Correction de l'examen

S3 M1 EMF.

Exercice (14 pts).

Partie 1,

x : proportion investie dans l'actif risqué 1.

$(1-x)$: " " " " " 2.

a)- le rendement de PF composé des actifs risqués 1 et 2.

$$E(P) = x\,E(r_1) + (1-x)\,E(r_2)$$ (1)

b) la variance de PF composé des actifs 1 et 2.

$$Var(P) = \sigma_p^2 = x^2\sigma_1^2 + (1-x)^2\sigma_2^2 + 2x(1-x)\,\sigma_1\sigma_2\cdot corr(1,2)$$ (1)

c)- la composition x et $(1-x)$ de PF à variance minimale.

le risque est minimum $\Rightarrow \frac{d\sigma_p^2}{dx} \cdot \frac{x}{\sigma_p^2} = 0 \Rightarrow$ (1)

$$2\sigma_1^2 x - 2(1-x)\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2\, corr(1,2) - 4x\,\sigma_1\sigma_2\, corr(1,2) = 0$$

$$\boxed{x = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2\, corr(1,2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\, corr(1,2)}}$$ (1,5) - (1)

$$1-x = 1 - \boxed{\frac{-\sigma_1\sigma_2\, corr(1,2) + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\, corr(1,2)}}$$ (0,5)

Remarques:

lorsque la $corr(1,2) = 0 \Rightarrow x = \frac{\sigma_2^2 + 0}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 0}$

lorsque la $corr(1,2) = -1$.

$$x = \frac{\sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$ (1)

Partie 2

Corrélation $= 0$ ($Corr(1,2) = 0$).

$$x = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \Bigg| \quad AN: \; x = \frac{0,3^2}{0,15^2 + 0,3^2} = 0,8$$

(0,25)

$$(1 - x) = 1 - 0,8 = 0,2$$

(0,25)

$$E(r_p) = x\,E(r_1) + (1-x)\,E(r_2)$$
$$= 0,8 \times 0,1 + 0,2 \times 0,16 = 0,08 + 0,032 =$$
$$= 11,2\ \%$$

(0,25)

$$\sigma_p^2 = x^2 \sigma_1^2 + (1-x)^2 \sigma_2^2 + 0$$
$$= 0,8^2 \cdot (0,15)^2 + \left((0,2)^2 \times (0,3)^2\right) =$$
$$= 0,0144 + 0,0036 = 1,8\%$$

(0,75)

$$\sigma_p = \sqrt{1,8\%} = 0,134 = 13,4\ \%$$

$Corr(1,2) = -1$.

$$x = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{0,3}{0,45} = 0,67$$

(0,25)

$$1 - x = 1 - 0,67 = 0,33$$

(0,25)

$$E(r_p) = x\,E(r_1) + (1-x)\,E(r_2)$$
$$= 0,67 \times 0,1 + 0,34 \times 0,16 = 12,14\ \%$$

(0,25)

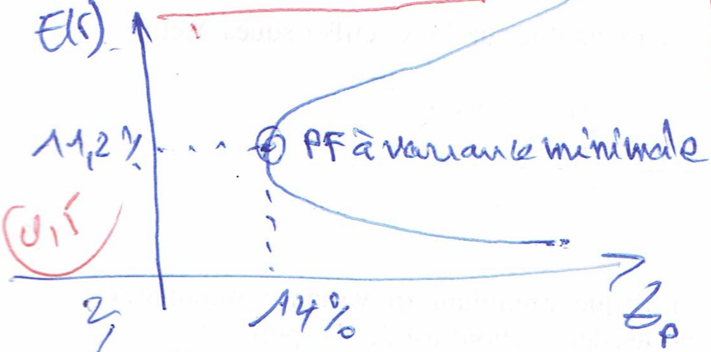
$$\sigma_p^2 = \left(x\,\sigma_1 - (1-x)\,\sigma_2\right)^2$$
$$= \left[(0,67 \times 0,15) - (0,33 \times 0,3)\right]^2$$
$$= (0,1 - 102)^2 \simeq (0,000)^2$$

(0,75)

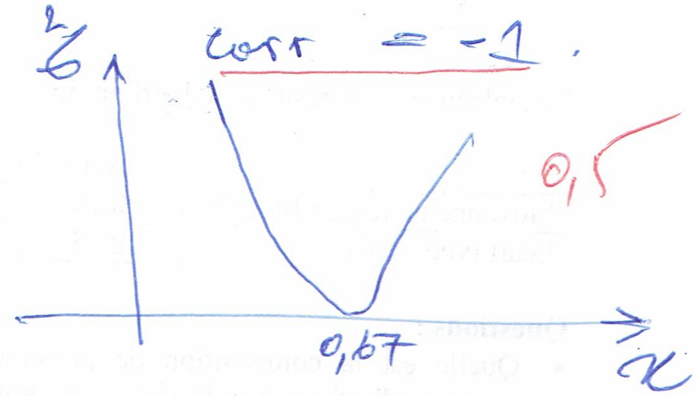
$$\sigma_p = \sqrt{(0,000)^2} = 0,000$$

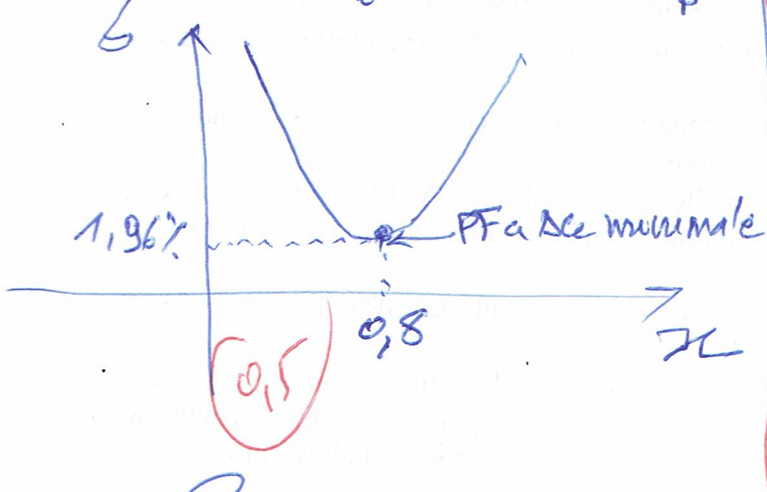
La représentation graphique

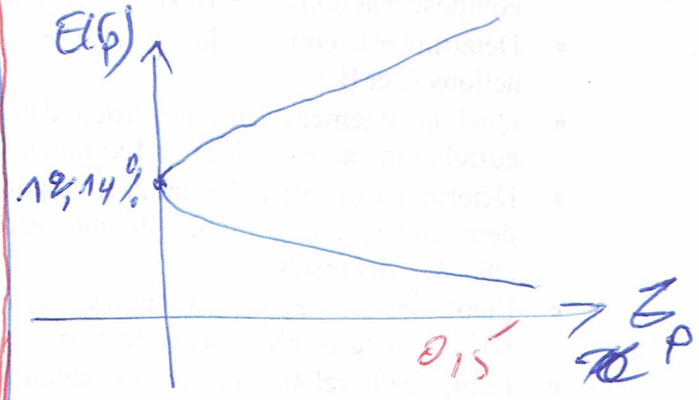
Corr = 0



Corr = -1







Quelques interprétations :

(1) Nous constatons que les proportions x et $(1-x)$ qui annulent le risque de PF sont identiques aux proportions de PF à variance minimale.

2 pts

(2). lorsque la $Corr(1,2) = 0$,
pour un risque $\sigma = 14\,\%$, nous obtiendrons un rendement de $11,2\,\%$

la $Corr(1,2) = -1$.
lorsque le risque $\sigma = 0$, nous obtiendrons un rendement supérieur $= 12,14\,\%$

⇒ ~~c'est~~ la raison pour laquelle le rendement est supérieur est que les rendements sont inversement corrélés.
comme la relation inverse est parfaite, le coefficient de corrélation $= -1$ ⇒ un rendement meilleur.