

Chapitre 02 :

Rappels d'élasticité linéaire

1. Les principaux tenseurs utilisés

a) Tenseur des déplacements

On considère d'abord le tenseur U_i du champ des déplacements qui est un vecteur noté U_i et qui a pour composantes (en 3D) :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$$

b) Tenseur des déformations

On considère ensuite le tenseur ε_{ij} du champ des déformations (appelé tenseur de Green-Lagrange linéarisé) qui est une matrice symétrique notée $[\varepsilon]$ et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

Il faut faire attention au fait que l'on utilise également d'autres composantes de déformations notées :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= 2 \cdot \varepsilon_{xy} ; \\ \gamma_{xz} &= 2 \cdot \varepsilon_{xz} \\ \gamma_{yz} &= 2 \cdot \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (2-2)$$

On utilise également une notation du tenseur des déformations (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas les composantes sont les suivantes : $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle$

c) Tenseur des contraintes

On considère le tenseur σ_{ij} du champ des contraintes (appelé tenseur de Cauchy-Euler) qui est une matrice symétrique notée $[\sigma]$ et qui a pour composantes (en 3D) :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

On utilise également une notation du tenseur des contraintes (qui à la base est une matrice symétrique à 9 composantes) sous la forme d'un vecteur à 6 composantes. Dans ce cas les composantes sont les suivantes : $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle$

On rappelle qu'une surface élémentaire de vecteur normal unitaire \vec{n} subissant un champ de contraintes $[\sigma]$ dont le vecteur contraintes \vec{T} tel que :

$$\{T\} = [\sigma] \cdot \{n\} \quad (2-4)$$

Ainsi, si les composantes des vecteurs \vec{T} et \vec{n} sont les suivantes :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

On aura les relations :

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ T_y &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ T_z &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned} \quad (2-5)$$

2. Relations déplacements – déformations

A partir de la connaissance du champ de vecteurs déplacements, on peut déterminer le champ des tenseurs de déformations en utilisant les relations suivantes :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2-7)$$

Ainsi, on peut déduire que :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Ou bien, en utilisant les notations indicielles : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i})$

Les déformations constituent donc les sommes des dérivées premières des déplacements. Ceci est particulièrement important dans l'interprétation des résultats des calculs E F car dans cette méthode (la MEF), on calcule les déformations en dérivant les composantes des déplacements.

Par ailleurs, ces relations déplacements-déformations impliquent six conditions de compatibilité entre les composantes du tenseur des déformations (ou équations de Beltrami) et qui sont comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x \partial z} &= 0 & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

3. Relations contraintes – déformations

En utilisant la loi de Hooke, on peut ensuite déterminer facilement les composantes du tenseur des contraintes de la manière suivante :

$$\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\} \quad (2-9)$$

La matrice $[H]$ est appelée matrice de Hooke. Dans le cas tridimensionnel d'un matériau homogène et isotrope défini par un module de Young E et un coefficient de Poisson, cette matrice $[H]$ peut être obtenue comme suit :

$$[H] = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} a & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & a & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix} \text{ avec } a = (1-\nu) \text{ et } b = \frac{1-2\nu}{2} \quad (2-10)$$

On peut réécrire la relation précédente, en utilisant la relation de Lamé comme suit :

$$[\sigma] = 2G[\varepsilon] + \lambda \cdot (Tr[\varepsilon]) \cdot [I]$$

Les coefficients λ et G sont connus sous le nom de coefficients de Lamé tels que λ est le module de compressibilité et G le module de cisaillement avec :

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sur la relation précédente, on voit bien que la définition du coefficient de compressibilité λ impose des valeurs limites au coefficient de Poisson telles que $0 \leq \nu < 0.5$. Par exemple, pour $\nu = 0.5$, le matériau est considéré comme incompressible puisque dans ce cas $\lambda \simeq \infty$.

4. Cas bidimensionnel de l'élasticité plane

Dans certains cas de géométries et de chargements, le calcul tridimensionnel 3D peut être simplifié et réduit à un calcul bidimensionnel 2D. Pour cela, il existe essentiellement trois cas de calculs.

4-1 Etat des contraintes planes

Dans ce cas, le tenseur des contraintes $[\sigma]$ est réduit en tout point du solide (dont le plan moyen se trouve dans le plan défini par le repère (O,x,y)) à des composantes nulles suivant la direction perpendiculaire Oz. Donc toutes les composantes portant l'indice z sont nulles, c'est-à-dire :

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0.$$

Ainsi au lieu d'écrire le tenseur des contraintes sous cette forme : $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, la

simplification consiste à ne considérer les calculs que selon les deux directions x et y du plan (O, x,y) et le tenseur des contraintes se trouve réduit à : $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$

Toutefois, le tenseur des déformations correspondant est égal à : $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$ tel que

$$\varepsilon_z \neq 0.$$

Par ailleurs, en remplaçant les composantes nulles par leurs valeurs dans (2-9) et en tenant compte de (2-10), la relation contraintes – déformations dans le cas des états de contraintes planes, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (2-11)$$

Cela étant dit, ce cas est généralement rencontré (voir figure 01) dans le calcul des pièces mécaniques dont l'épaisseur définie selon z peut être considérée comme faible devant les autres dimensions (exemple : cas des clés à fourche de serrage)

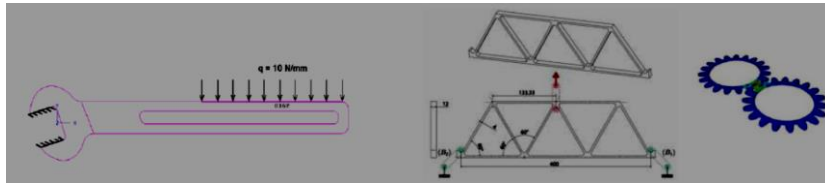


Figure 01 : exemple de cas de calcul 2D en contraintes planes

4-2 Etat des déformations planes

Dans ce cas, le tenseur des déformations $[\varepsilon]$ est réduit en tout point du solide (dont le plan moyen se trouve dans le plan défini par le repère (O,x,y)) à des composantes nulles suivant la direction perpendiculaire Oz , donc toutes les composantes portant l'indice z sont nulles, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0.$$

Ainsi au lieu d'écrire le tenseur des déformations sous cette forme : $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, la simplification consiste à ne considérer les calculs que selon les deux directions x et y du plan (O, x,y) et le tenseur des déformations se trouve réduit à : $[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$

Toutefois, le tenseur des contraintes correspondant est égal à : $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$ tel que

$$\sigma_z \neq 0.$$

Par ailleurs, en remplaçant les composantes nulles par leurs valeurs dans (2-9) et en tenant compte de (2-10), la relation contraintes – déformations dans le cas des états de déformations planes, peut être écrite comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{DPP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2-12)$$

avec $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

Cela étant dit, ce cas est généralement rencontré dans le calcul des structures dont l'épaisseur (plus précisément la longueur) définie selon z est infiniment grande devant les autres dimensions (exemple : cas des conduites de pipeline soumises à des pressions internes dues au fluide transporté et dont la longueur est infiniment grande devant les dimensions de la section transversale).

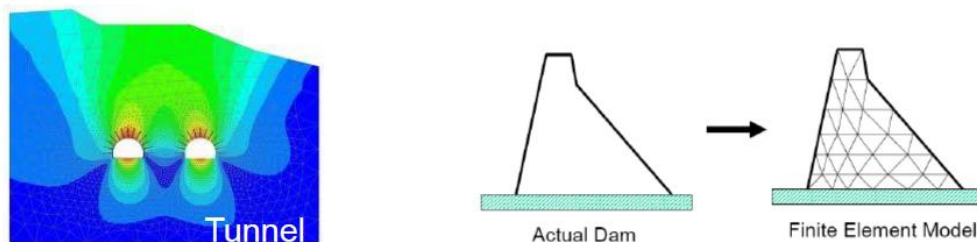


Figure 02 : cas de calculs en déformations planes de tunnels ou de digue de barrages

4-3 Etat de la symétrie axiale de révolution

Dans ce cas, si pour toute section perpendiculaire à l'axe de symétrie de révolution z de la structure, les tenseurs des contraintes $[\sigma]$ et des déformations $[\varepsilon]$ sont constants en tout point de cette section, les calculs 3D peuvent être réduits aux calculs bidimensionnels 2D axisymétriques, dont l'axe des abscisses constitue la direction radiale (selon le rayon) et l'axe des ordonnées constitue l'axe z de symétrie de révolution. Il est important de noter que cette simplification des calculs, n'est valable que si les chargements appliqués sur cette structure vérifient eux aussi la condition de symétrie de révolution autour de l'axe z .

L'exemple le plus simple est celui du réservoir cylindrique vertical soumis à la fois au poids propre vertical de ses parois et aux pressions hydrostatiques du fluide stocké. En effet, malgré leur variabilité selon la hauteur (ou la direction z), ces pressions appliquées sur les parois du réservoir selon les directions radiales sont constantes au niveau de chaque section horizontale. Ce qui permet d'adopter le modèle 2D de calcul axisymétrique. Toutefois, dès que les charges appliquées deviennent non symétriques (telles que les pressions extérieures dues au vent qui viennent s'appliquer sur le réservoir), le modèle de calcul axisymétrique n'est plus valable. Ainsi, on voit clairement que les conditions de simplification vers le cas axisymétriques ne concernent pas uniquement la géométrie de la structure, mais concernent également le chargement appliqué.

Pour la formulation, ceci sort du cadre de ce cours (qui n'est qu'un rappel) et l'étudiant est invité à revoir son cours d'élasticité.

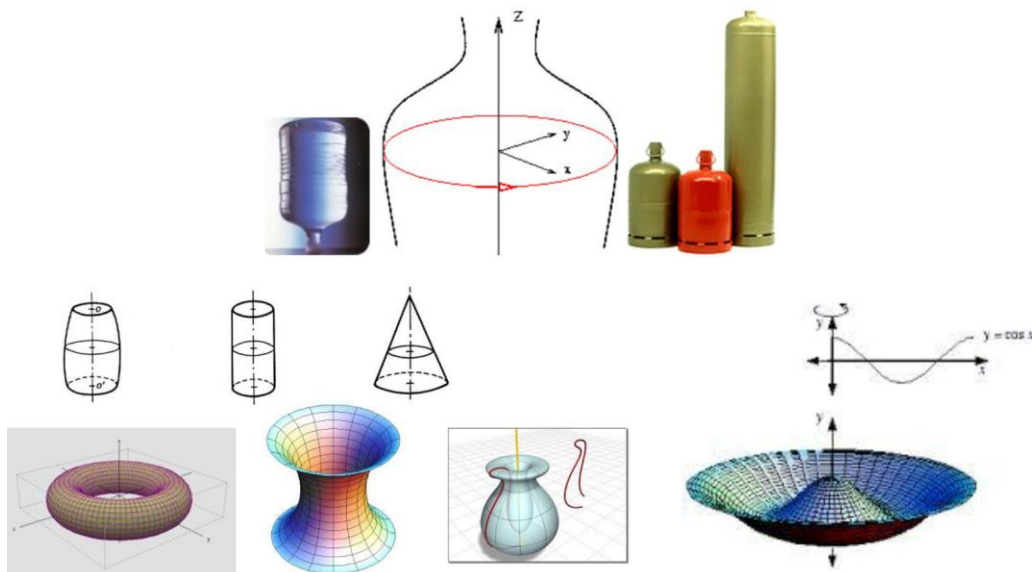


Figure 03 : cas des objets 3D présentant des axes de symétrie de révolution ou objets axisymétriques

5- Le problème posé en élasticité tridimensionnelle

5-1 Introduction

De manière globale, la résolution complète d'un problème en élasticité tridimensionnelle, consiste à déterminer les valeurs de 15 inconnues scalaires à l'aide de 15 équations fondamentales. Les 15 inconnues scalaires sont :

- 3 composantes du vecteur déplacement \vec{U}
- 6 composantes du tenseur de déformation $[\varepsilon]$
- 6 composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$

Les 15 équations fondamentales sont :

- 6 équations vues précédemment pour relier les déplacements \vec{U} aux déformations $[\varepsilon]$
- 6 équations vues précédemment pour relier les déformations $[\varepsilon]$ aux contraintes $[\sigma]$
- 3 équations décrivant l'équilibre interne des forces appliquées sur un élément infiniment petit du solide et qui peut être assimilé à un point M du solide au niveau macroscopique.

Les éléments finis dits « formulés en déplacements » (ce qui est le cas de la quasi-totalité des logiciels de calculs utilisés en ingénierie), consiste à formuler le problème avec seulement 3 inconnues scalaires (que sont les composantes du vecteur déplacement \vec{U}). La solution recherchée est donc un champ de déplacements $\vec{U}(x, y, z)$ qui est transformée par la suite en un champ de déformations puis en un champ de contraintes et ce, grâce aux relations vues précédemment (déplacements – déformations et déformations-contraintes).

5-2 Equations d'équilibre

Considérons un domaine Ω délimité par une frontière Γ telle que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$ où Γ_D et Γ_F sont deux parties disjointes. Le champ de déplacement en frontière est donné sur Γ_D . Pour simplifier davantage, nous supposons que Ω est fixé (ou bloqué) sur Γ_D . Sur la frontière Γ_F , une densité de forces surfaciques (par unité de surface) notée f_s est appliquée. Ω est également soumise à une densité de forces volumiques (par unité de volume) notée f_V (figure 03). La notation \mathbf{n} représente le vecteur normale, unitaire et sortant de Γ .

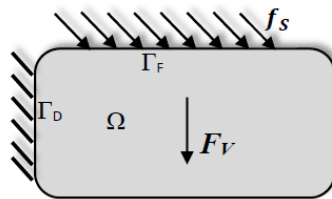


Figure 03 : position du problème

Comme mentionné auparavant, la solution recherchée est donc le champ de déplacements $\vec{U}(x, y, z)$ à l'intérieur du domaine Ω avec pour composantes :

$$\{U(x, y, z)\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix}$$

Sur Γ_F , on impose des efforts de surface $\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{s_x} \\ f_{s_y} \\ f_{s_z} \end{Bmatrix}$

et dans Ω , on impose des efforts de volume $\{F_V\} = \begin{Bmatrix} F_{V_x} \\ F_{V_y} \\ F_{V_z} \end{Bmatrix}$

On rappelle que le vecteur normal unitaire sortant \vec{n} sont les suivantes :

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Ainsi, si on considère un élément de volume infinitésimal de dimensions dx , dy et dz tel que représenté en figure 04, et après avoir écrit les équations d'équilibre en translation ainsi qu'en rotation, on obtient finalement en (2-13) le système d'équations aux dérivées partielles qui représentent les équations d'équilibre :

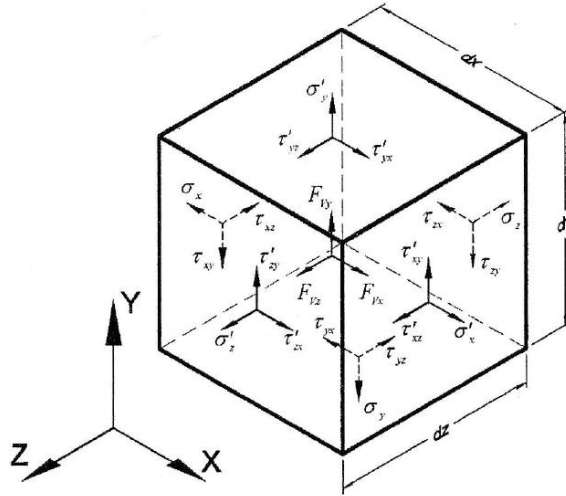


Figure 04 : Efforts subis par l'élément de volume infinitésimal dont l'évolution entre deux faces parallèles est à titre d'exemple $\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, etc.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} &= 0 \end{aligned} \quad (2-13)$$

5-3 Conditions aux limites

Concernant les conditions aux limites (ou aux frontières), on a des CL en déplacements imposés sur Γ_D et des CL en densités de forces imposées sur Γ_F , telles que :

- Sur Γ_D on a : $\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix}$ avec $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ des valeurs connues et très souvent nulles aux appuis.
- Sur Γ_F les efforts de surface appliqués vérifient les relations suivantes :
 - $\{f_S\} = [\sigma] \cdot \{n\}$ (2-14)

avec :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{Sz} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad \text{avec} \quad \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

On aura les relations :

$$\begin{aligned} f_{Sx} &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ f_{Sy} &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ f_{Sz} &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned} \quad (2-15)$$

6- Energie de déformation élastique

Lorsque le domaine Ω se déforme tout en restant dans le domaine élastique, il emmagasine une quantité d'énergie (sous la forme d'énergie potentielle) appelée énergie de déformation élastique notée W_{el} et qui se calcule à partir de la connaissance des champs de contraintes et de déformations à l'intérieur du domaine Ω en utilisant l'expression suivante :

$$W_{el} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \langle \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz} + \gamma_{yz} \tau_{yz}) d\Omega \quad (2-16)$$

7- Principe des travaux virtuels

Soit une particule de matière soumise à un système de forces réelles \vec{F}_i en équilibre telles que $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$ et que l'on applique à cette particule un déplacement virtuel $\delta \vec{U}$. Le théorème des travaux virtuels énonce que le travail virtuel δW de ce déplacement est nul avec :

$$\delta W = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{U} = 0$$

Ce principe applicable aux particules de matières peut être étendu au cas d'un corps déformable Ω et de frontière Γ , en équilibre et constitué d'un nombre infini de particules élémentaires, soumis à des déplacements imposés sur Γ_D , à des efforts de surface \vec{f}_S sur Γ_F et à des efforts de volume \vec{F}_V à l'intérieur de Ω . Etant en état de déformation élastique et en état d'équilibre, on superpose au champ de déplacements réels ce corps \vec{U} un champ de déplacements virtuels $\delta \vec{U}$ quelconque mais cinématiquement admissible, c'est-à-dire que le nouveau champ $(\vec{U} + \delta \vec{U})$ vérifie encore les conditions cinématiques de déplacements imposés sur Γ_D et que $\delta \vec{U}$ est dérivable. Ceci implique que $\delta \vec{U} = \vec{0}$ sur Γ_D et est quelconque ailleurs et a des composantes notées $\langle \delta U \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle$.

Ce champ de déplacements virtuels engendre un champ de déformations virtuelles noté $\langle \delta \varepsilon \rangle$ dont les composantes sont $\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{xz} \quad \delta \gamma_{yz} \rangle$. Ainsi, le théorème des travaux virtuels, établit que le travail virtuel externe total (dû aux forces extérieures) est égal au travail virtuel interne total (dû aux efforts intérieurs) telle que :

$$W = - \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \{ F_S \} d\Gamma = 0 \quad (2-17)$$

Cette expression a une importance particulière en EF car elle est à la base de la formulation de la plupart des éléments finis utilisés dans la pratique. Par ailleurs, cette expression ne s'applique pas dans le cas de la présence de forces ponctuelles. Pour remédier à ce problème, il est nécessaire d'introduire dans l'expression précédente un terme supplémentaire représentant le travail virtuel total de m forces ponctuelles \vec{F}_p^i dont le point d'application subit un déplacement virtuel $\delta \vec{U}_p^i$ et telle que :

$$W = - \int_{\Omega} \langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \{ F_S \} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta \vec{U}_p^i \cdot \vec{F}_p^i = 0 \quad (2-18)$$

8- Contraintes principales

Pour un état de contraintes donné par le tenseur $[\sigma]$ écrit dans un repère (O,x,y,z) qui n'est à priori pas principal, on peut déterminer dans un premier temps les valeurs des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ qui ne sont rien d'autres que les valeurs propres de la matrice $[\sigma]$ et qu'on peut obtenir en résolvant le système d'équations suivant : $\det([\sigma] - \sigma_i[I])=0$ $i=1,2,3$ avec $[I]$ la matrice identité (3×3) .

Pour sa part la détermination du repère principal $(0, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ portant respectivement les contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ obtenues précédemment, consiste à déterminer les composantes des vecteurs $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ qui ne sont rien d'autres que les vecteurs propres de $[\sigma]$ et qu'on peut obtenir en résolvant pour chaque valeur propre σ_i ($i=1,2,3$), le système d'équations :

$$([\sigma] - \sigma_i[I])\{\vec{n}_i\} = \{\vec{0}\} \text{ avec } \|\vec{n}_i\| = \sqrt{n_{ix}^2 + n_{iy}^2 + n_{iz}^2}$$

10- Contraintes de Von-Mises

Le critère de Von-Mises constitue l'un des critères les plus utilisés en conception mécanique, notamment pour les matériaux ductiles et isotropes. Ce critère consiste à fixer un seuil sur la densité volumique d'énergie de distorsion élastique et de déduire une contrainte équivalente appelée aussi contrainte de Von-Mises. Notée σ_{VM} , cette contrainte équivalente sera comparée par la suite, soit avec la limite élastique f_y (éventuellement réduite par un coefficient de sécurité γ_M), soit avec une limite de rupture donnée par un règlement ou une norme de calcul.

Ainsi la vérification en un point quelconque d'une pièce mécanique est généralement comme suit :

$$\sigma_{VM} \leq \frac{f_y}{\gamma_M}$$

avec γ_M : un coefficient de sécurité > 1

et f_y la limite élastique du matériau.

La valeur de σ_{VM} peut être obtenue de deux manières différentes :

- soit à partir des contraintes non principales données par le tenseur $[\sigma]$ telle que :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2}}$$

- soit à partir des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ obtenues en utilisant les formules du paragraphe précédent telles que :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}}$$

Remarque : Nous comparons généralement la valeur maximale $\sigma_{VM,Max} = \text{Max}(\sigma_{VM,i})$ avec $i = 1, N$. Avec N le nombre total de nœuds du maillage sur lequel le calcul éléments finis a été effectué. Toutefois, en présence de singularités (ou de points singuliers que nous verrons plus loin), cette démarche n'est pas correcte.