CORRIGES SERIE N°01 : Techniques de Transformations

Solution de l'exercice 01:

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met : $\xi = r$ et $\eta = \theta$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

Mais on sait que :

$x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

Cela nous permet d'écrire :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} & \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} & \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

2/ Calculons le déterminant :

$$\det[J] = (\cos\theta \times r\ \cos\theta) - (-r\sin\theta \times \sin\theta) = r\, cos^2\,\theta + r\, sin^2\theta = r\,(cos^2\theta + sin^2\theta).$$

Mais on sait que :

$$(cos^2\theta + sin^2\theta) = 1.$$

Donc $\boxed{\det[J] = r}$

Calculons ensuite $[J]^{-1}$ ou bien $[j]$

Tel que $[j] = \frac{1}{\det[J]}\,(Com\ [J])^T$

Pour cela la comatrice de [J] est :

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [J] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Et $$(Com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T \Rightarrow (Com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Donc $$[j] = \frac{1}{r}\begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Finalement

$$\boxed{[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}}$$

3/ Le résultat, en passant par les dérivés, par rapport aux variables (r, θ)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = [j]\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\dfrac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \dfrac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}$$

Où

$$F(x,y) = x^2 y = (r\cos\theta)^2(r\sin\theta) = r^2\,cos^2\theta\, r\sin\theta \Rightarrow \rho(r,\theta) = r^3 cos^2\theta\sin\theta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = 3r^2\,cos^2\theta\,sin\theta$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \theta} = r^3(cos^2\theta)'\sin\theta + r^3\,cos^2\theta\,(\sin\theta)' = r^3\,(-2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta + r^3\,cos^2\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = -2r^3 \cos\theta \ sin^2\theta + r^3 \ cos^3\theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta \, (3\, r^2 cos^2\theta \ \sin\theta) - \frac{\sin\theta}{r} \, (-2r^3 \cos\theta \ sin^2\theta + r^3 cos^3\theta).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} = 2\, r^2 \sin\theta \ cos^3\theta + 2r^2 \cos\theta \ sin^3\theta$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2\, r^2 \sin\theta \cos\theta \, (\, cos^2\theta + sin^2\theta) = 2r^2 \sin\theta \cos\theta = 2\, (r\cos\theta)\,(r\sin\theta) = 2xy$$

Avec $(cos^2\theta + sin^2\theta) = 1$; $(r\cos\theta) = x$ et $(r\sin\theta) = y$

Finalement, on retrouve :

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}\,(x,y) = 2\,xy = 2\,(r\cos\theta)\,(r\sin\theta)}$$

<u>Solution de l'exercice 02 :</u>

1/ Exprimons "la matrice Jacobéenne" correspondante à cette transformation.

On met : $\xi = r$; $\eta = \theta$ et $\zeta = z$

$$x = x(\xi,\eta,\zeta) = x(r,\theta,z) = r\cos\theta \quad ; \quad y = y(\xi,\eta,\zeta) = y(r,\theta,z) = r\sin\theta$$

$$\text{et} \quad z = z(\xi,\eta,\zeta) = z(r,\theta,z) = z$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2/ Donc le déterminant de [J] égale :

$$\det[J] = r$$

3/ La matrice inverse.

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]}\,(Com\,[J])^T$$

On commence par le calcul de la comatrice de [J] ou bien la matrice des cofacteurs.

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -r\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -r\sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \Rightarrow (com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ r\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[j] = \frac{1}{r}(Com[J])^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} & 0 \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

<u>Solution de l'exercice 03 :</u>

1/ Calculons I dans l'espace des coordonnées polaires en utilisant "la matrice Jacobienne", son inverse et son déterminant.

* Nous sommes en 2D dans un repère cartésien, donc les coordonnées paramétriques sont (ξ, η) avec : $\xi = r$ et $r = \theta$

Pour les coordonnées polaires (r, θ) on a : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

La matrice Jacobienne :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Le déterminant de [J] :

$$\det[J] = (\mathrm{r}\cos\theta\cos\theta) + (r\sin\theta\sin\theta) = r\,(cos^2\theta + sin^2\theta) = r$$

On a

$$F(x, y) = x \;\Rightarrow\; \rho(r, \theta) = r\cos\theta$$

Or, on sait que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = [j] \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho(r,\theta)}{\partial r} \\ \frac{\partial \rho(r,\theta)}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

Avec $[j] = [J]^{-1}$ avec $[j] = \frac{1}{\det[J]} \, (Com\,[J])^T$

Pour cela la comatrice de [*J*] égale :

$$Com\,[J] = \begin{bmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Et la matrice transposée est :

$$(Com\,[J])^T = \begin{bmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Donc [*j*] égale :

$$[j] = \frac{1}{\det[J]} \, (Com\,[J])^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\frac{\sin\theta}{r} \\ \sin\theta & \frac{\cos\theta}{r} \end{bmatrix}$$

Cela nous permet d'écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta \, \frac{\partial \rho}{\partial r}(r,\theta) - \frac{\sin\theta}{r} \, \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \, (r,\theta)$$

Où :

$$\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} = \cos\theta \qquad et \qquad \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

Et cela donne :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos\theta\cos\theta - \frac{\sin\theta}{r}\,(-r\sin\theta) = cos^2\theta + sin^2\theta = 1$$

Par contre, on a :

$$I = \int_S \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \, dx\, dy = \int_{Surf} (\cos\theta \, \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \, \frac{\partial \rho}{\partial \theta}) \, (\det[j]) \, dr \, d\theta$$

Or,

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} = \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial r} = \cos\theta \qquad et \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \theta} = \frac{\partial (\,r\cos\theta)}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

Donc

$$I = \int (\cos\theta\,(\cos\theta) - \frac{\sin\theta}{r}(-r\sin\theta))r\,dr\,d\theta \;\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

2/ Vérification du résultat :

Il est facile de constater dans le repère cartésien (o, x, y) que $S = \int 1\,dx\,dy$, est égale à la surface du quart du disque $\frac{\pi\,1^2}{4}$ et donc $S = \frac{\pi}{4}$.