Exercice №1 (5pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant :

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{1}^{+\infty} \frac{e^n}{n} x^n.$$

1) La fonction f est définie en $x = 2$.

2) $f'(0) = e$

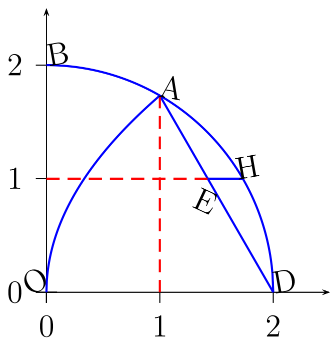
3) $\displaystyle\iint_D 3dxdy = 2\pi$, $\displaystyle\iint_D ydxdy = 0$, où D : disque de centre $O(0,\ 0)$ et de rayon 1.

4) L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^2(1+x^2)} dx$ est convergente.

Exercice №2 (8pts)

La courbe (OA) est définie par $y = \sqrt{3x}$
La courbe (BAHD) : partie du cercle $x^2 + y^2 = 4$
1) Calculer l'aire des figures : (OABO) et (AHEA)

2) Calculer $\displaystyle\iint_{OAEDO} xydxdy$

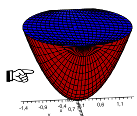


(D) est délimité par deux surfaces S_1 et S_2.

S_1 : partie du paraboloïde $z = x^2 + y^2$

S_2 : partie du plan $z = 3$

3) Calculer Aire(S_1)



corps D

Exercice №3 (7pts)

Schématiser le domaine d'intégration puis Intervertir l'ordre d'intégration :

1) $\displaystyle\int_0^3 \left[\int_{-1}^2 f dx\right] dy$ 2) $\displaystyle\int_0^5 \left[\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{y}{2}} f dx\right] dy$

3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left[\int_{-2+\sqrt{1-y^2}}^{2-\sqrt{1-y^2}} f dx\right] dy$ 4) $\displaystyle\int_{-2}^2 \left[\int_{-4}^{-x^2} f dy\right] dx$

✓Bon courage

Solution et barème

Exercice №1 (5pts)

☞ 1)Faux ✓.......sur 0.5 pts.

Car 2 n'appartient pas à $]-R, \quad R[= \left]-\frac{1}{e}, \quad \frac{1}{e}\right[$ ✓.......sur 0.5 pts.

$(a_n = \frac{e^n}{n}\ , \qquad R = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e})$

. ☞ 2)Vraie ✓.......sur 0.5 pts.

Car $f'(x) = \sum_{1}^{+\infty} e^n x^{n-1}$ ce qui entraine $f'(0) = e$✓.......sur 0.5 pts.

☞ 3)-1) $\iint_D ydxdy = 0$ Faux ✓.......sur 0.5 pts.

Car $\iint_D 3dxdy = 3 \iint_D dxdy = 3$ Aire $(D) = 3\pi$ ✓.......sur 0.5 pts.

☞ 3)-2) $\iint_D ydxdy = 0$ Vraie ✓.......sur 0.5 pts.

Car le centre de gravité $G(x_G, \quad y_G)$ de (D) coïncide avec $O(0,0)$, donc

$y_G = 0 = \dfrac{\iint_D ydxdy}{\iint_D dxdy}$✓.......sur 0.5 pts.

☞ 4)Vraie ✓.......sur 0.5 pts.

Car pour tout $x \geq 1$ on a $\frac{1}{(1+x^2)} \leq 1$ et $e^{-\sqrt{x}} \leq 1$

Ce qui donne cette comparaison

$\frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^2(1+x^2)} \leq \frac{1}{x^2}$ comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

Par comparaison $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{x^2(1+x^2)} dx$ converge✓.......sur 0.5 pts.

Exercice №2 (8pts)

☞ D'abord on commence par donner les points d'intersection et la droite (AD)

$$\underbrace{A(1,\sqrt{3}), \quad H(\sqrt{3},1), \quad D(2,0), \quad (AD) : y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}, \quad E\left(\frac{6-\sqrt{3}}{3}, \ 1\right)}_{\checkmark \quad 1\text{pt}}.$$

☞ Aire $(OABO)$=$\iint_{(OABO)} dxdy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{3x}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right] dx$✓...sur 1 pt.

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{4-x^2} - \sqrt{3x}\right] dx = \underbrace{\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 \sqrt{3x}dx}_{I_1}$$ ✓...sur 0.5 pt

Pour calculer I_1, on pose $x = 2\sin t$, on obtient :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2(t)dt = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{3x}dx = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

D'où, Aire $(OABO)$=$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$✓...sur 0.5 pts

☞ Aire $(EHDE)$=$\displaystyle\iint_{(EHDE)} dxdy=\int_{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\left[\int_{-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}^{1} dy\right]dx+\int_{\sqrt{3}}^{2}\left[\int_{-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right]dx$✓1.5 pt.

Une autre méthode

$$\text{Aire } (EHDE)=\iint_{(EHDE)} dxdy=\int_0^1\left[\int_{\frac{y-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} dx\right]dy \checkmark 1.5 \text{ pt}$$

$$\text{Aire } (EHDE)=I_1-\int_0^1\frac{y-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}dy=\frac{\pi}{3}-2+\frac{2\sqrt{3}}{3}.\checkmark 0.5 \text{ pts}$$

☞ 2) $\displaystyle\iint_{OAHDO} xydxdy=\int_0^{\sqrt{3}}\left[\int_{\frac{y^2}{3}}^{\sqrt{4-y^2}} xydx\right]dy$✓1.5 pt.

Ou bien

$$\iint_{OAHDO} xydxdy=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{3x}} xydy\right]dx+\int_1^2\left[\int_0^{\sqrt{4-x^2}} xydy\right]dx \checkmark 1.5 \text{ pt.}$$

☞ Pour le deuxième sujet (ELT-ELM)

Méthode 1

$$\text{Aire } (AHEA)=\iint_{(AHEA)} dxdy=\int_1^{\sqrt{3}}\left[\int_{\frac{y-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} dy\right]dx \checkmark 1.5 \text{ pt}$$

$$\text{Aire } (AHEA)=\underbrace{\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{4-y^2}dy}_{J_1}-\underbrace{\int_1^{\sqrt{3}}\frac{y-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}dy}_{J_2}$$

Pour calculer J_1, on pose $y=2\sin t$, on obtient :

$$J_1=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2(t)dt=\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Aire } (AHEA)=\frac{\pi}{3}+2-\frac{5\sqrt{3}}{3}\checkmark 0.5 \text{ pt.}$$

Méthode 2

$$\text{Aire } (AHEA)=\iint_{(AHEA)} dxdy=\int_1^{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}\left[\int_{-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} dy\right]dx+\int_{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}\left[\int_1^{\sqrt{4-x^2}} dy\right]dx \checkmark 1.5 \text{ pt.}$$

☞ 2) $\displaystyle\iint_{OAEDO} xydxdy=\int_0^{\sqrt{3}}\left[\int_{\frac{y^2}{3}}^{\frac{y-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}} xydx\right]dy$✓1.5 pt.

Ou bien

$$\iint_{OAHDO} xydxdy=\int_0^1\left[\int_0^{\sqrt{3x}} xydy\right]dx+\int_1^2\left[\int_0^{-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}} xydy\right]dx \checkmark 1.5 \text{ pt.}$$

☞ 3) Aire (S_1)=$\displaystyle\iint_B\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$

Aire (S_1)=$\displaystyle\iint_B\sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy$✓0.25 pts.

où (B) la projection de (S_1) sur le plan (oxy). Donc (B) est un disque de centre $(0,0)$ de rayon $\sqrt{3}$✓0.25 pts.

En utilisant les coordonnées polaires, on pose $x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta$

$$\text{Aire } (S_1)=\iint_B r\sqrt{1+4r^2}drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{1+4r^2}dr\right]d\theta\checkmark 0.5 \text{ pts.}$$

Ou bien

$$\text{Aire } (S_1)=\iint_B \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left[\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}} dy\right]dx\checkmark 0.5 \text{ pts.}$$

Exercice №3 (7pts)

1) $\int_0^3\left[\int_{-1}^2 fdx\right]dy = \int_{-1}^2\left[\int_0^3 fdy\right]dx\checkmark 0.5$ pts le schéma sur 0.5 pts.

2) $\int_0^5\left[\int_{\frac{y}{4}}^{\frac{y}{2}} fdx\right]dy = \int_0^{\frac{5}{4}}\left[\int_{2x}^{4x} fdy\right]dx + \int_{\frac{5}{4}}^{\frac{5}{2}}\left[\int_{2x}^{5} fdy\right]dx\checkmark 1.25$ pts schéma 0.75 pts.

3) $\int_{-2}^{-1}\left[\int_{-1}^{-\sqrt{1-(x+2)^2}} fdy\right]dx + \int_{-2}^{-1}\left[\int_{\sqrt{1-(x+2)^2}}^{1} fdy\right]dx + \int_1^2\left[\int_{-1}^{-\sqrt{1-(x-2)^2}} fdy\right]dx +$
$\int_1^2\left[\int_{\sqrt{1-(x-2)^2}}^{1} fdy\right]dx + \int_{-1}^1\left[\int_{-1}^1 fdy\right]dx\checkmark 1$ pts schéma 1 pts.

4) $\int_{-4}^0\left[\int_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{-y}} fdx\right]dy\checkmark 1.25$ pts schéma 0.75 pts.