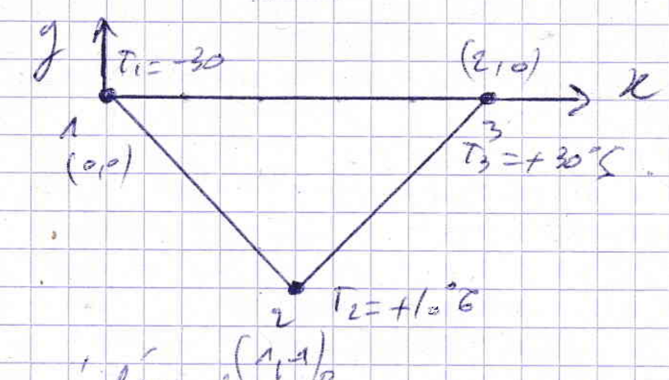
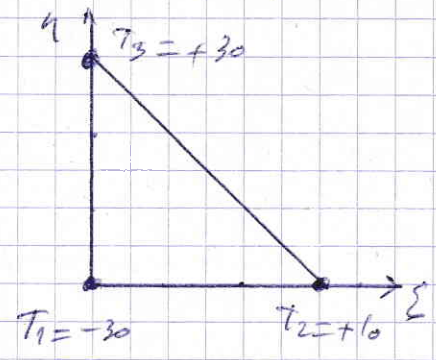
Exercice 01



élément réel :



élément de référence

1°) $T(x,y)$ (01 pts)

Etape 01 : On interpole dans l'élément de référence

$$T(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta).T_i = (1-\xi-\eta).T_1 + \xi T_2 + \eta T_3$$

$$T(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)(-30) + \xi.10 + \eta(30)$$

$$T(\xi,\eta) = -30 + 40\xi + 60.\eta \quad (01) \quad 0{,}5\ pt$$

Etape 02 : $x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta).x_i = N_1 0 + N_2.1 + N_3.2$

$$x(\xi,\eta) = \xi.1 + \eta.2 \Rightarrow \boxed{x(\xi,\eta) = \xi + 2\eta} \quad (2) \quad 0{,}5\ pts$$

Etape 03 : $y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta).y_i = N_1.0 + N_2(-1) + N_3.0$

$$\boxed{y(\xi,\eta) = -\xi} \quad (3) \quad 0{,}5\ pts$$

Etape 03 : on inverse les relations (2) et (3)

$(3) \Rightarrow \boxed{\xi(x,y) = -y}$ (4) 0,5 pt et $(2) \Rightarrow 2\eta = x - \xi = x + y$

$$\Rightarrow \boxed{\eta(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)} \quad (5) \quad 0{,}5\ pt$$

Etape 04 : On remplace (04) et (05) dans (01).

$$\Rightarrow T(\xi(x,y), \eta(x,y)) = -30 + 40(-y) + \frac{60}{2}(x+y)$$

$$\Rightarrow T(x,y) = -30 - 40y + 30x + 30y$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x,y) = -30 - 10y + 30x} \quad 0{,}5\ pts$$

2°) Sans passer par l'élément de référence

$T(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$ les inconnues sont a_0, a_1 et a_2

Il y a trois inconnues, il nous faut trois équations :

$$\begin{cases} T(x_1, y_1) = T_1 & (1) \\ T(x_2, y_2) = T_2 & (2) \\ T(x_3, y_3) = T_3 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T(0,0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = -30 \Rightarrow \boxed{a_0 = -30} & (1') \ 1\,pt \\ T(1,-1) = a_0 + a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot (-1) = +10 & (2') \\ T(2,0) = a_0 + a_1 \cdot 2 + \cancel{a_2 \cdot 0} = +30 & (3') \end{cases}$$

$(2') \Rightarrow a_1 - a_2 = 10 + 30 \Rightarrow a_1 - a_2 = +40. \quad (2'')$

$(3') \Rightarrow 2a_1 = 30 - (-30) = +60 \Rightarrow a_1 = +\frac{60}{2}$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = +30}$ 01 pt

$(2'') \Rightarrow a_1 - a_2 = +40 \Rightarrow 30 - a_2 = +40 \Rightarrow -a_2 = 40 - 30$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = -10}$ 01 pt

3°) Calculer l'intégrale $I_1 = \int_A y^2 \, dx \cdot dy = \int_{A_{ref}} y^2(\xi, \eta) \cdot \det[J] \cdot d\xi \, d\eta$

or $[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-0) & (-1-0) \\ (2-0) & (0-0) \end{pmatrix} =$

$\Rightarrow \det(J) = 2$ or $y(\xi, \eta) = -\xi \Rightarrow y^2(\xi, \eta) = \xi^2$

$\Rightarrow I_1 = 2 \int_{A_{ref}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$

Si on adopte le schéma d'intégration à 3 pts de Gauss ($r = 3$) du tableau 01 tel que $w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{6}$ et $(\xi_1, \eta_1) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ $(\xi_2, \eta_2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ et $(\xi_3, \eta_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$, on aura

$I_1 = 2 \sum_{i=1} w_i \, y^2(\xi_i, \eta_i) = 2 \times \frac{1}{6} \cdot \left(\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right)$

$I_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{3 \times 9} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4 \right)$

$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{3 \times 9} \left(\frac{1}{2} + 4 \right) = \frac{1}{3 \times 9} \left(\frac{9}{2} \right) = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{I_1 = \frac{1}{6}}$

Corrigé de l'exercice 02 :

1°) En passant par l'élément de référence

1 — 2 — 3 → x élément réel.

$u_1 = 0$, $x_1 = 0$; $u_2 = 6mm$, $x_2 = 1{,}5m$; $u_3 = 21mm$, $x_3 = 3m$

1 — 2 — 3 → ξ élément de référence.

$\xi = -1$, $u_1 = 0$; $\xi = 0$, $u_2 = 6mm$; $\xi = +1$, $u_3 = 21mm$

Etape 01 : On interpole dans l'élément de référence

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi).u_i = N_1(\xi).\cancel{u_1} + N_2(\xi)\,u_2 + N_3(\xi).u_3$$

$$u(\xi) = (1-\xi^2).u_2 + \frac{\xi}{2}(1+\xi).u_3$$

$$= (1-\xi^2).6 + \frac{\xi}{2}(1+\xi).21$$

$$\Rightarrow \boxed{u(\xi) = \frac{9}{2}\xi^2 + \frac{21}{2}\xi + 6} \quad (1) \qquad 01\,pt$$

Etape 02 : $x(\xi) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi).x_i = N_1(\xi).0 + N_2(\xi)\frac{3}{2} + N_3(\xi).3$

$$x(\xi) = (1-\xi^2).\frac{3}{2} + \frac{\xi}{2}(1+\xi)\,3$$

$$\Rightarrow \boxed{x(\xi) = \frac{3}{2}(1+\xi)} \qquad 0{,}5\,pts \quad (02)$$

Etape 03 : On inverse la relation précédente

$$\boxed{\xi(x) = \frac{2}{3}x - 1} \quad (03) \qquad 0{,}5\,pts$$

Etape 04 : On remplace (03) dans (01).

$$u(\xi(x)) = \frac{9}{2}\xi^2 + \frac{21}{2}\xi + 6 = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 + \frac{21}{2}\left(\frac{2}{3}x - 1\right) + 6$$

Après développement

$$\boxed{u(x) = 2x^2 + x} \qquad 01\,pt.$$

2°) Interpolation directe via les polynômes de Lagrange

$$u(x) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x).u_i \quad \text{avec} \quad N_i(x) = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$u(x) = \cancel{N_1(x) \cdot 0} + N_2(x) \cdot u_2 + N_3(x) \cdot u_3$

$$N_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{3} \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)} \cdot \frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)}{(\frac{3}{2}-0)} \cdot \frac{(x-3)}{(\frac{3}{2}-3)} =$$

$$\boxed{N_2(x) = -\frac{4}{9} \cdot x(x-3)}$$ (01 pt)

$$N_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^{3} \frac{(x-x_j)}{(x_3-x_j)} = \frac{(x-x_1)}{(x_3-x_1)} \cdot \frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)}{(3-0)} \cdot \frac{(x-3/2)}{(3-3/2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_3(x) = \frac{2}{9} x \cdot (x - 3/2)}$$ (1 pt)

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{4}{9} x(x-3) \cdot u_2 + \frac{2}{9} x \cdot (x - 3/2) \cdot u_3$$

$$\Rightarrow u(x) = -\frac{4}{9} x(x-3) \cdot 6 + \frac{2}{9} x(x - 3/2) \cdot 21$$

Après développement, on retrouve le même résultat

$$\boxed{u(x) = 2x^2 + x}$$ (01 pt)

3°) Calcul de l'Intégrale $I_1 = \int_0^3 u(x)\,dx$ en passant par l'élément de référence quadratique

$$[J] = \det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{3}{2}$$ (0,5 pt)

$$I_1 = \int_0^3 u(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} u(x(\xi)) \det[J] \cdot d\xi = \int_{-1}^{+1} u(\xi) \det(J) \cdot d\xi$$

$$I_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{9}{2}\xi^2 + \frac{21}{2}\xi + 6\right) d\xi = \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{2} w_i \cdot u(\xi_i)$$ (0,5 pt)

Le polynôme à intégrer étant de degré 02, on adopte un schéma d'intégration à 2 pts de Gauss ($n=2$)

avec $w_1 = w_2 = 1$ et $\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d'après le tableau 02)

$$\Rightarrow I_1 = \frac{3}{2}\left[u(\xi_1) + u(\xi_2)\right] \text{ or } u(\xi_1) = u\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{21}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 6$$

$$\text{et } u(\xi_2) = u\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{21}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 6$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{6} \times 2 + 6 \times 2\right) = 22,5 \Rightarrow \boxed{I_1 = 22,5}$$