

# Modélisation des structures par éléments finis

par **Jean-Jacques BARRAU**

*Professeur à l'Université Paul-Sabatier-Toulouse-III*

et **Michel SUDRE**

*Professeur agrégé à l'Université Paul-Sabatier-Toulouse-III*

<b>1. Présentation de la méthode</b> .....	BM 5 015 - 2
1.1 Matrice de rigidité .....	— 2
1.2 Matrice de rigidité pour une structure treillis .....	— 2
1.3 Matrice de rigidité pour une structure volumique.....	— 3
1.4 Méthode de résolution .....	— 3
<b>2. Caractéristiques générales des éléments</b> .....	— 4
2.1 Préambule .....	— 4
2.2 Éléments unidimensionnels .....	— 5
2.3 Éléments bidimensionnels .....	— 5
2.4 Éléments tridimensionnels .....	— 6
<b>3. Cas d'étude</b> .....	— 7
3.1 Cas d'étude n° 1 : modélisation d'une structure par barres .....	— 7
3.2 Cas d'étude n° 2 : modélisation d'une structure par barres et poutres ..	— 7
3.3 Cas d'étude n° 3 : tôle encastrée en flexion dans son plan .....	— 9
3.4 Cas d'étude n° 4 : modélisation par membranes.....	— 11
3.5 Cas d'étude n° 5 : tôle sollicitée en torsion .....	— 12
<b>4. Conclusion</b> .....	— 13
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 13

**L'**objectif de cet article est de donner les bases essentielles de connaissances pour comprendre la méthode des éléments finis et pour pouvoir utiliser efficacement un logiciel existant dans le cadre d'un calcul de structure dans le domaine linéaire. Les lecteurs qui souhaitent approfondir leurs connaissances théoriques sur ce sujet peuvent se reporter aux documents donnés en référence.

Dans tout cet article, il est fait l'hypothèse principale que le **comportement de la structure est linéaire** : les déplacements en tous points sont proportionnels aux efforts extérieurs. Cela impose que le matériau ait un comportement linéaire (élasticité) et que les déformations soient proportionnelles aux déplacements (petits déplacements).

# 1. Présentation de la méthode

## 1.1 Matrice de rigidité

Considérons (figure 1) une structure (S) soumise à trois forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  aux points  $M_1, M_2, M_3$ .

Cette structure est liée au bâti par plusieurs liaisons.

Soit  $v_1, w_2, u_3$  les déplacements respectifs des points  $M_1, M_2, M_3$  dans les directions des forces.

Puisque, par hypothèse, la structure a un comportement linéaire la relation **force-déplacement** peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Z_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ w_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ou  $\{F\} = [K]\{q\}$

La matrice  $K$  est appelée **matrice de rigidité de la structure** ; elle est toujours symétrique.

Si les efforts extérieurs sont appliqués progressivement, ils produisent un **travail**  $\tau$  :

$$\tau = \frac{1}{2} (Y_1 v_1 + Z_2 w_2 + X_3 u_3)$$

$$\text{ou } \tau = \frac{1}{2} \{v_1 \ w_2 \ u_3\} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Z_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Le coefficient 1/2 provient de la linéarité de la réponse, comme le montre la figure 2.

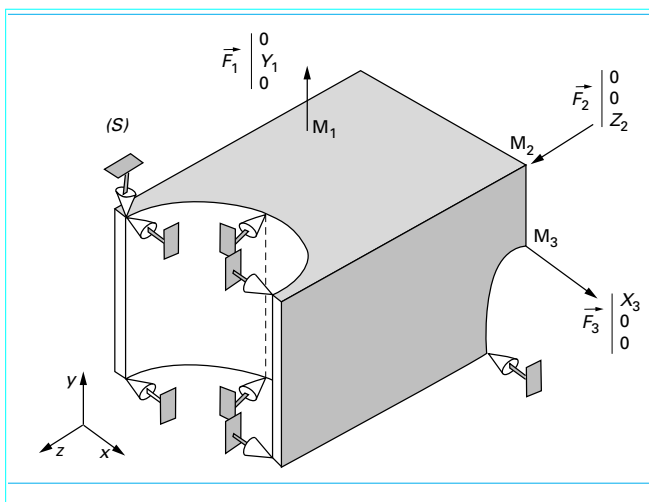


Figure 1 – Structure volumique soumise à trois forces

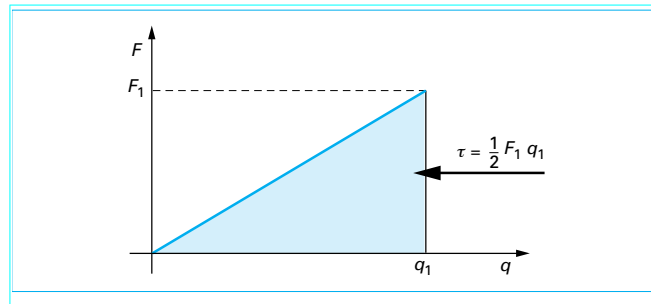


Figure 2 – Travail des efforts extérieurs

Lorsque les liaisons sont parfaites, le travail produit par les forces extérieures se retrouve intégralement en énergie élastique dans la structure, donc, en utilisant les relations (1) et (2), cette **énergie élastique**  $W$  s'écrit sous la forme :

$$W = \tau = \frac{1}{2} \{v_1 \ w_2 \ u_3\} [K] \begin{Bmatrix} v_1 \\ w_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Si l'énergie élastique  $W$  est déterminée en fonction des déplacements, on peut accéder à la matrice de rigidité  $K$  et ainsi connaître la relation force-déplacement.

À partir de cette relation, il est aisé de trouver les forces ou les déplacements inconnus et donc de résoudre le problème posé.

## 1.2 Matrice de rigidité pour une structure treillis

Considérons, comme structure à analyser, un treillis qui est un assemblage de tiges birotulées (figure 3).

Remarquons, tout d'abord, que toute tige birotulée ne peut travailler qu'en **traction ou compression**.

Nous pouvons choisir comme points essentiels de cette structure les extrémités des tiges, c'est-à-dire les points A, B, C, D. Dans un programme éléments finis, les points A, B, C, D dont les déplacements sont inconnus sont appelés « **nœuds** » et les tiges qui relient ces nœuds sont nommées « **éléments** ».

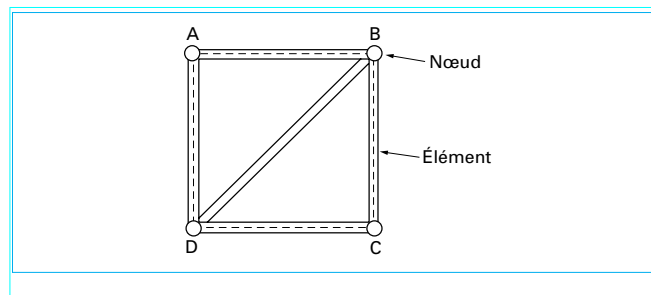


Figure 3 – Treillis

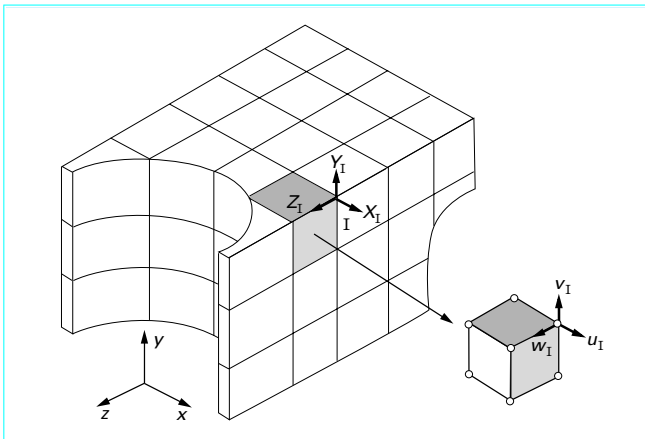


Figure 4 – Structure discrétisée en éléments de volume

Prenons pour inconnues toutes les composantes des déplacements des nœuds. L’allongement de chaque barre peut alors être très facilement obtenu à partir de ces valeurs.

Puisque chaque barre ne travaille qu’en traction ou compression, à partir de l’allongement de la barre, de la connaissance de l’aire de la section droite et du module de Young du matériau, l’énergie élastique de chaque barre peut être calculée.

L’énergie élastique totale est ensuite obtenue par sommation des contributions de chaque élément. En utilisant la formule (3), il est ainsi aisé de déterminer la matrice de rigidité  $K$  qui relie les déplacements des nœuds aux efforts s’exerçant en ces points.

### 1.3 Matrice de rigidité pour une structure volumique

Considérons maintenant le cas d’une structure volumique quelconque. Le problème devient beaucoup plus complexe car, quel que soit le nombre de points que l’on considère, il n’est pas possible, à partir des déplacements de ces points, de déterminer l’énergie élastique.

Découpons cette structure en petits cubes (figure 4) et prenons comme inconnues les composantes du déplacement de chaque sommet d’un cube. Nous appelons  $u_i, v_i, w_i$  les composantes du déplacement du point  $I$ . Le problème revient alors à déterminer l’énergie élastique dans le cube en fonction uniquement des composantes des déplacements des sommets (nœuds).

Cela n’est pas faisable sans **hypothèse supplémentaire**, mais il est possible de se donner un champ de déplacement, à l’intérieur de l’élément, fonction uniquement des composantes des déplacements des nœuds. Cette hypothèse faite, on peut calculer les déformations et l’énergie élastique d’un élément, puis, par sommation, l’énergie élastique de l’ensemble de la structure.

Dans la **pratique**, l’utilisateur d’un programme éléments finis doit choisir :

- dans la bibliothèque, l’élément qui lui paraît le plus apte à modéliser le problème à étudier ;
- la discrétisation en fonction du champ de déplacement proposé dans l’élément et du champ de déplacement supposé dans la structure.

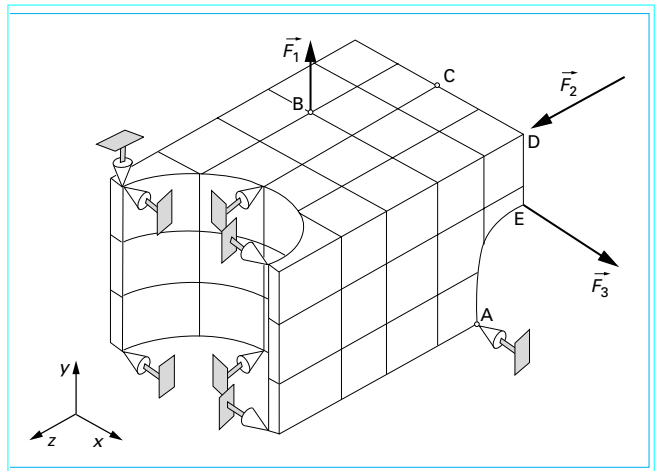


Figure 5 – Structure discrétisée soumise à trois forces  $F_1, F_2$  et  $F_3$

### 1.4 Méthode de résolution

Soit la structure de la figure 1 qui est liée au bâti par un certain nombre de liaisons. Des forces extérieures s’exercent aux points B, D et E (figure 5). Découpons cette structure en parallélépipèdes et prenons pour inconnues les déplacements des sommets. Ce découpage est réalisé de façon qu’il existe un nœud au niveau de chaque liaison, ainsi qu’aux points d’application des forces ponctuelles.

Supposons qu’il y ait  $n$  nœuds. D’après ce qui a été indiqué précédemment, il est possible de déterminer la matrice de rigidité  $K$  de cette structure.

Si nous appelons  $X_i, Y_i, Z_i$  les composantes de la force appliquée au nœud  $I$ , alors, on a :

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_n \\ Z_n \end{Bmatrix} = [K] \times \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Il est important de remarquer que, pour chaque nœud, est connue :

- soit la composante du déplacement ;
- soit la composante correspondante de la force extérieure appliquée.

On a : **au point A :**                      **au point B :**                      **au point C :**

$u$	0	?	$X$	$u$	0	?	$X$	$u$	0	?	$X$
$v$	?	0	$Y$	$v$	$F_1$	?	$Y$	$v$	0	?	$Y$
$w$	?	0	$Z$	$w$	0	?	$Z$	$w$	0	?	$Z$

Séparons les composantes des déplacements en composantes connues ( $q_c$ ) et composantes inconnues ( $q_i$ ) et les composantes de forces en composantes connues ( $F_c$ ) et composantes inconnues ( $F_i$ ). Le système peut alors se mettre sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_c \\ q_i \end{Bmatrix}$$

soit :

$$\boxed{\{F_c\} - [K_3]\{q_c\} = [K_4]\{q_i\}} \quad (5)$$

Pour résoudre le problème posé, il suffit de déterminer  $\{q_i\}$  en résolvant le système (5).

Ces déplacements calculés, il est possible de déterminer  $\{F_i\}$  à partir de la relation (6) :

$$\boxed{\{F_i\} = [K_1]\{q_c\} + [K_2]\{q_i\}} \quad (6)$$

### Remarques fondamentales

- La solution obtenue est approchée, puisqu'une hypothèse a été faite sur le champ des déplacements dans l'élément. Pour obtenir une bonne solution, il est nécessaire de mailler assez fin dans les zones de forte variation de ce champ.
- Si la structure est fixée à un bâti de façon isostatique ou hyperstatique, pour un chargement donné, la solution en déplacement est unique et la matrice  $K_4$  est donc inversible.
- Si le système peut avoir un mouvement d'ensemble, le champ de déplacement ne peut pas être déterminé : la matrice  $K_4$  est singulière et ne peut pas être inversée. Pour résoudre le problème, il faut ajouter des liaisons (voir cas n° 4, § 3.4). Lorsque le logiciel indique que la matrice de rigidité est singulière, cela signifie généralement que des fixations sont oubliées et donc qu'il existe un ou des déplacements d'ensemble.
- D'après la relation (5), le problème est aussi facile à résoudre que les déplacements connus soient nuls ou non.
- Puisque la relation force-déplacement (1) est linéaire, si les efforts extérieurs sont multipliés par un coefficient  $\alpha$ , les déplacements et les contraintes le sont aussi. Il n'est donc pas nécessaire d'effectuer un nouveau calcul pour connaître la réponse de la structure sous l'effet d'un chargement proportionnel au chargement initial. Dans un programme éléments finis, le matériau est supposé avoir un comportement linéaire quelle que soit la valeur de la contrainte. C'est à l'utilisateur de vérifier la validité de la solution que ce soit en limite d'élasticité ou en flambement.

■ Lorsque les déplacements sont déterminés, il est possible, à partir de la matrice de rigidité, de déterminer les efforts inconnus qui sont les efforts au niveau des liaisons. Il est alors primordial de s'assurer que la somme des efforts donnés et des efforts de liaison est nulle ce qui prouve que la solution obtenue vérifie l'équilibre global. Les déplacements obtenus sont faux si ce n'est pas le cas.

■ **Structure symétrique** : lorsque la structure est symétrique, quel que soit le chargement, le problème peut se ramener à la superposition d'un problème symétrique et d'un problème antisymétrique (figure 6).

Les problèmes symétriques ou antisymétriques peuvent être résolus en n'analysant qu'une moitié de la structure et en mettant les conditions aux limites adéquates sur le plan de symétrie ou d'antisymétrie. Cela permet de diviser le nombre d'inconnues approximativement par 2. Ce n'est bien évidemment intéressant que pour des problèmes importants (cas d'étude n° 4 et 5 ; § 3.4 et 3.5).

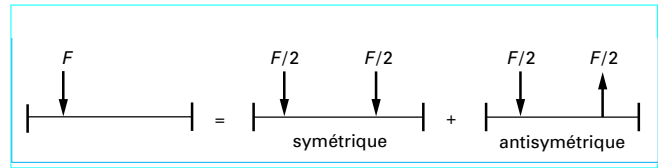


Figure 6 – Structure symétrique sous chargement quelconque

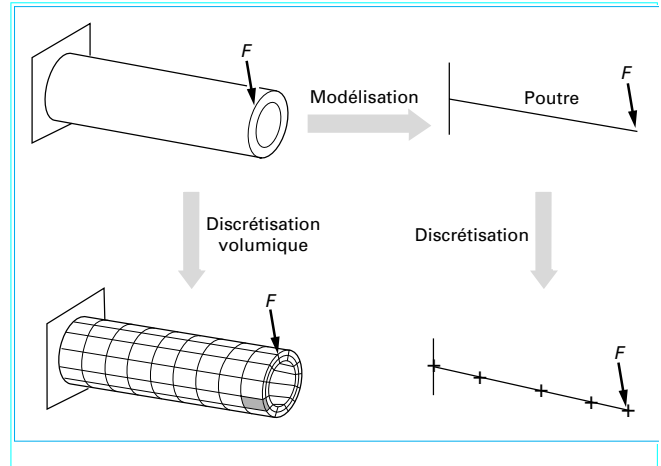


Figure 7 – Poutre encastree

## 2. Caractéristiques générales des éléments

### 2.1 Préambule

■ Toute structure peut théoriquement être analysée à partir d'une discrétisation en **éléments tridimensionnels**. Considérons par exemple, figure 7, un tube encastree à une extrémité et soumis à l'autre extrémité à une force ponctuelle  $F$ . Réalisons la discrétisation volumique représentée sur la figure 7. Ce maillage comporte 216 éléments de volume et 360 nœuds. En chaque nœud, il y a trois inconnues : les trois composantes du vecteur déplacement. Pour résoudre ce problème, il faut donc résoudre un système linéaire comportant  $3 \times 360 = 1\ 080$  inconnues.

Malgré les progrès constants des ordinateurs, dès que la structure est importante, une modélisation tridimensionnelle entraîne généralement un nombre d'inconnues beaucoup trop important.

■ Pour pouvoir résoudre le problème, l'opérateur est amené à modéliser, si c'est possible, cette structure. Cela revient à faire des hypothèses sur les champs des contraintes et/ou des déplacements. Les **modélisations** les plus classiques sont celles qui reviennent à indiquer que certaines parties peuvent être considérées comme des **poutres**, des **plaques** ou des **coques**. Dans l'exemple ci-dessus, la structure peut être modélisée par une poutre. Si cette modélisation a l'énorme avantage de diminuer la taille du problème elle n'a pas la même richesse qu'une modélisation tridimensionnelle. Dans cet exemple il est bien évident que la discrétisation poutre ne permettra pas, par exemple, de connaître le champ des contraintes au droit d'introduction de la force ; par contre, elle permettra d'accéder, avec une très bonne précision, à la flèche des points de la ligne moyenne.

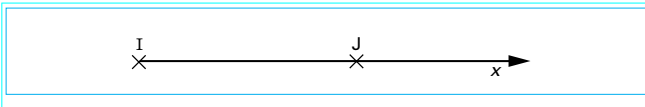


Figure 8 – Élément barre ou poutre

Si la structure ne permet pas une modélisation poutre, plaque ou coque, il ne reste plus alors comme possibilité que la modélisation tridimensionnelle qui peut amener à une impasse, si le volume de calcul associé est supérieur aux possibilités de la machine. Dans certains logiciels, il est possible de contourner cette limitation en utilisant la **méthode de sous-structuration**. Cette technique consiste à découper la structure en plusieurs parties, puis à étudier chaque partie indépendamment. La structure complète est analysée par assemblage de ces parties en gardant comme inconnues les degrés de liberté aux frontières. Cette méthode est assez difficile de mise en œuvre.

Avant d'étudier des exemples, nous allons analyser les éléments les plus courants.

## 2.2 Éléments unidimensionnels

### 2.2.1 L'élément barre

Il schématise un composant d'une structure qui travaille uniquement en traction ou compression. Dans cet élément, il est supposé que seule la contrainte normale  $\sigma_x$  est différente de zéro et qu'elle est constante sur la section droite.

C'est généralement un élément à 2 nœuds (figure 8), qui comporte 3 inconnues ou **degrés de liberté** (DDL) par nœud ( $u, v, w$ ), puisqu'il suffit de connaître l'allongement de l'élément pour déterminer son énergie élastique.

Une étude avec cet élément est effectuée dans l'exemple cas n° 1 (§ 3.1).

### 2.2.2 L'élément poutre

C'est un élément unidimensionnel qui reprend toutes les hypothèses des poutres longues. Il intègre les énergies d'effort normal, d'effort tranchant, de flexion et de torsion.

C'est généralement un élément à 2 nœuds (figure 8), qui comporte 6 inconnues (DDL) par nœud : les trois translations ( $u, v, w$ ) et les trois rotations ( $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) de la section droite.

La connaissance des inconnues aux extrémités permet, à partir de la théorie des poutres, de calculer l'énergie élastique si l'utilisateur fournit les caractéristiques de la section droite.

Le cas n° 2 (§ 3.2) est donné comme exemple.

Éléments bidimensionnels

### 2.2.3 L'élément de membrane

C'est un élément bidimensionnel dans lequel on suppose que les contraintes sont uniformes dans l'épaisseur et que la contrainte normale  $\sigma_z$  est nulle ( $O_z$  est l'axe perpendiculaire au plan de l'élément).

Il est utilisé pour modéliser :

— soit des structures minces travaillant en membrane, c'est-à-dire sans rigidité de flexion ;

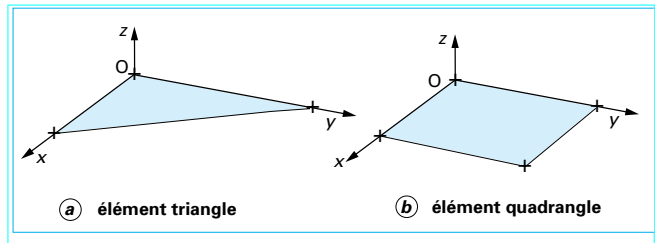


Figure 9 – Éléments bidimensionnels

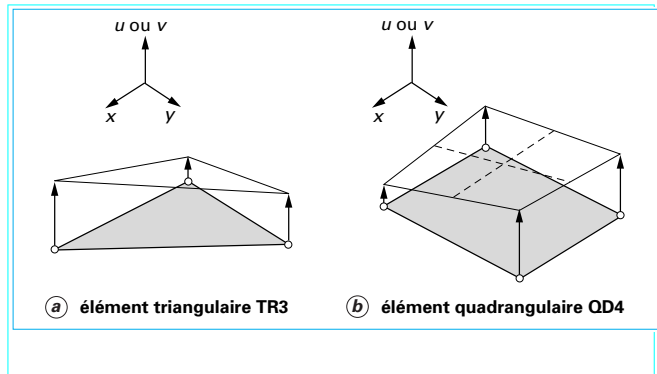


Figure 10 – Champ de déplacement à l'intérieur d'éléments de membrane

— soit des structures plus épaisses, quand on peut considérer que les composantes du tenseur des contraintes ne varient pas dans l'épaisseur.

Une étude avec cet élément est effectuée dans l'exemple cas n° 4 (§ 3.4).

C'est généralement un élément à 3 ou 4 nœuds (figure 9) qui comporte 3 inconnues (DDL) par nœud : les 3 composantes du vecteur déplacement ( $u, v, w$ ).

Dans cet élément, à la différence des éléments unidirectionnels, la connaissance des caractéristiques du matériau et de l'épaisseur est insuffisante pour calculer l'énergie élastique en fonction des déplacements des nœuds. Il est nécessaire de faire une hypothèse sur les composantes  $u$  et  $v$  du vecteur déplacement pour calculer l'énergie élastique.

■ L'**hypothèse la plus simple** consiste à supposer que dans l'élément :

— **triangulaire** (figure 9 a), les déplacements  $u$  et  $v$  sont des **fonctions linéaires** de  $x$  et de  $y$  ;

— **quadrangulaire** (figure 9 b), les déplacements  $u$  et  $v$  sont des **fonctions bilinéaires** de  $x$  et de  $y$ .

Une représentation de ces déplacements est donnée sur la figure 10 où, pour une meilleure visualisation,  $u$  et  $v$  sont représentés sur un axe perpendiculaire à l'élément.

Ces hypothèses quoique semblables ne donnent pas les mêmes **résultats** puisque les champs des déformations et des contraintes résultants sont :

- constants, dans l'**élément triangulaire** TR3 ;
- linéaires, dans l'**élément quadrangulaire** (QD4).

L'élément quadrangulaire permettra d'obtenir un meilleur résultat à maillage équivalent.

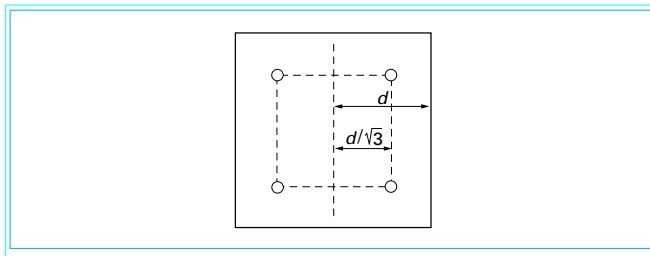


Figure 11 – Position des points de Gauss sur l'élément de référence de forme carrée

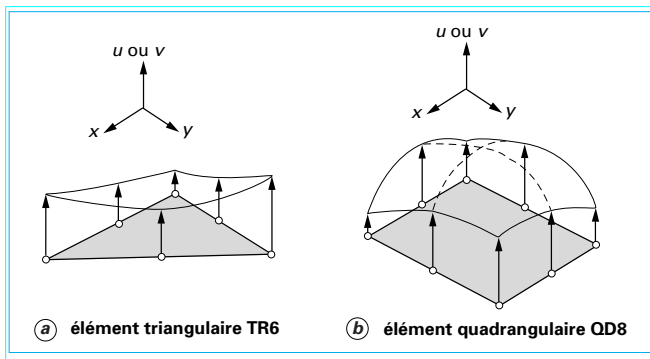


Figure 12 – Champ de déplacement pour des éléments de membrane avec nœuds intermédiaires

Dans tous les cas, si les champs des contraintes varient très fortement il est nécessaire de réaliser un maillage plus fin dans ces zones.

Le calcul de l'énergie de déformation à partir de la connaissance des contraintes et des déformations nécessite d'intégrer sur l'élément. Une telle intégration ne pose pas de problème sur l'élément de référence (figure 11) de forme carrée, mais la transformation géométrique qui permet de passer du carré à l'élément réel complique le calcul et nécessite d'effectuer une intégration numérique par la technique des points de Gauss. Cette méthode consiste à utiliser, pour calculer l'intégrale, les valeurs prises par les déformations et les contraintes en 4 points caractéristiques appelés **points de Gauss**. Leurs positions sont indiquées sur la figure 11[2] pages 181-184.

Comme l'erreur commise sur l'intégrale est d'autant plus faible que la forme se rapproche du carré, il faut veiller, lors de la modélisation, à ne pas trop distordre ces éléments.

■ Il est possible de faire, sur le champ de déplacement, des **hypothèses plus complexes** que celles indiquées précédemment. Il est par exemple possible de supposer que le **déplacement** est une **fonction quadratique de x et de y** (figure 12). Cela impose pour assurer la compatibilité interéléments d'utiliser des éléments possédant 8 nœuds pour les éléments quadrangulaires (QD8) et 6 nœuds pour les éléments triangulaires (TR6).

Si ces éléments, lorsqu'ils ne sont pas distordus, convergent mieux que les éléments simples, ils sont en revanche plus difficiles à utiliser dans les mailleurs automatiques du fait de la présence de nœuds intermédiaires.

■ Enfin, des **éléments plus particuliers** peuvent être utilisés pour résoudre des problèmes :

- de flexion (voir cas d'étude n° 3, § 3.3) ;

- de déformation plane : cas pour lequel on considère que l'allongement relatif suivant z est nul, soit :

$$\epsilon_z = 0$$

- présentant une symétrie axiale ( $O_z$ ) : cas qui peuvent être traités à partir d'un maillage bidimensionnel dans le plan (r, z).

Dans ces deux derniers cas, on retrouve les éléments présentés au-dessus mais bâtis sur des hypothèses différentes.

### 2.2.4 Les éléments de plaque et de coque

Ces éléments bidimensionnels (figure 9) qui permettent d'analyser des plaques ou coques soumises à la flexion reposent sur les **hypothèses** classiques suivantes :

- la contrainte normale  $\sigma_z$  est négligeable ;
- l'interaction entre les phénomènes de membrane et de flexion est négligée ;
- les contraintes  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  varient linéairement suivant l'épaisseur.

Il existe deux grandes **catégories d'éléments** suivant que l'on prend en compte ou pas les effets de cisaillement transverse :

- si le cisaillement transverse est négligé, ce qui est correct pour les plaques minces, les éléments sont bâtis sur la théorie de Kirchhoff ;

- dans le cas contraire, les théories et hypothèses utilisées sont celles de Hencky, Mindlin, Reissner [3].

Si l'utilisation de ces éléments avec prise en compte du cisaillement transverse posait des problèmes pour la modélisation des plaques minces, à cause de la dégradation de la précision provoquée par des problèmes numériques, cela n'est en général plus le cas sur les nouveaux éléments. Il est cependant souhaitable de vérifier, avant de les utiliser, leurs capacités à modéliser des structures minces.

Les éléments classiques sont triangulaires à 3 nœuds ou quadrangulaires à 4 nœuds.

L'énergie élastique de membrane s'exprime en fonction des 2 degrés de liberté :  $u, v$ .

L'énergie élastique de flexion fait intervenir les 3 degrés de liberté :  $w, \theta_x, \theta_y$ .

Il est à remarquer que le degré de liberté  $\theta_z$  n'est pas utilisé. L'élément quadrangulaire à 4 nœuds basé sur la théorie de Kirchhoff est noté dans cet article QD4K.

## 2.3 Éléments tridimensionnels

### L'élément de volume

Dans cet élément, aucune hypothèse simplificatrice n'est posée sur les déformations et les contraintes. Il est, par contre, nécessaire, pour calculer l'énergie élastique, de faire des hypothèses sur l'évolution du champ de déplacement à l'intérieur de l'élément. Chaque nœud comporte 3 inconnues : les trois composantes  $u, v, w$  du vecteur déplacement.

Dans un élément à 8 nœuds, on suppose que les composantes du vecteur déplacement varient linéairement le long des arêtes.

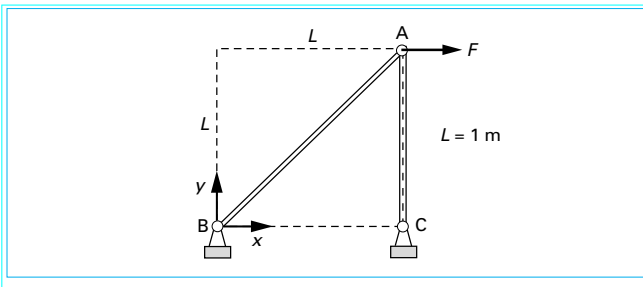


Figure 13 - Treillis

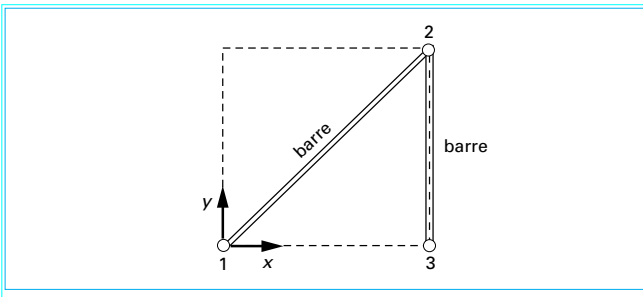


Figure 14 - Modélisation du treillis

### 3. Cas d'étude

#### 3.1 Cas d'étude n° 1 : modélisation d'une structure par barres

L'étude n° 1 (figure 13) concerne une structure réalisée à partir de 2 tubes AB et AC de même section droite, rotulés entre eux et avec le bâti. Un effort  $F$  est appliqué en A.

##### 3.1.1 Modélisation

Puisque les 2 composants AB et AC sont biarticulés ils ne peuvent travailler qu'en traction ou compression. Il est donc possible d'utiliser des éléments **barres**.

##### 3.1.2 Maillage

Le maillage minimal consiste à positionner un **nœud** sur chacune des 3 articulations et à utiliser 2 éléments barres, comme il est indiqué sur la figure 14.

##### 3.1.3 Données

La détermination de l'énergie élastique dans l'élément nécessite de connaître uniquement (§ 1.2) :

- le matériau par son module d'Young : .....  $E = 210 \text{ GPa}$  ;
- l'aire  $S$  de la section droite : .....  $S = 5.10^{-4} \text{ m}^2$ .

#### 3.1.4 Conditions limites

L'élément barre possède 3 degrés de liberté par nœud (§ 2.2.1) :  $u, v, w$  (les rotations n'interviennent pas dans le calcul de l'énergie d'effort normal).

- Il faut indiquer au programme que les nœuds 1 et 3 sont fixes :

$$u(1) = u(3) = 0$$

$$v(1) = v(3) = 0$$

$$w(1) = w(3) = 0.$$

- Ces conditions posées, le treillis conserve une possibilité de rotation autour de BC. Si ce déplacement d'ensemble n'est pas interdit, il est impossible de résoudre le système linéaire portant sur les déplacements des nœuds, car il n'y a pas unicité de la solution. Il est donc impératif d'interdire ce déplacement, ce qui peut être fait en bloquant le déplacement du nœud 2 dans la direction  $z$  :

$$w(2) = 0$$

Certains logiciels réalisent ce blocage de manière automatique.

- L'effort  $F$  est entré sous la forme d'une force ponctuelle

$$F = 1\,000 \text{ N}$$

appliquée au nœud 2.

#### 3.1.5 Résultats et remarques

Les **résultats** obtenus sont identiques à ceux fournis par une analyse en théorie des poutres puisque, dans ces éléments, aucune hypothèse n'est réalisée sur le déplacement.

On obtient, pour le nœud 2 :

$$u(2) = 36,46.10^{-3} \text{ mm}$$

$$v(2) = 9,524.10^{-3} \text{ mm}$$

À partir du calcul de ces déplacements, le problème est entièrement résolu et le logiciel peut fournir :

- la déformation relative dans la direction de la barre ;
- la contrainte de traction ou de compression notée  $\sigma$  ;
- l'effort normal dans la barre :  $N$ .

On trouve :

- dans la barre AB :

$$\sigma = + 2,83 \text{ MPa} ; N = + 1\,414 \text{ N}$$

- dans la barre AC :

$$\sigma = - 2 \text{ MPa} ; N = - 1\,000 \text{ N}$$

La **précision** n'est pas améliorée en augmentant le nombre d'éléments, puisque la solution obtenue est exacte au sens de la théorie des poutres.

Si on place un **nœud supplémentaire** sur la travée AB, la précision ne changera pas, mais un problème de résolution apparaîtra puisqu'une mobilité supplémentaire sera créée (figure 15). Cette mobilité devra être interdite par des conditions aux limites appropriées.

#### 3.2 Cas d'étude n° 2 : modélisation d'une structure par barres et poutres

Dans l'étude n° 2 (figure 16) la structure proposée est la même que précédemment (figure 13), mais l'effort est appliqué au milieu de AC.

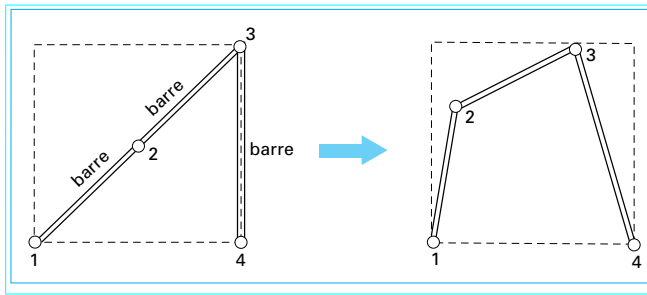


Figure 15 – Mouvement d'ensemble

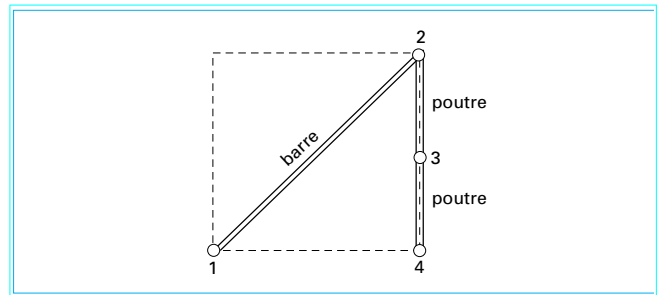


Figure 17 – Modélisation

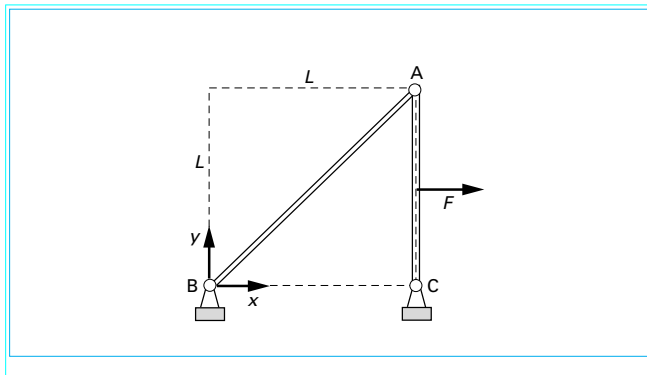


Figure 16 – Structure rotulée

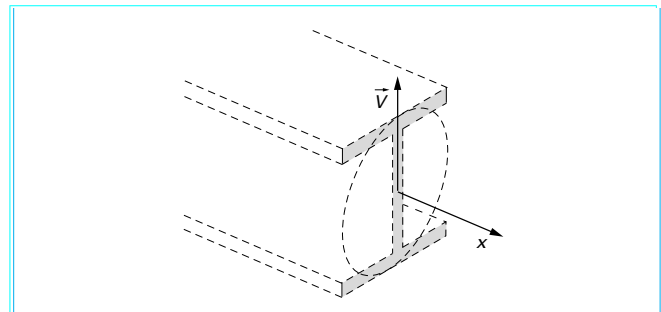


Figure 18 – Section droite d'une poutre et axes principaux

### 3.2.1 Modélisation

Du fait des liaisons, le tube AB n'est soumis qu'à des efforts appliqués à ses extrémités et il travaille donc uniquement en traction ou compression. Par contre, du fait de la position de l'effort  $F$ , le tube AC supporte des efforts de compression mais aussi des efforts de flexion. Si AB peut toujours être modélisé par une **barre**, AC doit être modélisé en **poutre**.

### 3.2.2 Maillage

Le maillage minimal consiste à placer un nœud sur chaque articulation ainsi qu'un nœud au niveau du point d'application de l'effort (figure 17). Dans ce cas, il faut donc utiliser un élément barre pour modéliser AB et deux éléments poutres pour AC.

### 3.2.3 Données

■ Pour caractériser l'**élément barre**, il faut comme précédemment indiquer :

- le module d'Young .....  $E = 210 \text{ GPa}$  ;
- l'aire de la section .....  $S = 5 \text{ cm}^2$ .

■ Pour l'**élément poutre**, il est nécessaire de connaître en plus de  $E$  et  $S$  :

**pour le matériau** : le coefficient de Poisson  $\nu$  ou le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} ;$$

**pour caractériser la section :**

— la *position des axes principaux de la section* : en effet, si les deux nœuds définissent la direction de la ligne moyenne ( $x$ ), il reste à indiquer le calage angulaire de la section droite perpendiculairement à cette ligne moyenne ; cela est généralement réalisé par l'indication d'un vecteur  $\vec{V}$  appartenant à un plan principal (figure 18) ;

— les *coefficients de section réduite* ; ils permettent de calculer l'énergie d'effort tranchant ; si ces coefficients ne sont pas connus, on peut les poser égaux à 1 ce qui revient à supposer que la contrainte de cisaillement est répartie uniformément dans la section droite ; l'erreur commise est faible si la déformée d'effort tranchant est négligeable ce qui est souvent le cas ;

— les *moments quadratiques* associés aux axes principaux notés  $I_y$  et  $I_z$  ;

— le *coefficient  $J$  de rigidité en torsion* de la section ; rappelons que  $J$  est égal au moment polaire s'il s'agit d'une section circulaire et uniquement dans ce cas.

Si la torsion n'intervient pas, il convient d'entrer une valeur fictive, mais réaliste, pour éviter des problèmes numériques (de l'ordre du moment quadratique par exemple).

Il est généralement supposé que le centre de torsion, le centre de gravité, le centre élastique et le nœud sont confondus. Si ce n'est pas le cas, pour la section envisagée, il faut soit utiliser un élément de poutre autorisant cette différenciation, soit décomposer la poutre en éléments de plaque, de coque ou de volume (§ et 2.3).



**Données :**

$$\begin{aligned} L &= 1 \text{ m} \\ S &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \\ I_z &= 1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 \\ E &= 210 \text{ GPa} \\ \nu &= 0,3 \end{aligned}$$

Les valeurs données à  $J$  et à  $I_y$  n'affectent pas le résultat dans ce cas, puisque les composantes du moment de flexion ( $M_y$ ) et du moment de torsion ( $M_t$ ) sont nulles. Pour ne pas créer de problèmes numériques, il est souhaitable de donner à ces coefficients des valeurs réalistes. On peut par exemple leur donner la même valeur que  $I_z$ .

**3.2.4 Conditions limites**

L'élément de poutre standard possède 6 degrés de liberté par nœud (§ 2.2.2) :

$$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z.$$

Compte tenu des liaisons avec le bâti, il faut imposer :

$$u(1) = u(4) = 0$$

$$v(1) = v(4) = 0$$

$$w(1) = w(4) = 0$$

Comme dans l'exemple précédent (§ 3.1), la structure peut tourner librement autour de BC. Cette rotation peut être éliminée de plusieurs façons et, par exemple, en posant :

$$\theta_x(4) = 0$$

Il est aussi possible, comme précédemment (§ 3.1.4), de poser :

$$w(2) = 0$$

En outre, la poutre AC peut tourner librement autour de son axe. Or, si un mouvement de solide reste possible pour l'ensemble ou une partie de la structure, la matrice de rigidité  $[K_d]$  n'est pas inversible et le système linéaire sur les déplacements est sans solution. Il faut interdire ce mouvement en posant par exemple :

$$\theta_y(4) = 0$$

L'effort  $F$  est entré sous la forme d'une force ponctuelle, appliquée au nœud 3 :

$$F = 1\,000 \text{ N}$$

**3.2.5 Résultats et remarques**

Les **résultats** en déplacement obtenus au nœud 3 sont :

$$u(3) = 9,94 \text{ mm}$$

$$v(3) = -2,36 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Ils sont identiques à la solution en résistance des matériaux puisqu'aucune hypothèse sur les déplacements n'a été faite dans ces éléments.

À partir du calcul des déplacements des nœuds, le problème est résolu et le logiciel peut fournir :

- les éléments de réduction (effort normal  $N$ , efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$ , moment de torsion  $M_t$  et moments de flexion  $M_y$  et  $M_z$ ) ;
- la contrainte due à l'effort normal :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Les autres contraintes ne peuvent pas être déterminées, car elles nécessitent une connaissance plus complète de la section.

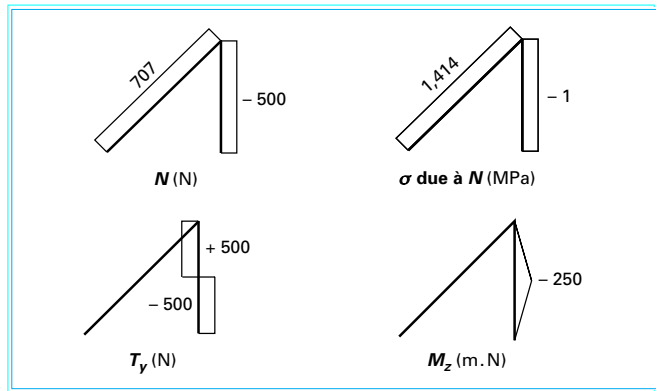


Figure 19 – Contraintes et éléments de réduction

Les résultats obtenus sont donnés figure 19.

Si la poutre est maillée plus finement, le résultat sera bien évidemment inchangé puisque la solution obtenue précédemment est la solution exacte au sens de la théorie des poutres.

Le maillage de l'élément AB par une poutre amène à une modélisation incorrecte puisqu'elle élimine la liaison pivot au point A (lorsque deux éléments ont un nœud en commun, tous les degrés de liberté en ce nœud sont communs).

Il est cependant généralement possible, après avoir modélisé tous les éléments par des poutres, d'imposer une liaison rotule en A, en indiquant explicitement que, en ce nœud, seuls les degrés de liberté de translation doivent être mis en commun. Dans ce cas, la modélisation est plus complexe mais redevient correcte.

**3.3 Cas d'étude n° 3 : tôle encastrée en flexion dans son plan**

L'étude n° 3 (figure 20) concerne une tôle encastrée et soumise, dans son plan, à un effort  $F$  appliqué à l'extrémité libre.

**3.3.1 Modélisation**

La tôle travaille en flexion dans son plan. Compte tenu de la sollicitation, on peut considérer que les contraintes sont constantes dans l'épaisseur. Il est donc possible de modéliser cette structure à partir d'éléments de membrane (§ 2.2.3).

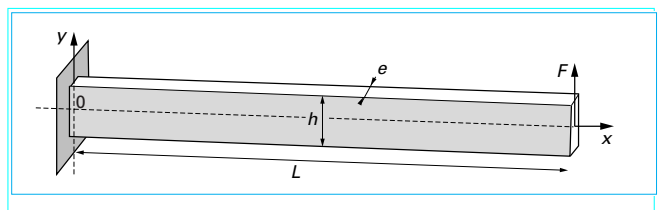


Figure 20 – Plaque encastrée

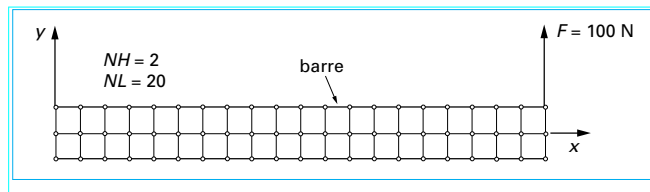


Figure 21 – Modélisation

### 3.3.2 Maillage

Dans ces éléments, une hypothèse est toujours faite sur le champ de déplacement. On obtient donc une solution approchée, qui sera d'autant plus précise que le maillage sera fin. Appelons  $NH$  le nombre d'éléments dans la hauteur et  $NL$  le nombre d'éléments dans la longueur. Plusieurs maillages sont réalisés et une étude de convergence est effectuée pour déterminer les valeurs optimales à donner à  $NH$  et  $NL$ .

La détermination de la contrainte s'effectuant à l'intérieur de l'élément, il peut être difficile d'accéder à une valeur correcte des contraintes sur les frontières. Cette difficulté peut être contournée en plaçant sur le bord considéré des éléments barres de faible section (figure 21), qui perturbent peu la rigidité tout en jouant le rôle d'une jauge de déformation sur une structure réelle. La lecture de la contrainte dans ces éléments permet d'accéder à la valeur prise au niveau du bord libre.

### 3.3.3 Données (figure 20)

- épaisseur .....  $e = 1 \text{ mm}$
- longueur .....  $L = 500 \text{ mm}$
- hauteur .....  $h = 50 \text{ mm}$
- module d'Young .....  $E = 70 \text{ GPa}$
- coefficient de Poisson .....  $\nu = 0,3$

### 3.3.4 Conditions limites

■ La section placée à l'abscisse  $x = 0$  est encastrée. Il convient donc de poser

$$u = 0 \text{ et } v = 0$$

pour les nœuds situés à  $x = 0$ .

De plus, pour tous les nœuds, le déplacement a lieu dans le plan de la tôle donc :

$$w = 0$$

■ Nous supposons que l'effort  $F$  est réparti uniformément à l'extrémité. Si  $n$  est le nombre de nœuds sur le bord, cette opération se traduit par l'application de :

— sur les nœuds extrêmes :

$$\frac{F}{2(n-1)}$$

— sur les autres :

$$\frac{F}{(n-1)}$$

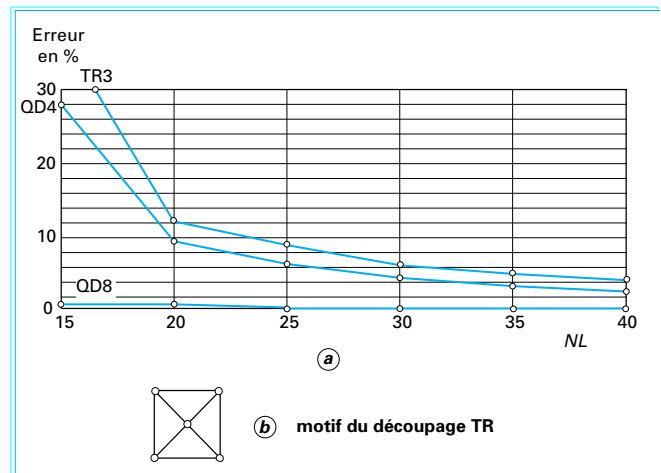


Figure 22 – Erreur sur la flèche à l'extrémité en fonction de  $NL$  pour  $NH = 5$

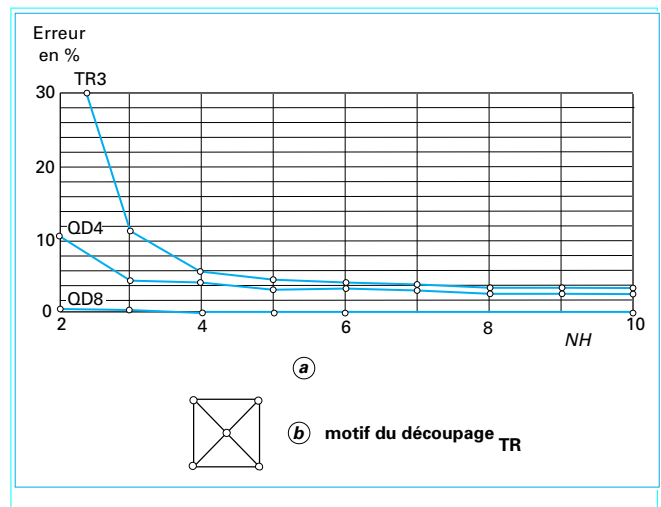


Figure 23 – Erreur sur la flèche à l'extrémité en fonction de  $NH$  pour  $NL = 40$

### 3.3.5 Résultats et remarques

Les sorties possibles à partir du calcul des déplacements des nœuds sont :

- les contraintes dans le plan  $xy$ . Ces contraintes sont données aux points de Gauss (points intérieurs à l'élément utilisés lors de l'intégration, § 2.2.3) ou bien moyennées sur l'élément ou bien encore extrapolées aux nœuds ;
- les contraintes équivalentes de Von Mises [10], les directions principales du tenseur des contraintes, ainsi que les valeurs des contraintes principales.

Les **résultats** obtenus pour différents maillages et différents éléments sont réunis figure 22 et figure 23 et comparés aux résultats théoriques.

La flèche à l'extrémité, calculée par la théorie des poutres avec un coefficient de section réduite de  $6/5$  [9], vaut :  $5,7589 \text{ mm}$ .

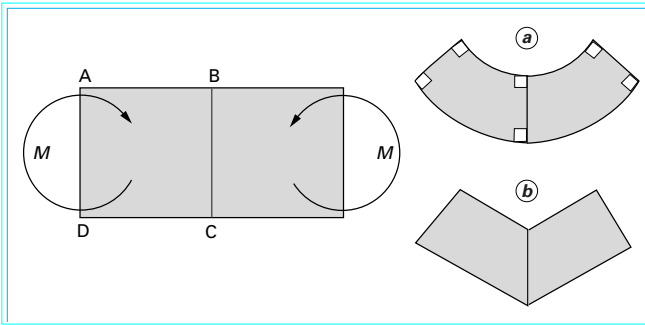


Figure 24 – Déformées en flexion

L'élément triangulaire est repéré TR3 et les éléments quadrangulaires QD4 et QD8 (figures 10 et 12).

Pour l'élément TR3, le maillage est réalisé en découpant chaque quadrangle en 4 triangles suivant figure 22 b.

Comme il est possible de l'analyser sur la figure 22 et la figure 23, les éléments quadrangles QD4 à champ bilinéaire (figure 10 b) convergent très lentement pour cette sollicitation (flexion). Cela vient du fait que l'hypothèse sur le champ de déplacement induit une énergie de cisaillement parasite. Sous cette sollicitation de flexion pure de moment  $M$  (figure 24), les angles A, B, C, D restent droits (figure 24 a) tandis que dans l'élément ils changent de valeur (figure 24 b).

L'élément à champ quadratique QD8 (figure 12 b) permet d'éviter ce problème et on remarque d'ailleurs qu'il converge beaucoup plus vite. Il suffit d'un élément dans la hauteur et de sept ou huit éléments dans la longueur.

Les utilisateurs préfèrent cependant, en général, les éléments à quatre nœuds pour des raisons de facilité de maillage. Il a ainsi été développé des éléments particuliers qui permettent d'améliorer le comportement du quadrangle à quatre nœuds pour ce type de problème. Citons, par exemple, les éléments dans lesquels l'énergie de cisaillement est déterminée à partir de la valeur de la distorsion du point situé au centre de l'élément. Les performances de cet élément sont comparables à celles du QD8 pour cette sollicitation de flexion. Pour ces éléments, il suffit de placer un élément dans la hauteur et une dizaine d'éléments dans la longueur.

Il est important de remarquer que :

- les éléments standards sont inadaptés aux problèmes de flexion (on retrouve d'ailleurs les mêmes difficultés lors d'un maillage volumique) ; il est donc nécessaire soit de réaliser un maillage fin, soit d'utiliser des éléments spécifiques ;
- l'étude linéaire ne prend pas en compte les problèmes de stabilité qui, dans cette étude, sont primordiaux ;
- les éléments triangulaires sont les moins performants.

### 3.4 Cas d'étude n° 4 : modélisation par membranes

L'étude n° 4 concerne une plaque carrée trouée sollicitée en traction (figure 25). On s'intéresse tout particulièrement au phénomène de concentration de contraintes au bord du trou.

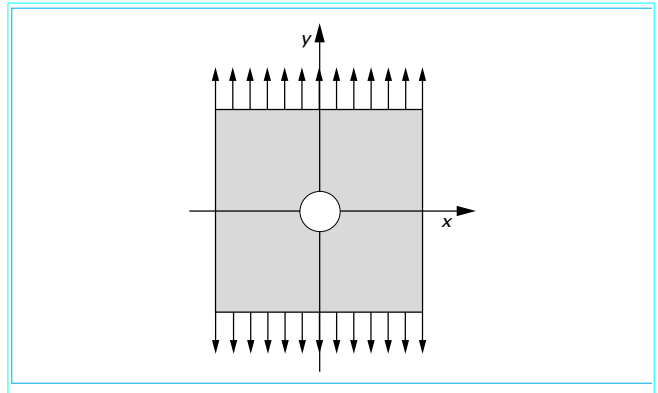


Figure 25 – Plaque trouée en traction

#### 3.4.1 Modélisation

La plaque travaille dans son plan. On peut considérer les contraintes comme constantes dans l'épaisseur. Comme dans le cas précédent, cette structure peut être modélisée par des éléments de membrane (§ 2.2.3).

Le problème étant deux fois symétrique, il suffit de mailler 1/4 de la plaque.

#### 3.4.2 Maillage

Pour étudier la contrainte au voisinage du trou, il est nécessaire de resserrer le maillage dans cette zone (figure 26) car la variation des contraintes  $y$  est importante alors que, dans l'élément, on suppose des variations linéaires. L'utilisation d'éléments barres est possible pour une meilleure lecture au niveau du bord libre.

#### 3.4.3 Données

- épaisseur .....  $e = 5 \text{ mm}$
- côté .....  $L = 100 \text{ mm}$
- module d'Young .....  $E = 70 \text{ GPa}$
- coefficient de Poisson .....  $\nu = 0,3$
- pour l'élément barre : même matériau et section  $S = 0,01 \text{ mm}^2$ .

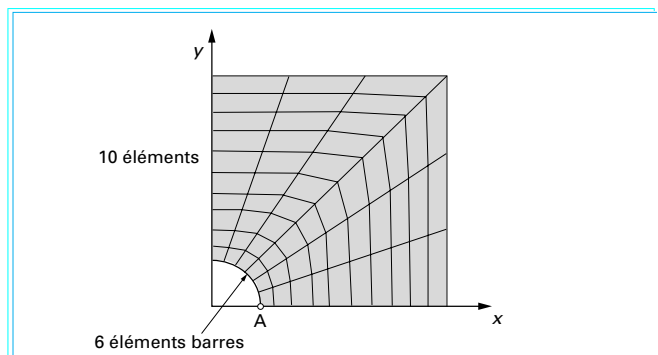


Figure 26 – Modélisation du 1/4 de la plaque

### 3.4.4 Conditions limites

■ Pour traduire la symétrie, il faut indiquer que tous les nœuds situés sur un axe de symétrie doivent rester sur cet axe. Cela se fait en indiquant :

- pour tous les nœuds appartenant à l'axe  $x$  :  $v = 0$  ;
- pour les nœuds appartenant à l'axe  $y$  :  $u = 0$ .

■ De plus, puisque le déplacement a lieu dans le plan de la tôle, il peut être nécessaire d'indiquer pour tous les nœuds :

$$w = 0$$

■ La résultante de l'effort de traction vaut :  $F = 100\ 000\ \text{N}$ .

Le chargement étant uniforme, il existe, en général, une option permettant d'appliquer une répartition d'effort sur une ligne. En fait si  $n$  est le nombre de nœuds sur le bord de la demi-structure, cette opération se traduit par l'application de :

- sur les nœuds extrêmes :  $\frac{F}{4(n-1)}$
- sur les autres :  $\frac{F}{2(n-1)}$ .

### 3.4.5 Résultats et remarques

Le résultat obtenu en A pour la contrainte orthoradiale  $\sigma_\theta$  est donné figure 27. En ce point, cette contrainte coïncide avec la contrainte sur la facette de normale  $y$  :  $\sigma_y$ .

L'analyse de ces résultats montre :

— qu'il suffit de disposer 6 éléments sur un quart de trou pour obtenir une bonne représentation ;

— que le moyen choisi pour lire les contraintes près du bord est essentiel ; l'utilisation des barres visualisatrices est une méthode efficace ; la valeur donnée au point de Gauss le plus proche du bord libre n'est correcte que si l'élément est petit.

Si l'étude est effectuée non pas sur le quart mais sur la **totalité de la plaque**, il est nécessaire d'interdire tout déplacement d'ensemble à la structure. Pour ne pas induire des contraintes parasites, les liaisons utilisées doivent être impérativement de type isostatique. Il existe évidemment plusieurs situations de liaisons admissibles. La solution en déplacement dépendra de la situation choisie, mais les solutions en déformations et en contraintes en seront indépendantes. Un exemple de blocage admissible est donné sur la figure 28. En fin de calcul, il est conseillé de vérifier que les efforts de liaison sont nuls pour contrôler la validité de la fixation.

## 3.5 Cas d'étude n° 5 : tôle sollicitée en torsion

L'étude n° 5 concerne (figure 29) une tôle encadrée sollicitée en torsion (voir [8] pages 108-109).

### 3.5.1 Modélisation

La tôle est encadrée sur le côté AB et soumise à des efforts perpendiculaires à son plan. Sous cette sollicitation, la contrainte n'est pas constante dans l'épaisseur et il faut utiliser des éléments plaques.

La plaque étant symétrique et le chargement antisymétrique, la moitié seulement est maillée (figure 30).

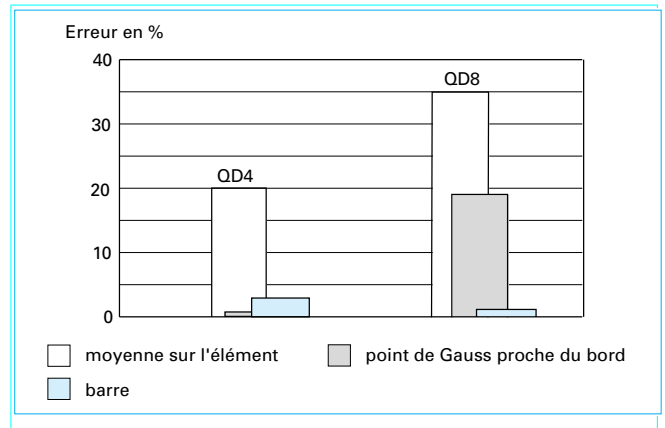


Figure 27 – Erreur sur la contrainte au bord du trou pour un maillage de 6 éléments en bord de trou par 10 éléments en bord droit

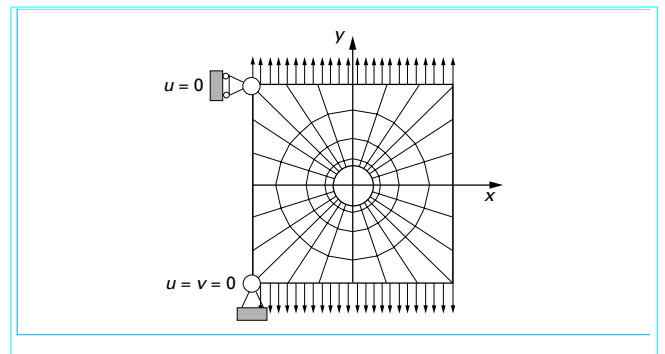


Figure 28 – Conditions de liaison de type isostatique pour un calcul de la plaque entière

### 3.5.2 Maillage

Des éléments quadrangulaires QD4K (§ 2.2.4) sont utilisés et une étude de convergence est effectuée en fonction du nombre d'éléments.

### 3.5.3 Données (figure 29)

- épaisseur .....  $e = 10\ \text{mm}$
- longueur .....  $L = 12\ 000\ \text{mm}$
- largeur .....  $\ell = 1\ 000\ \text{mm}$
- module d'Young .....  $E = 71\ \text{GPa}$
- coefficient de Poisson .....  $\nu = 0,3$

### 3.5.4 Conditions limites

■ Pour modéliser l'encastrement, tous les degrés de liberté sont bloqués à :

$$x = 0$$

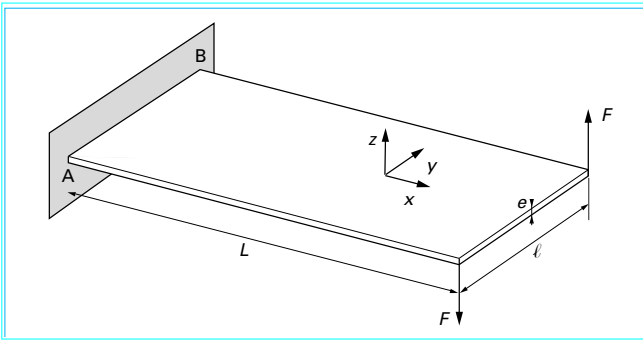


Figure 29 – Plaque en torsion

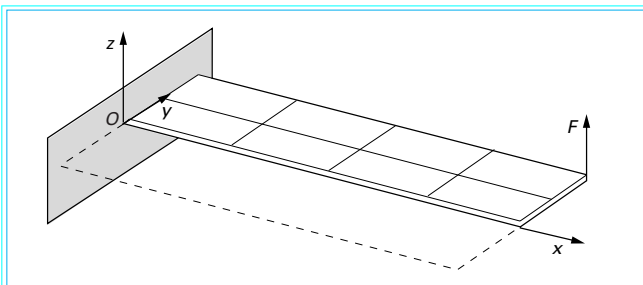


Figure 30 – Discrétisation de la demi-plaque en torsion

On pose :

$$u = 0, w = 0 \text{ et } \theta_y = 0$$

pour les nœuds situés sur l'axe d'antisymétrie Ox.

■ Une force ponctuelle d'intensité  $F = 1\,000\text{ N}$  est appliquée au nœud situé à l'angle.

### 3.5.5 Résultats et remarques

La solution de référence a été établie par une étude semi-analytique du problème.

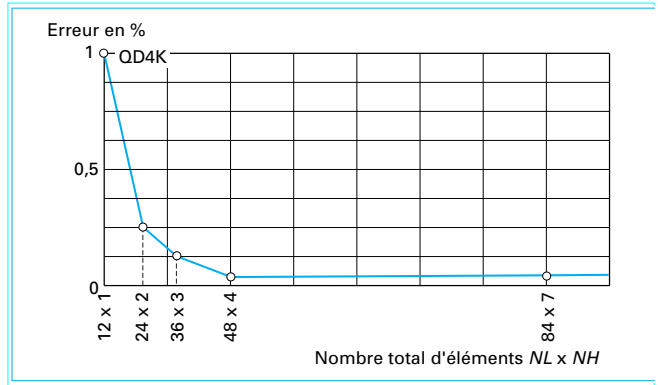


Figure 31 – Erreur sur la flèche en fonction du nombre d'éléments

Le déplacement vertical du point d'application de l'effort  $F$  obtenu vaut 35,37 mm avec une incertitude inférieure à 1 % sur le résultat.

L'utilisation de l'antisymétrie permet de réduire la taille du problème et il suffit d'un élément dans la largeur pour obtenir une excellente solution.

## 4. Conclusion

Le calcul d'une structure par la méthode des éléments finis exige, pour être efficace, d'accorder le plus grand soin à la phase de modélisation. La précision des résultats dépend de la qualité du modèle, mais également du maillage réalisé.

Aussi, il est recommandé d'effectuer une étude de convergence à partir de la comparaison des résultats issus de maillages plus ou moins affinés.

Enfin, la validation des résultats passe par une analyse des déplacements et des contraintes attestant que les hypothèses de départ (petitesse des déplacements et linéarité de comportement du matériau) ne sont pas mises en défaut.

## Références bibliographiques

- |  |   |  |
|--|---|--|
| <p>[1] ZIENKIEWICZ (O.C.). – <i>The finite element method in engineering science (volume 1)</i>. 1989 McGraw Hill.</p> <p>[2] ZIENKIEWICZ (O.C.). – <i>The finite element method in engineering science (volume 2)</i>. 1991 McGraw Hill.</p> <p>[3] IMBERT (J.F.). – <i>Analyse des structures par éléments finis</i>. 1991 Cepadues.</p> | <p>[4] BATOZ (J.L.) et DHATT (G.). – <i>Modélisation des structures par éléments finis (volume 1-2)</i>. 1990 Hermes.</p> <p>[5] BATOZ (J.L.) et DHATT (G.). – <i>Modélisation des structures par éléments finis (volume 3)</i>. 1992 Hermes.</p> <p>[6] PRAT (M.). – <i>La modélisation des ouvrages</i>. 1995 Hermes.</p> | <p>[7] Société française des mécaniciens. – <i>Guide de validation des progiciels de calcul de structures</i>. 1990 AFNOR.</p> <p>[8] LAROZE (S.). – <i>Mécanique des structures : Poutres</i>. 1988 Eyrolles-Masson.</p> <p>[9] LEMAITRE (J.) et CHABOCHE (J.L.). – <i>Mécanique des matériaux solides</i>. 1988 Dunod.</p> |
|--|---|--|