Chapitre 03

Les transformations entre espaces de coordonnées

1 Principe

Considérons les deux espaces de coordonnées suivants. Le premier est l'espace de coordonnées cartésiennes classique, défini par les coordonnées (x, y, z). Cet espace est également appelé « espace réel ». On met en relation cet espace réel de coordonnées cartésiennes avec un autre espace de coordonnées tridimensionnelle que nous appellerons espace de coordonnées paramétriques (ou espace de référence en éléments finis). Cet est espace est décrit par les coordonnées (ξ, η, ζ). Un exemple très courant de ce type de transformation entre espaces de coordonnées est l'utilisation de coordonnées cylindriques. Dans le cas des coordonnées cylindriques, les coordonnées que l'on considère (avec les notations habituellement utilisées) sont $\xi = r,\ \eta = \theta, \zeta = z$.

On établit la relation entre les deux espaces en considérant les fonctions :

$$\begin{aligned} x &= x(\xi,\eta,\zeta) \\ y &= y(\xi,\eta,\zeta) \\ z &= z(\xi,\eta,\zeta) \end{aligned} \tag{01}$$

Cela permet de déterminer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point correspondant au point de coordonnées (ξ, η, ζ) dans l'espace de coordonnées paramétriques. Dans le cas de coordonnées cylindriques, ces relations sont :

$$\begin{aligned} x &= r.\cos(\theta) \\ y &= r.\sin(\theta) \\ z &= z \end{aligned} \tag{02}$$

2 Matrice Jacobienne

Dans plusieurs situations de calcul, nous avons souvent besoin (en vue de les simplifier) de faire des transformations d'opérateurs différentiels (des dérivées simples ou partielles) et intégraux (des intégrales simples ou multiples) entre les deux espaces de coordonnées. La matrice Jacobienne $[J]$ permet assez facilement d'exprimer la transformation des opérateurs différentiels et intégraux entre les deux espaces de coordonnées :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{03}$$

En effet, nous verrons plus loin dans ce chapitre, que la MEF utilise ces transformations (intégrales et dérivées) dans les opérations de passage entre les éléments réels du maillage et éléments de référence. Ce qui permet de faciliter les calculs aussi bien manuellement que sur ordinateur (réduction du temps CPU des calculs).

3 Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul intégral

Concernant la transformation des intégrales, on utilise le déterminant de la matrice Jacobienne $det[J]$ qui est utilisé de la manière suivante. Soit une fonction $F(x, y, z)$ qui se transforme dans l'espace des coordonnées paramétriques en une fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ telle que :

$$\varphi(\xi,\eta,\zeta) = F\big(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\big) \qquad (04)$$

On transforme les intégrales entre les deux espaces en utilisant l'expression générale :

$$\begin{aligned}\int_V F(x,y,z).dx.dy.dz &= \int_{Vref} F\big(x(\xi,\eta,\zeta), y(\xi,\eta,\zeta), z(\xi,\eta,\zeta)\big).\ det[J].d\xi.d\eta.d\zeta \\ &= \int_{Vref} \varphi(\xi,\eta,\zeta).det[J].d\xi.d\eta.d\zeta\end{aligned} \qquad (05)$$

On déduit également de cette équation la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx.dy.dz = det[J].d\xi.d\eta.d\zeta \qquad (06)$$

Remarque : Si on applique la relation précédente au cas des coordonnées cylindriques, on retrouve la relation bien connue entre les deux éléments infinitésimaux cartésiens et cylindriques :

$$dx.dy.dz = det[J].d\xi.d\eta.d\zeta = r.dr.d\theta.dz \qquad (07)$$

En effet, si on considère la transformation avec le système de coordonnées cylindrique, la matrice $[J]$ s'écrira :

$$\begin{aligned}[J] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial \theta} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial(r\cos(\theta))}{\partial z} & \frac{\partial(r\sin(\theta))}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Ainsi $\quad det[J]. = 1.(r.cos^2(\theta) + r.sin^2(\theta)) = r.(cos^2(\theta) + sin^2(\theta)) = r$

4 Utilisation de la matrice Jacobienne dans le calcul des dérivées partielles

En ce qui concerne la transformation des dérivées partielles entre espaces de coordonnées, on utilise l'inverse de la matrice Jacobienne notée $[j]$:

$$[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \qquad (08)$$

Par la suite, cette matrice inverse $[j]$ peut être utilisée de la manière suivante. Si la transformation de la fonction $F(x, y, z)$ dans l'espace de coordonnées paramétriques en une fonction $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ s'effectue telle que $(\xi, \eta, \zeta) = F\big(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)\big)$, les transformations des dérivées entre les deux espaces s'effectuent en utilisant l'expression suivante :

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} \end{Bmatrix} = [j].\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix}.\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{09}$$

Ceci permet de donner les trois relations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= j_{11}.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{12}.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{13}.\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= j_{21}.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{22}.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{23}.\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= j_{31}.\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + j_{32}.\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + j_{33}.\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \end{aligned} \tag{10}$$

Ainsi, on peut transformer les dérivées partielles en (x, y, z) en des dérivées partielles en (ξ, η, ζ).

5 Exemples d'application

Exemple 01 (exercice 01 de la série de TD N°01)

On considère dans le plan, le cas de la transformation entre les coordonnées cartésiennes (x, y) et polaires (r, θ).

1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation

2- Donner son déterminant

3- Soit la fonction $F(x, y) = x^2 y$ avec $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = 2xy$. Retrouver ce résultat en passant par des dérivées par rapport aux variables (r, θ).

<u>Solution</u>

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met : $\xi = r$ et $\eta = \theta$

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Mais on sait que :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

Cela nous permet d'écrire :

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r} \\ \dfrac{\partial(r\cos\theta)}{\partial\theta} & \dfrac{\partial(r\sin\theta)}{\partial\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

2/ Calculons le déterminant :

$$\det[J] = (\cos\theta \times r\ \cos\theta) - (-r\sin\theta \times \sin\theta) = r\,cos^2\,\theta + r\,sin^2\theta = r\,(cos^2\theta + sin^2\theta).$$

Mais on sait que :

$$(cos^2\theta + sin^2\theta) = 1.$$

Donc $$\boxed{\det[J] = r}$$

Calculons ensuite $[J]^{-1}$ ou bien $[j]$

Tel que $[j] = \frac{1}{\det[J]}\,(Com\,[J])^T$

Pour cela la comatrice de [J] est :

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [J] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Et $$(Com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \Rightarrow (Com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Donc $$[j] = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Finalement

$$\boxed{[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}}$$

3/ Le résultat, en passant par les dérivés, par rapport aux variables (r, θ)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = [j] \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

Où

$$F(x,y) = x^2 y = (r\cos\theta)^2 (r\sin\theta) = r^2\, cos^2\theta\, r\sin\theta \;\Rightarrow\; \rho(r,\theta) = r^3 cos^2\theta \sin\theta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 3r^2\, cos^2\theta\, sin\theta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = r^3 (cos^2\theta)' \sin\theta + r^3\, cos^2\theta\, (\sin\theta)' = r^3\,(-2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta + r^3\, cos^2\theta \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -2r^3 \cos\theta\; sin^2\theta + r^3\, cos^3\theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta\,(3\, r^2 cos^2\theta\; \sin\theta) - \frac{\sin\theta}{r}\,(-2r^3\cos\theta\; sin^2\theta + r^3 cos^3\theta).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2\, r^2 \sin\theta\; cos^3\theta + 2r^2 \cos\theta\; sin^3\theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\, r^2 \sin\theta\cos\theta\,(\, cos^2\theta + sin^2\theta) = 2r^2 \sin\theta\cos\theta = 2\,(r\cos\theta)\,(r\sin\theta) = 2xy$$

Avec $(cos^2\theta + sin^2\theta) = 1$; $(r\cos\theta) = x$ et $(r\sin\theta) = y$

Finalement, on retrouve :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}\,(x,y) = 2\,xy = 2\,(r\cos\theta)\,(r\sin\theta)}$$

Exemple 02 (exercice 02 de la série de TD N°01)

On considère dans l'espace le cas de la transformation entre l'espace de coordonnées cartésiennes (x,y, z) et celui des coordonnées cylindriques (r, θ, z).

1- Exprimer la matrice Jacobéenne correspondant à cette transformation.

2- Donner son déterminant

3- Donner sa matrice inverse.

<u>Solution</u>

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met : $\xi = r$; $\eta = \theta$ et $\zeta = z$

$$x = x(\xi,\eta,\zeta) = x(r,\theta,z) = r\cos\theta \quad ; \quad y = y(\xi,\eta,\zeta) = y(r,\theta,z) = r\sin\theta$$

$$\text{et} \quad z = z(\xi,\eta,\zeta) = z(r,\theta,z) = z$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2/ Donc comme déjà vu ci-dessus, le déterminant de [J] est :

$$\det[J] = r$$

3/ La matrice inverse.

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]}\,(Com\,[J])^T$$

On commence par le calcul de la comatrice de [J] ou bien la matrice des cofacteurs.

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \Rightarrow (com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ r\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[j] = \frac{1}{r}(Com[J])^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$