \leq c) = 0,5 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{c-20}{5}\right) = 0,5$$

$$\Rightarrow F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,5$$

$$\begin{aligned} & \frac{c-20}{5} = 0 \\ \Rightarrow c &= 20 \end{aligned}$$

Donc la consommation maximale de 50% des administrations est de 20 rames.

### c. Détermination du niveau de consommation où se trouvent 33% des administrations

On cherche à calculer c telle que :

$$\begin{aligned} P(X > c) = 0,33 & \Rightarrow P\left(Z > \frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\ & \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\ & \Rightarrow 1 - F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,33 \\ & \Rightarrow F_Z\left(\frac{c-20}{5}\right) = 0,67 \\ & \Rightarrow \frac{c-20}{5} = 0,44 \\ & \Rightarrow c = \mathbf{22,2} \end{aligned}$$

Donc 33% des administrations se trouvent au dessus du seuil de consommation de 22,5 litres.

### Corrigé de l'exercice 4

La variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = \frac{1}{10} = 0,1$ , on écrit

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ .

tel que  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ,  $\lambda > 0$ .

1. calcul de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1} = 10$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(0,1)^2} = 100$$

2. Calcul de la probabilité d'attendre plus de dix minutes

On a :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$p(X > 10) = 1 - p(X \leq 10) = 1 - (1 - e^{-0,1(10)}) = e^{-1} = 0,37$$

$$p(X > 10) = 0,37$$

3. Calcul de la probabilité d'attendre entre dix et vingt minutes

$$P(10 \leq X \leq 20) = \int_{10}^{20} (0,1 e^{-0,1x}) = P(X \leq 20) - P(X \leq 10)$$

=

$$= (1 - P(X > 20)) - (1 - P(X > 10))$$

$$= e^{-1} - e^{-2} = 0,23$$

$$P(10 < X < 20) = 0,23$$