

## Chapitre 05

### Les techniques d'interpolation nodales en EF

#### Table des matières

Table des matières	1
1. Introduction.....	2
2. Méthodes utilisées pour effectuer une interpolation nodale.....	2
3. Le degré d'interpolation et son intérêt .....	2
3.1.1 Exemple 01 :.....	3
3.1.2 Exemple 02 :.....	4
4. Interpolation directe sur l'élément réel du maillage.....	5
4.1 Schéma d'interpolation directe linéaire- cas de l'élément barre .....	7
4.1.1 Exemple 03 :.....	8
4.2 Cas de l'interpolation nodale de degré élevé ou polynômes de Lagrange : .....	8
4.2.1 Exemple 04 :.....	9
5. Interpolation nodale utilisant les éléments de référence .....	10
5.1 Principe des éléments de référence : .....	11
5.2 Quelques types d'éléments de référence utilisés en EF.....	11
5.2.1 Eléments de références à une dimension .....	11
5.2.2 Eléments de références à deux dimensions .....	12
5.2.3 Eléments de référence à trois dimensions.....	12
5.3 Fonctions de forme et relations entre éléments réels et de référence .....	13
5.4 Interpolation nodale dans l'élément de référence.....	19
5.5 Eléments isoparamétriques.....	19
5.6 Démarche à suivre.....	20
5.7 Exemples.....	21
5.7.1 Exemple 05 : interpolation en 1D dans l'élément SEG2 en utilisant l'élément de référence .....	21
5.7.2 Exemple 06 : interpolation quadratique de degré 2 en 1D en utilisant l'élément de référence SEG3	22
5.7.3 Exemple 07 : interpolation linéaire de degré 1 en 2D en utilisant l'élément triangulaire de référence TRI3 .....	24
5.7.4 Exemple 08 : interpolation linéaire de degré 1 en 2D en utilisant l'élément quadrangulaire de type QUA4.....	28
6. Forme particulière de la matrice Jacobienne en éléments finis .....	31
6.1.1 Exemple 09 : Forme particulière de la matrice Jacobienne $J$ de l'élément triangulaire TRI3 ...	32
6.1.2 Exemple 10 :.....	33
6.1.3 Exemple 11 :.....	33

## 1. Introduction

Si on considère un élément quelconque d'un maillage, l'interpolation nodale en EF consiste à calculer une valeur approchée d'une grandeur en n'importe quel point à l'intérieur de cet élément et ce, en fonction des valeurs connues de cette grandeur aux nœuds de cet élément.

Du point de vue mathématique, l'interpolation nodale consiste également à trouver l'expression d'une fonction à partir de la connaissance de valeurs de cette fonction en un certain nombre de points. En effet, considérons le cas d'une fonction à une seule variable  $u(x)$  dont l'expression est a priori inconnue mais dont les valeurs sont connues en  $n$  points d'abscisses respectifs  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , tels que :

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < \dots < x_n \quad \text{et} \quad u(x_1) = u_1, u(x_2) = u_2, \dots, u(x_n) = u_n.$$

Donc  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$  sont des valeurs connues et l'expression de  $u(x)$  inconnue. Le problème consiste donc à trouver une « expression approchée » de  $u(x)$ . A cet effet, l'interpolation nodale est une méthode qui consiste à déterminer cette expression approchée de  $u(x)$  mais sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  tout en vérifiant les conditions  $u(x_i) = u_i$  et  $u(x_{i+1}) = u_{i+1}$  avec  $i = 1, n - 1$ .

## 2. Méthodes utilisées pour effectuer une interpolation nodale

Pour réaliser cette interpolation nodale, on peut procéder par deux méthodes différentes. La première est une méthode dite directe où l'on interpole directement dans l'élément (ou dans l'intervalle pour le cas 1D). Toutefois, cette méthode directe n'est facile à utiliser que dans le cas unidimensionnel (1D) où la fonction à interpoler est à une seule variable. Par contre, cette méthode d'interpolation directe est particulièrement difficile dans les cas bidimensionnel 2D de fonctions à deux variables  $u(x, y)$ , ainsi que dans le cas tridimensionnel 3D de fonctions à trois variables  $u(x, y, z)$ .

Pour remédier à cette difficulté, il existe une seconde méthode qui est assez facile et que nous verrons plus loin au paragraphe 4. Cette seconde méthode utilise les éléments dits «de référence ». En effet, au lieu d'interpoler directement dans l'élément réel, cette méthode consiste à interpoler en premier dans l'élément de référence, puis en utilisant les relations entre cet élément de référence et l'élément réel, on retrouve facilement l'expression de la fonction d'interpolation dans l'élément considéré du maillage.

## 3. Le degré d'interpolation et son intérêt

La quasi-totalité des logiciels de calculs basés sur la MEF, proposent (indirectement) à l'utilisateur de choisir entre deux degrés d'interpolation. Le premier est dit linéaire de degré 1. Le second est dit quadratique de degré 2. De manière plus claire, reprenons l'exemple mathématique précédent et qui consistait à déterminer l'expression de la fonction à une seule variable  $u(x)$  sur une série de  $(n - 1)$  intervalles successifs  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i = 1, n - 1$ . En effet, pour déterminer  $u(x)$ , nous devons supposer comme étant connue l'allure de la variation de  $u(x)$  ou bien plus précisément son degré de variation à l'intérieur de chaque intervalle. Autrement dit, nous devons adopter un schéma d'interpolation. Par exemple, si nous supposons que la variation de  $u(x)$  entre les points d'abscisses respectifs  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , se fait de manière linéaire (selon l'allure d'un segment de droite) alors  $u(x)$  aura pour expression celle d'une fonction polynomiale de degré 1, de la forme :

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1. \quad \text{sur l'intervalle } [x_i, x_{i+1}] \quad (01)$$

Il s'agit donc de trouver les valeurs des coefficients  $a_0$  et  $a_1$  qui sont deux inconnues à déterminer en résolvant le système d'équations ci-dessous sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i = 1, n - 1$ . Donc chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  aura ses propres coefficients  $a_0$  et  $a_1$  tel que :

$$\begin{cases} u(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i = u_i \\ u(x_{i+1}) = a_0 + a_1 \cdot x_{i+1} = u_{i+1} \end{cases} \quad (02)$$

Donc en adoptant un schéma d'interpolation linéaire de degré 1, il suffit d'avoir deux nœuds aux extrémités de chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  pour trouver l'expression approchée de  $u(x)$  sur cet intervalle.

Par ailleurs, il est important de rappeler que les valeurs trouvées (après résolution) des coefficients  $a_0$  et  $a_1$  ne sont valables que sur l'intervalle considéré  $[x_i, x_{i+1}]$ . Donc chaque intervalle aura ses propres valeurs  $a_0$  et  $a_1$ .

### 3.1.1 Exemple 01 :

Soit un exemple unidimensionnel 1D d'un ensemble de 09 points compris entre 0 et  $2\pi$  dont les valeurs respectives sont :  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_3 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_4 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x_5 = \pi$ ,  $x_6 = \frac{5\pi}{4}$ ,  $x_7 = \frac{3\pi}{2}$ ,  $x_8 = \frac{7\pi}{4}$ ,  $x_9 = 2\pi$ . La fonction  $u(x)$  dont l'expression est a priori inconnue possède les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} u(x_1) = u(0) = u_1 = 0, & \quad u(x_2) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \quad u(x_3) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3 = 1, \\ u(x_4) = u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = u_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_5) = u(\pi) = u_5 = 0 & \quad u(x_6) = u\left(\frac{5\pi}{4}\right) = u_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u(x_7) = u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = u_7 = -1 & \quad u(x_8) = u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = u_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_9) = u(2\pi) = u_9 = 0. \end{aligned}$$

En adoptant un schéma d'interpolation linéaire, qui consiste à résoudre le système de deux équations (02) sur chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  avec  $i = 1, (9 - 1)$  les expressions approchées de  $u(x)$  seront comme suit :

$$u(x) = \begin{cases} \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) x \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{2}{\pi} (2 - \sqrt{2})x + (\sqrt{2} - 1) \text{ pour } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{2}{\pi} (2 - \sqrt{2})x + (3 - \sqrt{2}) \text{ pour } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4} \\ -\left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) x + 2\sqrt{2} \text{ pour } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases} \text{ et } u(x) = \begin{cases} -\left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) x + 2\sqrt{2} \text{ pour } \pi \leq x \leq \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) \\ -\frac{2}{\pi} (2 - \sqrt{2})x + (5 - 3\sqrt{2}) \text{ pour } \frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) x - (1 + 3\sqrt{2}) \text{ pour } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \left( 2\pi - \frac{\pi}{4} \right) \\ \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right) x - 4\sqrt{2} \text{ pour } \frac{7\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Soit  $u_{ex}(x) = \sin(x)$  la solution exacte du problème précédent. Les représentations graphiques de cette solution exacte ainsi que de l'expression approchée en pointillés de  $u(x)$  (figure 01 ci-dessous) montrent l'écart entre ces deux solutions en dehors des nœuds et mettent clairement en évidence le caractère approché de cette interpolation linéaire.

Par ailleurs, si on désire augmenter la précision de nos calculs, l'une des démarches couramment utilisées, consiste à adopter un schéma d'interpolation de degré plus élevé. Dans notre cas, le degré le plus élevé par rapport au degré 1 du schéma précédent sera le degré 2 où  $u(x)$  variera de manière quadratique dans chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , c'est-à-dire que  $u(x)$  doit avoir pour expression une fonction polynomiale de degré 2, de la forme :

$$u(x) = a_0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 \quad (03)$$

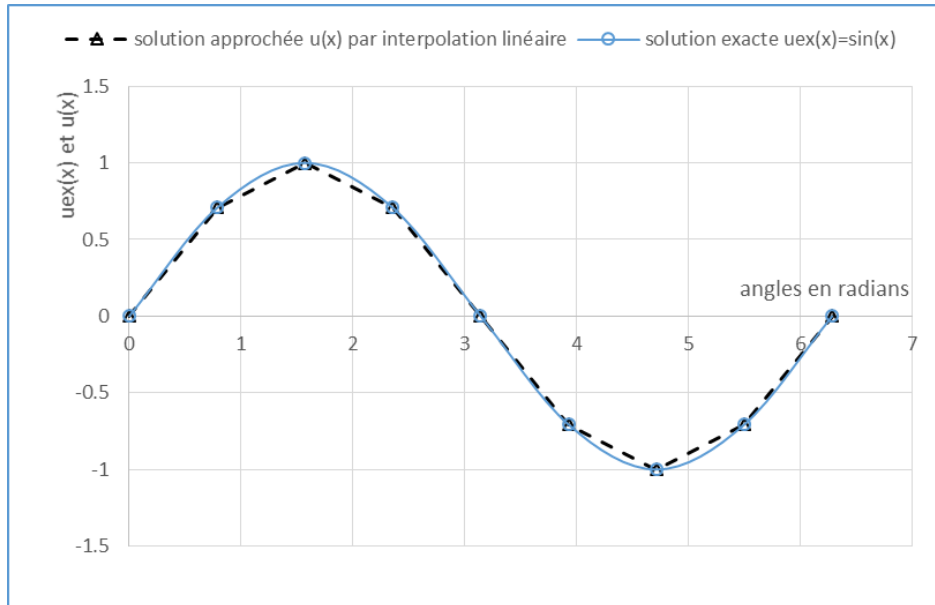


Figure 01 : schéma d'interpolation linéaire de la fonction  $u_{ex}(x) = \sin(x)$

Pour trouver les valeurs des trois inconnues  $a_0, a_1$  et  $a_2$  sur chaque intervalle, nous avons besoin de trois équations. A cet effet, au lieu de considérer des intervalles à deux nœuds d'abscisses respectifs  $x_i$  et  $x_{i+1}$ , il faut considérer cette fois des intervalles de type « à trois nœuds » :  $x_{i-1}, x_i$  et  $x_{i+1}$  appartenant à l'intervalle  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  avec  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  et telle que

$$u(x_{i-1}) = u_{i-1}, \quad u(x_i) = u_i \quad \text{et} \quad u(x_{i+1}) = u_{i+1}, \quad u_{i-1}, u_i \quad \text{et} \quad u_{i+1} \quad \text{étant des valeurs connues.}$$

Ce qui permet d'avoir un système de trois équations à inconnues  $a_0, a_1$  et  $a_2$  faciles à déterminer en résolvant le système :

$$\begin{cases} u(x_{i-1}) = a_0 + a_1 \cdot x_{i-1} + a_2 \cdot x_{i-1}^2 = u_{i-1} \\ u(x_i) = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 = u_i \\ u(x_{i+1}) = a_0 + a_1 \cdot x_{i+1} + a_2 \cdot x_{i+1}^2 = u_{i+1} \end{cases} \quad (04)$$

Finalement, on peut remarquer qu'en adoptant un schéma d'interpolation quadratique de degré 2, il fallait avoir au minimum trois nœuds dans chaque intervalle pour trouver l'expression approchée de  $u(x)$ . Ainsi, on arrive à la conclusion que plus on augmente le degré de l'interpolation (c'est-à-dire plus on désire augmenter la précision de nos calculs), plus on a besoin de nœuds à l'intérieur de l'intervalle considéré (c'est-à-dire de données).

### 3.1.2 Exemple 02 :

Reprenons l'exemple précédent et adoptons un schéma d'interpolation quadratique de degré 02 mais en ne considérant cette fois que quatre intervalles (ou éléments) à trois nœuds (ou points) chacun. Le premier intervalle  $[x_1, x_3]$  contient les nœuds  $x_1 = 0, x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 = \frac{\pi}{2}$ . Le second intervalle  $[x_3, x_5]$  contient les nœuds  $x_3 = \frac{\pi}{2}, x_4 = \frac{3\pi}{4}, x_5 = \pi$ . Le troisième intervalle  $[x_5, x_7]$  contient les nœuds

$x_5 = \pi, x_6 = \frac{5\pi}{4}, x_7 = \frac{3\pi}{2}$ . Le quatrième intervalle  $[x_7, x_9]$  contient les nœuds  $x_7 = \frac{3\pi}{2}, x_8 = \frac{7\pi}{4},$  et  $x_9 = 2\pi$ .

La fonction  $u(x)$  de degré 2 possède les valeurs suivantes aux 09 nœuds :

$$\begin{aligned}
u(x_1) = u(0) = u_1 = 0, & \quad u(x_2) = u\left(\frac{\pi}{4}\right) = u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \quad u(x_3) = u\left(\frac{\pi}{2}\right) = u_3 = 1, \\
u(x_4) = u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = u_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_5) = u(\pi) = u_5 = 0 & \quad u(x_6) = u\left(\frac{5\pi}{4}\right) = u_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
u(x_7) = u\left(\frac{3\pi}{2}\right) = u_7 = -1 & \quad u(x_8) = u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = u_8 = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \quad u(x_9) = u(2\pi) = u_9 = 0.
\end{aligned}$$

La résolution du système (04) de trois équations sur chacun des quatre intervalles précédents, donne les quatre expressions suivantes et dont la représentation graphique est illustrée sur la courbe en petits pointillés :

$$u(x) = \begin{cases} 1.164x - 0.3357x^2 & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0.3431 + 0.9456x - 0.3357x^2 & \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0.6971 - 0.3274x + 0.3357x^2 & \text{pour } \pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ 0.5941 - 0.3055x + 0.3357x^2 & \text{pour } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

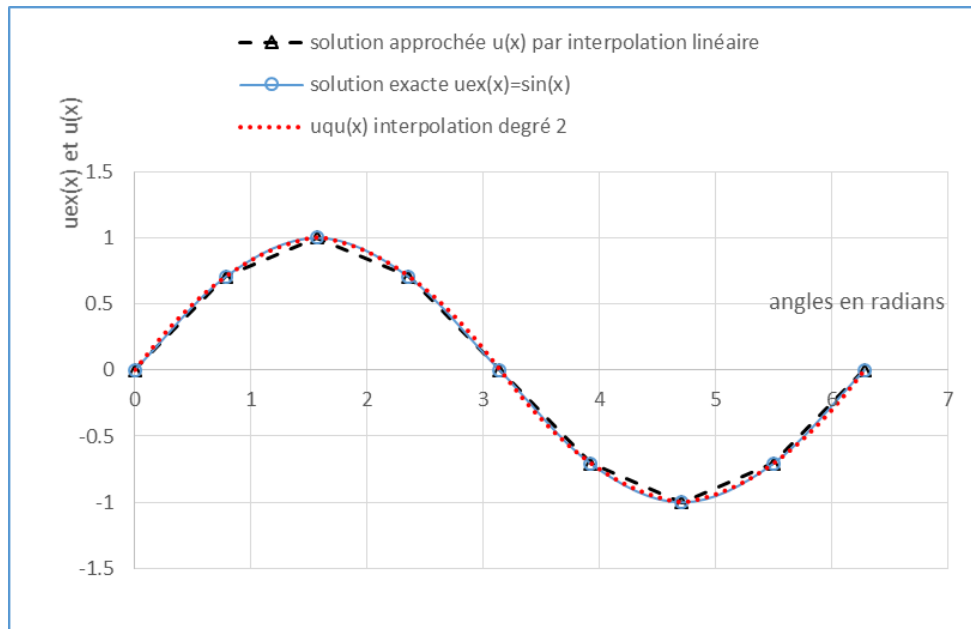


Figure 02 : schémas d'interpolations linéaires et quadratiques de la fonction  $u_{ex}(x) = \sin(x)$

Ainsi, on voit bien sur la figure 02 précédente que la courbe obtenue en utilisant l'interpolation de degré 2 est plus proche de la solution exacte que celle obtenue avec interpolation linéaire de degré 1. Ceci a permis de mettre en évidence l'augmentation de la précision en augmentant le degré du polynôme d'interpolation.

#### 4. Interpolation directe sur l'élément réel du maillage

Pour cette méthode d'interpolation directe dans un élément, nous commencerons d'abord par donner la formule générale utilisant les fonctions d'interpolations et ce, pour les trois cas 1D, 2D et 3D. En effet, soit un point M quelconque situé à l'intérieur d'un élément ou sur sa frontière. Soit  $n$  le nombre total de nœuds que contient cet élément. Soit une grandeur physique  $U$  dont les valeurs sont connues aux  $n$  nœuds de cet élément. Ces valeurs sont notées:  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ . La valeur approchée de  $U$  au point M peut être obtenue par interpolation directe en utilisant, selon le cas (1D, 2D ou 3D), les expressions suivantes :

Pour le cas unidimensionnel 1D, la grandeur  $U$  doit être considérée comme une fonction à une seule variable  $U(x)$  telle que :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \cdot U_i \quad (05)$$

Pour le cas bidimensionnel 2D, la grandeur  $U$  doit être considérée comme une fonction à deux variables  $U(x, y)$  telle que :

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot U_i \quad (06)$$

Pour le cas tridimensionnel 3D, la grandeur  $U$  doit être considérée comme une fonction à trois variables  $U(x, y, z)$  telle que :

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i \quad (07)$$

$N_i(x)$ ,  $N_i(x, y)$  et  $N_i(x, y, z)$  sont respectivement les fonctions d'interpolations dans l'élément 1D, 2D et 3D. D'après ces formules, on peut remarquer facilement que le nombre total de ces fonctions d'interpolation dans un élément est égal au nombre total  $n$  de nœuds que contient cet élément.

Lorsque la grandeur  $U$  est de type vectorielle (champ de vecteurs à l'intérieur de l'élément), telle que  $U$  est composé de trois composantes  $\langle u, v, w \rangle$ , l'interpolation de  $U$  dans l'élément se fera sur chaque composante telles que :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot u_i \\ v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot v_i \\ w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot w_i \end{cases} \quad (08)$$

Si la grandeur  $U$  est un champ de vecteurs à deux composantes  $\langle u, v \rangle$ , son interpolation dans l'élément se fera sur chaque composante comme suit :

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot u_i \\ v(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \cdot v_i \end{cases} \quad (09)$$

Enfin, si la grandeur  $U$  est un champ scalaire, son interpolation dans l'élément se fera uniquement sur ses valeurs en utilisant la formule (05) ci-dessus.

Pour les cas 2D et 3D, il y a lieu de signaler que les expressions des fonctions d'interpolation  $N_i$   $i = 1, n$  sont particulièrement difficiles à déterminer de manière directe (en interpolation directe). Par contre, comme nous le verrons plus loin dans la seconde méthode, celles-ci sont faciles à utiliser dans l'élément de référence. Pour sa part, cette méthode d'interpolation directe est moins difficile à utiliser dans le cas 1D auquel cas nous nous limiterons dans le présent paragraphe. En effet, dans ce cas unidimensionnel (1D), deux schémas d'interpolation directe seront étudiés : le premier linéaire (de degré 1) relatif à

l'élément barre de type SEG2 (segment à 2 nœuds à ses extrémités) et le second de degré plus élevé en utilisant les polynômes de Lagrange.

#### 4.1 Schéma d'interpolation directe linéaire- cas de l'élément barre

Soit un élément barre de longueur  $l$  (de type segment de droite à 2 nœuds SEG2) constitué de deux nœuds  $i$  et  $j$  à ses extrémités d'abscisses respectives  $x_i$  et  $x_j$  avec  $l = x_j - x_i$ . (figure 03). Après chargement, la réponse de cette barre consiste en un champ scalaire de déplacements en tous ses points. Ce champ est noté  $U$  dont les valeurs aux nœuds  $i$  et  $j$  sont respectivement  $U_i$  et  $U_j$ . Soit un point M situé à l'intérieur de cet élément et tel que son abscisse  $x$  vérifie la condition suivante :  $x_i \leq x \leq x_j$  (figure 03).

- 1- Dans un premier temps, il est demandé de trouver l'expression du champ de déplacement  $U(x)$  correspondant au déplacement d'un point M d'abscisse  $x$  en interpolant directement entre les valeurs :  $U(x_i) = U_i$  et  $U(x_j) = U_j$ .
- 2- Par la suite il est demandé de trouver les expressions des fonctions d'interpolation  $N_1(x)$  et  $N_2(x)$  afin que l'on puisse retrouver et appliquer la formule (05) :

$$U(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cdot U_i$$

en prenant cette fois  $U_1 = U_i$  et  $U_2 = U_j$ .

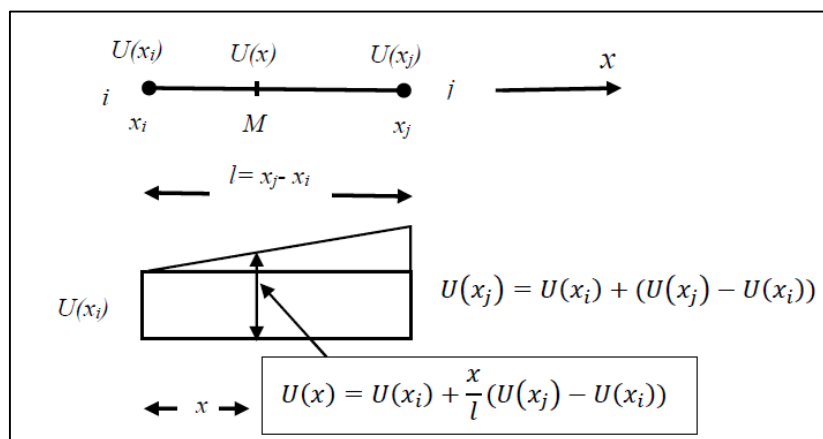


Figure 03 : interpolation linéaire directe dans un élément barre à 2 nœuds de type SEG2

Il est facile de constater en observant la figure 03 ci-dessus, que l'interpolation linéaire directe donne pour valeur du déplacement du point M d'abscisse  $x$ , l'expression suivante :

$$U(x) = U(x_i) + \frac{x}{l} (U(x_j) - U(x_i))$$

En second lieu, si on adopte la numérotation des nœuds  $i$  et  $j$  telle que  $U_1 = U_i$  et  $U_2 = U_j$  alors  $U(x)$  s'écrira :

$$U(x) = U_1 + \frac{x}{l} (U_2 - U_1) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) U_1 + \frac{x}{l} U_2$$

et en appliquant la formule (05) d'interpolation nodale, on aura :

$$U(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x) \cdot U_i = N_1(x) \cdot U_1 + N_2(x) \cdot U_2$$

En égalisant les deux expressions précédentes, et par identification, on peut déduire que :

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{x}{l}$$

Finalement, et de manière générale, l'interpolation nodale de degré 1 d'une fonction  $u(x)$  dans un élément linéaire à 2 nœuds de type SEG2, peut être écrite comme suit :

$$U(x) = \sum_{i=1}^2 N_i(x).U_i = N_1(x).U_1 + N_2(x).U_2 \text{ avec } N_1(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ et } N_2(x) = \frac{x}{l} \quad (10)$$

#### 4.1.1 Exemple 03 :

Soit une barre en acier de longueur  $l=1\text{m}$ , fixée à une extrémité 1 et soumise à une force  $F=100\text{ KN}$  à l'autre extrémité 2. Calculer d'abord le déplacement de l'extrémité 2 si l'aire de la section droite de la barre  $A=10\text{ cm}^2$  et le module de Young  $= 210000\text{ MPa}$ . Calculer ensuite en utilisant l'interpolation nodale directe le déplacement de cette barre en son milieu.

Solution :

Soit le modèle élément fini à 2 nœuds de type SEG2 tel que représenté sur la figure 04 ci-dessous.

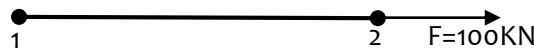


Figure 04 : modélisation par EF d'une barre avec un seul élément 1D de type SEG2

Dans le cas de cette barre, l'extrémité 1 est fixée donc  $U_1=0$ . Calculons d'abord le déplacement de l'extrémité 2 (ou bien du nœud 2)

Le matériau étant élastique, si on suppose que le champ de contraintes est constant le long de la barre, tel que :

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = E \cdot \varepsilon_x,$$

Cela implique que le champ de déformation l'est également tel que :

$$\varepsilon_x = \frac{U_2 - U_1}{l} = \frac{U_2 - 0}{l} = \frac{U_2}{l}$$

En remplaçant  $\varepsilon_x$  dans l'expression de  $\sigma_x$ , on aura :

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{U_2}{l} \Rightarrow U_2 = \frac{F \cdot l}{E \cdot A} = \frac{100 \cdot 100}{21000 \cdot 10} = 0.0476\text{ cm}$$

En appliquant la relation d'interpolation linéaire directe (05) de l'élément SEG2, on peut écrire que le déplacement d'un point situé à  $x=50\text{ cm}$ , peut être obtenu comme suit :

$$U(50) = \sum_{i=1}^2 N_i(50).U_i = N_1(50).U_1 + N_2(50).U_2 = \left(1 - \frac{50}{100}\right) \cdot 0 + \frac{50}{100} \cdot (0.0476) = 0.0238\text{ cm} \approx 0.24\text{ mm}$$

## 4.2 Cas de l'interpolation nodale de degré élevé ou polynômes de Lagrange :

Pour le cas unidimensionnel de fonctions à une seule variable  $x$ , on peut enrichir davantage les fonctions d'interpolations en augmentant le degré des polynômes d'interpolation tels que ceux de Lagrange qui sont sous la forme :

$$U(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x).U_i \text{ avec } N_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (11)$$



### Cas d'une interpolation quadratique de degré 2 :

Dans ce cas, et comme déjà vu auparavant, l'élément doit contenir trois nœuds 1, 2 et 3 d'abscisses respectives  $x_1, x_2$  et  $x_3$  et sur lesquels les valeurs  $U_1, U_2$  et  $U_3$  sont connues. Soit un point M d'abscisse  $x$  situé à l'intérieur de cet élément quadratique à trois nœuds qu'on appelle SEG3 telle que représenté sur la figure 05 ci-dessous :

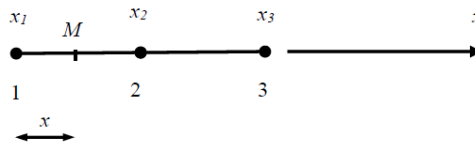


Figure 05 : exemple d'élément quadratique 1D de type SEG3 (à trois nœuds)

La quantité  $U(x)$  peut être obtenue par interpolation directe de degré 2 dans l'élément SEG3 comme suit :

$$U(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(x) \cdot U_i = N_1(x) \cdot U_1 + N_2(x) \cdot U_2 + N_3(x) \cdot U_3 \quad (12)$$

$$N_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)}$$

$$N_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} \quad (13)$$

$$N_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}$$

#### 4.2.1 Exemple 04 :

Soit une barre en acier de 1 m de longueur. Trois mesures de températures ont été effectuées aux deux extrémités ainsi qu'au milieu de cette barre telles que les températures des deux extrémités soient respectivement  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 13^\circ\text{C}$  tandis que celle du milieu corresponde à  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ . Trouver l'expression de  $T(x)$  le long de cette barre en utilisant une interpolation directe de degré 2.

#### Solution :

En première étape, nous modélisons notre barre par un maillage constitué d'un seul élément fini à trois nœuds de type SEG3 et sur lequel nous allons effectuer une interpolation directe de degré 2 (ou bien quadratique). Comme illustré sur la figure 06 ci-dessous, nos trois nœuds auront les coordonnées suivantes  $x_1 = 0$  m ;  $x_2 = 0.5$  m et  $x_3 = 1$  m. Sur ces nœuds, la grandeur physique  $T$  qui n'est rien d'autre que la température est une fonction à une seule variable  $x$  car elle ne dépend que de la position le long de la longueur de la barre. Elle sera donc notée  $T(x)$  telle que :

$$T(0) = 10^\circ\text{C}, \quad T(0.5) = 15^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad T(1) = 13^\circ\text{C}.$$

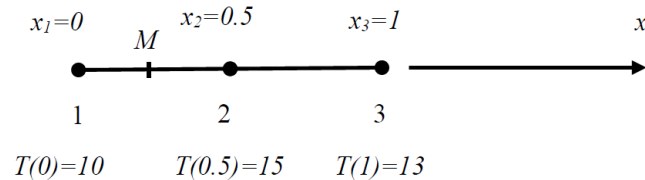


Figure 06 : Modélisation de la barre en acier avec un maillage composé d'un seul élément finis 1D à trois nœuds en utilisant une interpolation directe de degré 2 (quadratique)

Pour appliquer cette interpolation directe en degré 2, appliquons à la grandeur physique  $T$  (la température) les formules précédentes (12) et (13) d'interpolation d'une fonction à une seule variable  $T(x)$  sur un élément à 3 nœuds :

$$T(x) = \sum_{i=1}^3 N_i(x) \cdot T_i = N_1(x) \cdot T_1 + N_2(x) \cdot T_2 + N_3(x) \cdot T_3$$

Avec :

$$N_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^3 \frac{x - x_j}{x_1 - x_j} = \frac{(x - 0.5)(x - 1)}{(0 - 0.5)(0 - 1)} = \frac{x^2 - x - 0.5x + 0.5}{0.5} = 2x^2 - 3x + 1$$

$$N_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^3 \frac{x - x_j}{x_2 - x_j} = \frac{(x - 0)(x - 1)}{(0.5 - 0)(0.5 - 1)} = \frac{x^2 - x}{-1/4} = -4x^2 + 4x$$

$$N_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^3 \frac{x - x_j}{x_3 - x_j} = \frac{(x - 0)(x - 0.5)}{(1 - 0)(1 - 0.5)} = \frac{x^2 - 0.5x}{1/2} = 2x^2 - x$$

Finalement :

$$T(x) = N_1(x) \cdot T_1 + N_2(x) \cdot T_2 + N_3(x) \cdot T_3 \\ = (2x^2 - 3x + 1) \cdot T_1 + (-4x^2 + 4x) \cdot T_2 + (2x^2 - x) \cdot T_3$$

Après développement, on obtient :

$$T(x) = -14x^2 + 17x + 10$$

Vérification :

$$\text{Pour } x=0, \quad T(0) = -14 \cdot 0^2 + 17 \cdot 0 + 10 = 10^\circ\text{C}$$

$$\text{Pour } x=0.5 \quad T(0.5) = -14 \cdot (0.5)^2 + 17 \cdot (0.5) + 10 = 15^\circ\text{C}$$

$$\text{Pour } x=1 \quad T(1) = -14 \cdot (1)^2 + 17 \cdot (1) + 10 = 13^\circ\text{C}$$

Ainsi, nous remarquons que l'utilisation des polynômes de Lagrange permet facilement d'effectuer des interpolations de degrés plus élevés 3, 4, 5 etc. Toutefois, son extension aux cas 2D et 3D reste relativement difficile.

## 5. Interpolation nodale utilisant les éléments de référence

Cette seconde méthode d'interpolation indirecte utilisant les éléments dits « de référence » (désigné également dans certains ouvrages par *élément parent*), est plus facile à utiliser que la méthode précédente d'interpolation directe. Son principal avantage réside dans le fait qu'elle soit applicable quelle que soit la dimension du problème considéré (1D, 2D ou 3D).

Cela étant dit, avant de traiter en détails les quatre étapes nécessaires (que nous verrons plus loin) pour effectuer cette interpolation, essayons de voir la définition exacte (ou bien le principe) de cet élément de référence, ses conditions d'utilisation ainsi que les différents types d'éléments de référence qui existent dans la littérature et leurs fonctions de forme associées.

### 5.1 Principe des éléments de référence :

Le principe consiste à associer à chaque élément réel du maillage, un élément unique de forme constante et défini dans un espace de référence basé sur un système de coordonnées dites paramétriques notées  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Il est important de préciser que l'élément de référence associé doit être de même dimension et de même forme que l'élément réel. Il doit également avoir le même nombre de nœuds que celui de l'élément réel du maillage.

Par ailleurs, le passage entre l'élément réel et de référence est défini par la fonction  $x(\xi)$  en 1D, les deux fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  en 2D et les trois fonctions  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  et  $z(\xi, \eta, \zeta)$  en 3D.

A titre d'exemple, soit un élément triangulaire linéaire à trois nœuds TRI3 qui est défini dans l'espace réel à deux dimensions  $(x, y)$ . A cet élément réel du maillage, on associe un élément de référence triangulaire à trois nœuds et défini dans l'espace de référence  $(\xi, \eta)$  tel qu'illustré dans la figure 07 suivante :

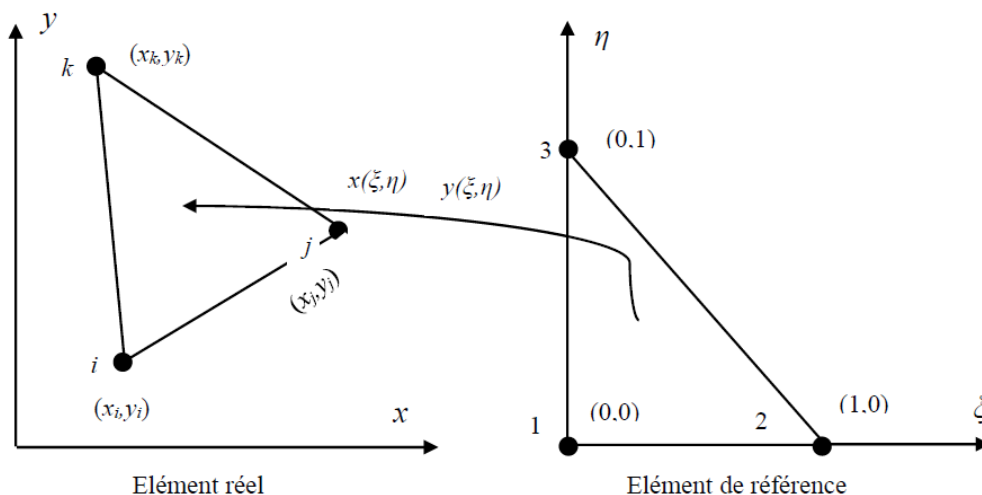


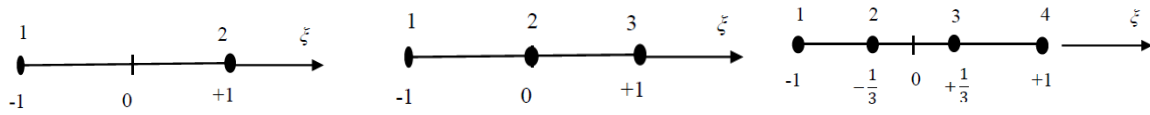
Figure 07 : Relations  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  entre éléments triangulaires l'un réel et l'autre de référence

Il y a lieu de signaler que la forme, la taille et la numérotation des nœuds d'un élément réel du maillage sont variables tandis que la forme, la taille et la numérotation et la position des nœuds d'un élément de référence sont fixes. En effet, les nœuds de l'élément de référence ont des coordonnées fixes dans l'espace paramétrique

### 5.2 Quelques types d'éléments de référence utilisés en EF

#### 5.2.1 Éléments de références à une dimension

Sur la figure 08 ci-dessous, on peut voir trois types d'éléments de référence à une dimension. Sur la figure (08-a) est représenté l'élément de référence linéaire à deux nœuds de type SEG2 (de degré 1). Sur la figure (08-b) on peut voir l'élément quadratique à trois nœuds de type SEG3 (de degré 2). L'élément SEG4 de référence est cubique à quatre nœuds est illustré en figure (08-c)

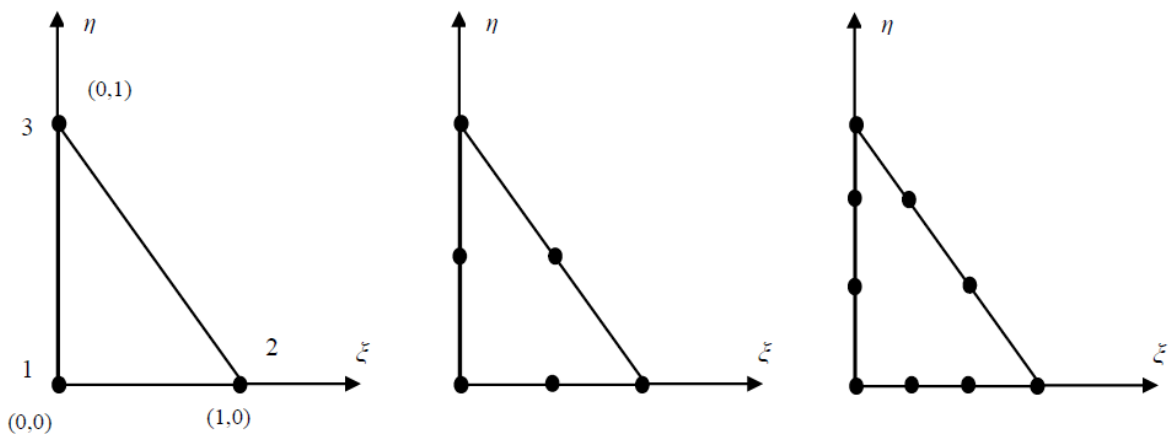


a) Linéaire SEG2                      b) quadratique SEG3                      c) cubique SEG4

Figure 08 : éléments de référence à une dimension.

### 5.2.2 Eléments de références à deux dimensions

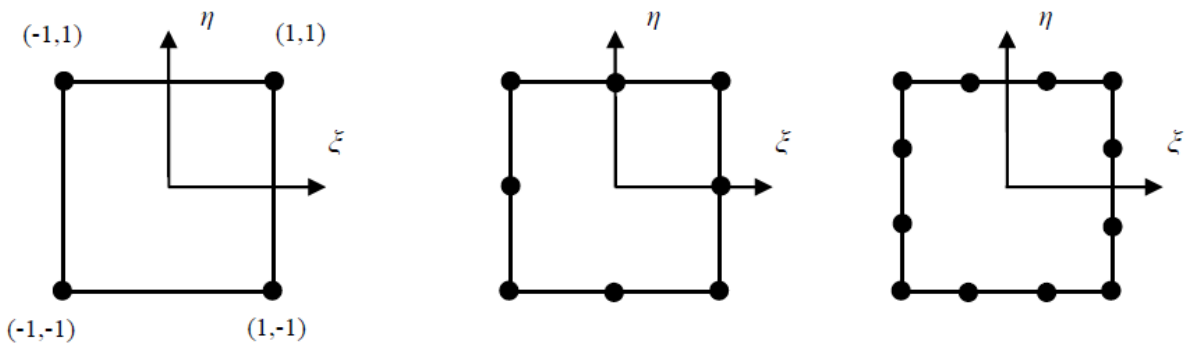
En 2D, les éléments finis que nous pouvons utiliser sont les éléments de forme triangulaire ainsi que les éléments de forme quadrangulaire. Pour les éléments triangulaires, les éléments utilisant les schémas d'interpolations linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à trois, six et neuf nœuds (figure 09).



a) linéaire (3 nœuds)                      b) quadratique (6 nœuds)                      c) cubique (9 nœuds)

Figure 09 : éléments de référence triangulaires de différents degrés d'interpolation nodale

Quant aux éléments quadrangulaires, les éléments de référence linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à quatre, huit et douze nœuds (figure 10).



a) linéaire (4 nœuds)                      b) quadratique (8 nœuds)                      c) cubique (12 nœuds)

Figure 10 : éléments de référence quadrangulaires à différents degrés d'interpolation nodale

### 5.2.3 Eléments de référence à trois dimensions

En 3D, les éléments de référence que nous pouvons utiliser sont les éléments de forme tétraédrique à quatre nœuds (linéaire), à dix nœuds (quadratique) et à seize nœuds (cubique) (voir figure 11 ci-dessous). Pour les éléments hexaédriques ou cubiques, les éléments de référence linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à huit, vingt et trente-deux nœuds (figure 12). Quant aux éléments

pentaédriques (ou prismatiques), les éléments de référence linéaires, quadratiques et cubiques sont respectivement à six, quinze et vingt-quatre nœuds (figure 13).

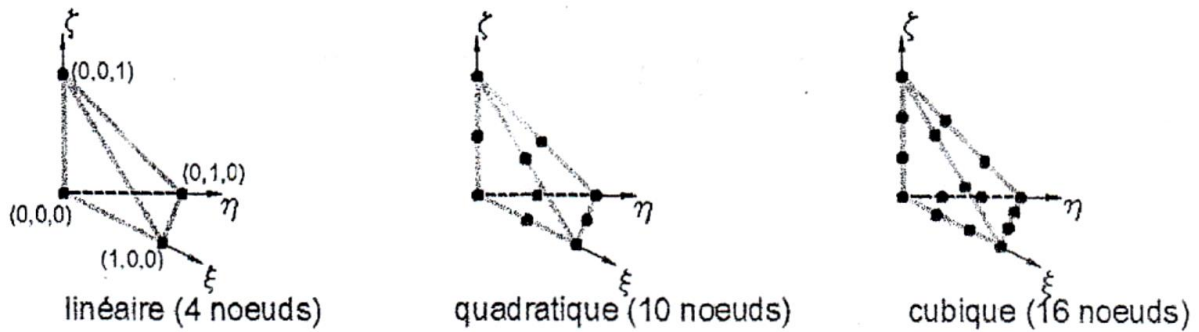


Figure 11 : éléments tétraédriques linéaires (TET4 à 4nœuds), quadratiques (TET10 à 10 nœuds), et cubique (TET16 à 16 nœuds)

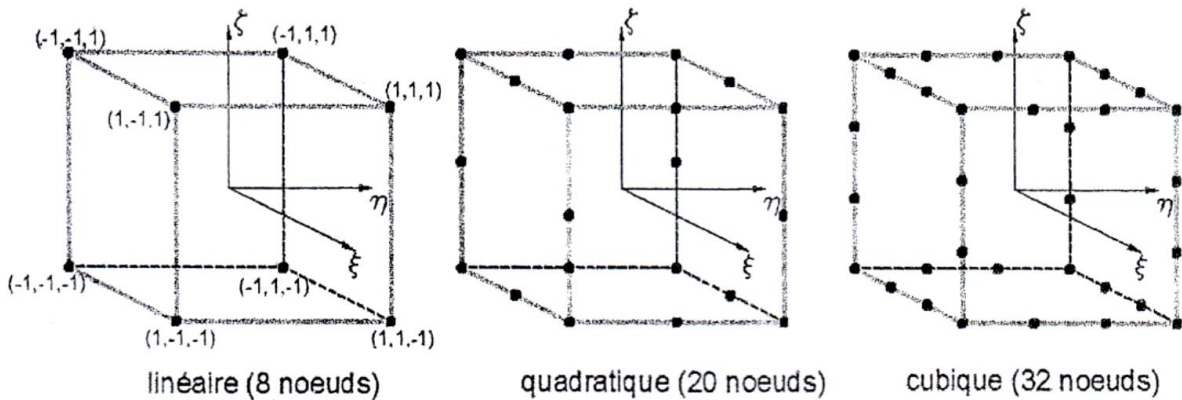


Figure 12 : éléments de référence cubiques ou hexaédriques à différents degrés d'interpolation nodale

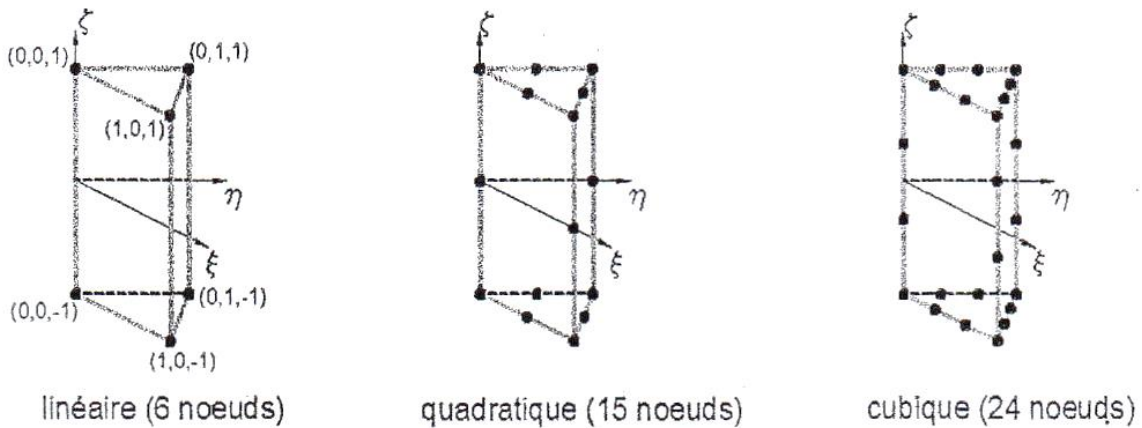


Figure 13 : éléments de référence prismatiques ou pentaédriques à différents degrés d'interpolation nodale

### 5.3 Fonctions de forme et relations entre éléments réels et de référence

Comme précisé précédemment, les relations entre éléments réels et de référence sont définies par la fonction  $x(\xi)$  en 1D, les deux fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  en 2D et les trois fonctions  $x(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $y(\xi, \eta, \zeta)$  et  $z(\xi, \eta, \zeta)$  en 3D. Les fonctions de forme, notées  $N_i(\xi)$  en 1D,  $N_i(\xi, \eta)$  en 2D et  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  en 3D, permettent d'établir facilement cette relation entre les deux espaces de coordonnées comme suit :

Pour le cas 1D :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi) \cdot x_i \quad (14)$$

Pour le cas 2D :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) \cdot x_i \\ y(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta) \cdot y_i \end{cases} \quad (15)$$

Pour le cas 3D :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta, \zeta) \quad \bar{N}_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad \bar{N}_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_i \end{cases} \quad (16)$$

Ces fonctions de forme tiennent également compte du degré d'interpolation dans l'élément : linéaire de degré 1, quadratique de degré 2, cubique de degré 3, etc. Elles sont directement données dans des tableaux. Ces tableaux sont associés à chaque type d'élément.

Par ailleurs, les coordonnées introduites dans les relations précédentes  $x_i$  en 1D ,  $x_i$  et  $y_i$  en 2D , ainsi que  $x_i, y_i$  et  $z_i$  en 3D sont les coordonnées de l'élément réel du maillage.

Cas de l'élément 1D linéaire SEG2 (figure 14)

Pour l'élément linéaire à deux nœuds de type SEG2, les fonctions  $\bar{N}_i(\xi)$  sont données dans le tableau suivant :

$i$	$\bar{N}_i(\xi)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi)}{\partial \xi}$
1	$\frac{1 - \xi}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2	$\frac{1 + \xi}{2}$	$+\frac{1}{2}$

Tableau 01 : fonctions de forme et dérivée de l'élément SEG2 à deux nœuds

La lecture du tableau 01 donne :  $\bar{N}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi)$  ;  $\bar{N}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi)$  ;  $\frac{\partial \bar{N}_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}$  et  $\frac{\partial \bar{N}_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2}$ .

Considérons un élément réel de type SEG2 appartenant à un maillage 1D. Les deux nœuds 1 et 2 de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ .

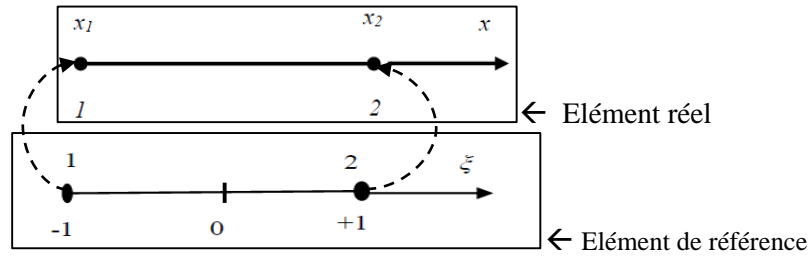


Figure 14 : relation entre élément réel 1D à 2 nœuds (SEG2) et l'élément de référence

La relation entre cet élément et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (14) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi)$  et  $\bar{N}_2(\xi)$  telle que :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi}{2}(x_1 - x_2) \quad (17)$$

L'analyse de l'équation (17) montre que  $x(\xi)$  est linéaire (de degré 1) en  $\xi$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions linéaires en  $\xi$ . D'autre part, la vérification de la relation (17) est comme suit : si on prend  $\xi = -1$ , on doit retrouver  $x(\xi) = x(-1) = x_1$ . Par contre, si on prend  $\xi = +1$ , on retrouve  $x(\xi) = x(+1) = x_2$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1 et 2 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 14).

#### Cas de l'élément 1D quadratique SEG3 (figure 15)

Pour l'élément quadratique de degré 2 à trois nœuds de type SEG3, les fonctions  $\bar{N}_i(\xi)$  sont données dans le tableau suivant :

$i$	$\bar{N}_i(\xi)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi)}{\partial \xi}$
1	$\frac{-\xi}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2} + \xi$
2	$1 - \xi^2$	$-2\xi$
3	$\frac{\xi}{2}(1 + \xi)$	$\frac{1}{2} + \xi$

Tableau 02 : fonctions de forme et dérivée de l'élément quadratique SEG3 à trois nœuds

La lecture du tableau 02 donne :

$$\bar{N}_1(\xi) = \frac{-\xi}{2}(1 - \xi); \quad \bar{N}_2(\xi) = (1 - \xi^2); \quad \bar{N}_3(\xi) = \frac{\xi}{2}(1 + \xi)$$

$$\frac{\partial \bar{N}_1(\xi)}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} + \xi, \quad \frac{\partial \bar{N}_2(\xi)}{\partial \xi} = -2\xi \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{N}_3(\xi)}{\partial \xi} = \frac{1}{2} + \xi$$

Considérons un élément réel de type SEG3 appartenant à un maillage 1D. Les deux nœuds 1, 2 et 3 de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  (figure 15)

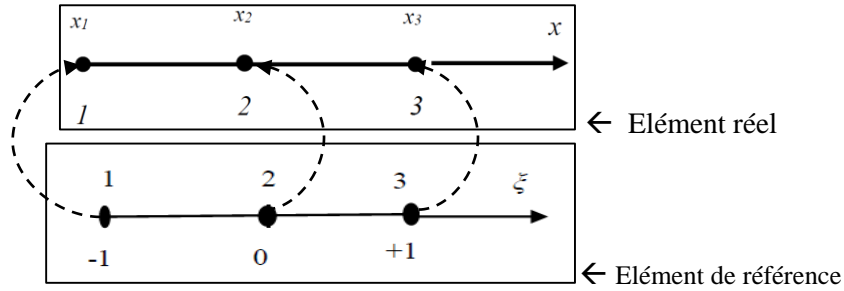


Figure 15 : relation entre élément quadratique réel 1D à 3 nœuds (SEG3) et l'élément de référence

La relation entre cet élément et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (14) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi)$  à  $\bar{N}_3(\xi)$  telle que :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + x_2 \quad (18)$$

L'analyse de l'équation (18) montre que  $x(\xi)$  est quadratique (de degré 2) en  $\xi$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions quadratiques en  $\xi$ . D'autre part, la vérification de la relation (18) est comme suit : si on prend  $\xi = -1$ , on doit retrouver  $x(\xi) = x(-1) = x_1$ . Si on prend  $\xi = 0$ , on doit retrouver  $x(\xi) = x(0) = x_2$ . Enfin, si on prend  $\xi = +1$ , on retrouve  $x(\xi) = x(+1) = x_3$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1, 2 et 3 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 15).

#### Cas de l'élément 2D triangulaire TRI3 de degré 01 (figure 16)

L'élément triangulaire à trois nœuds étant un élément bidimensionnel linéaire, ses fonctions de forme  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  sont données dans le tableau 03 suivant

$i$	$\bar{N}_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$
1	$1 - \xi - \eta$	-1	-1
2	$\xi$	1	0
3	$\eta$	0	1

Tableau 03 : fonctions de forme et dérivée de l'élément TRI3 à trois nœuds

La lecture du tableau 03 donne les expressions des trois fonctions de forme ainsi que de leurs dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \bar{N}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, & \bar{N}_2(\xi, \eta) &= \xi & \text{et} & & \bar{N}_3(\xi, \eta) &= \eta \\ \frac{\partial \bar{N}_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial \bar{N}_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1 \\ \frac{\partial \bar{N}_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial \bar{N}_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{N}_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial \bar{N}_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 1 \end{aligned}$$



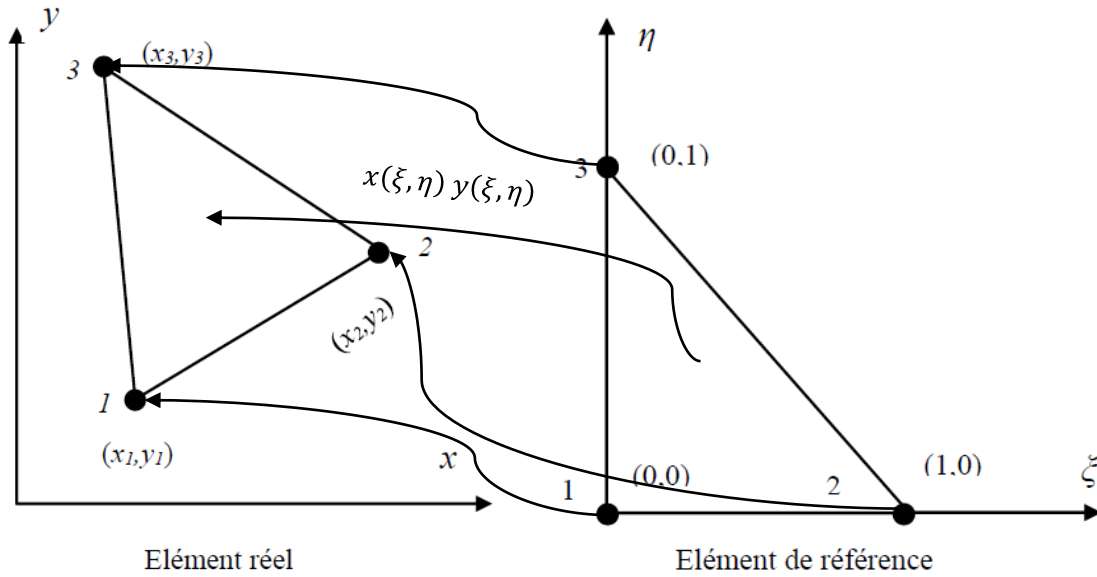


Figure 16 : relation entre élément triangulaire réel 2D à 3 nœuds (TRI3) et son élément de référence

La relation entre cet élément réel et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (15) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi, \eta)$ ,  $\bar{N}_2(\xi, \eta)$  et  $\bar{N}_3(\xi, \eta)$  telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) & \bar{N}_2(\xi, \eta) & \bar{N}_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle \bar{N}_1(\xi, \eta) & \bar{N}_2(\xi, \eta) & \bar{N}_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (19)$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + x_1 \\ y(\xi, \eta) = (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + y_1 \end{cases} \quad (20)$$

L'analyse des équations (20) montre que les fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont toutes les deux linéaires (de degré 1) en  $\xi$  et en  $\eta$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions linéaires en  $\xi$  et en  $\eta$ . D'autre part, la vérification des relations (20) est comme suit : si on prend

$\xi = \eta = 0$ , on retrouve  $x(0,0) = x_1$  et  $y(0,0) = y_1$ . Si on prend  $\xi = 1$  et  $\eta = 0$ , on retrouve  $x(1,0) = x_2$  et  $y(1,0) = y_2$ . Enfin, si on prend on prend  $\xi = 0$  et  $\eta = 1$ , on retrouve  $x(0,1) = x_3$  et  $y(0,1) = y_3$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1, 2 et 3 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 16).

#### Cas de l'élément 2D quadrangulaire OUA4 de degré 01 (figure 17)

L'élément quadrangulaire à quatre nœuds étant un élément bidimensionnel linéaire, ses fonctions de forme  $\bar{N}_i(\xi, \eta)$  sont données dans le tableau 04 suivant.

$i$	$\bar{N}_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial \bar{N}_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \xi)$
2	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \xi)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$
4	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$

Tableau 04 : fonctions de forme et leurs dérivées de l'élément QUA4 à quatre nœuds

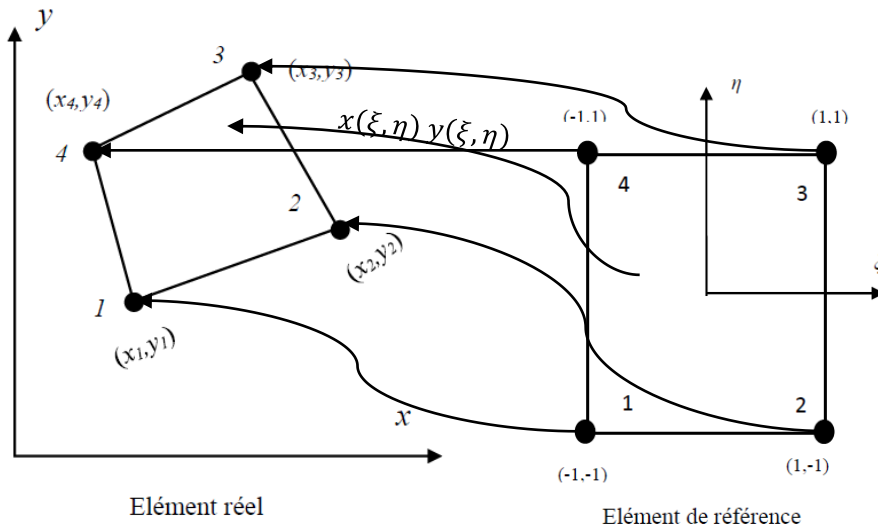


Figure 17 : relation entre élément quadrangulaire réel 2D à 4 nœuds (QUA4) et l'élément de référence

La relation entre cet élément réel et l'élément de référence peut être obtenue en appliquant l'équation (15) dans laquelle sont utilisées les fonctions de forme précédentes  $\bar{N}_1(\xi, \eta)$ ,  $\bar{N}_2(\xi, \eta)$ ,  $\bar{N}_3(\xi, \eta)$  et  $\bar{N}_4(\xi, \eta)$  telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (\bar{N}_1(\xi, \eta) \bar{x}_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) \bar{x}_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta) \bar{x}_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta) \bar{x}_4) \\ y(\xi, \eta) = (\bar{N}_1(\xi, \eta) \bar{y}_1 + \bar{N}_2(\xi, \eta) \bar{y}_2 + \bar{N}_3(\xi, \eta) \bar{y}_3 + \bar{N}_4(\xi, \eta) \bar{y}_4) \end{cases} \quad (21)$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)\xi + (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\eta + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\xi\eta] \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4}[(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)\xi + (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)\eta + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\xi\eta] \end{cases} \quad (22)$$

L'analyse des équations (22) montre que les fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont toutes les deux bilinéaires en  $\xi$  et en  $\eta$  dont le polynôme est de la forme  $(a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_4\xi\eta)$ . Ceci provient du fait que les fonctions de forme sont également des fonctions bilinéaires en  $\xi$  et en  $\eta$  et dont le polynôme est de la même forme. D'autre part, la vérification des relations (22) est comme suit : si on prend pour le nœud 1 de l'élément de référence  $\xi = \eta = -1$ , on retrouve  $x(-1, -1) = x_1$  et  $y(-1, -1) = y_1$ . Si on prend pour le nœud 2  $\xi = 1$  et  $\eta = -1$ , on retrouve  $x(1, -1) = x_2$  et  $y(1, -1) = y_2$ . Si on prend pour le nœud 3  $\xi = 1$  et  $\eta = 1$ , on retrouve  $x(1, 1) = x_3$  et  $y(1, 1) = y_3$ . Enfin, si on prend

pour le nœud 4  $\xi = -1$  et  $\eta = 1$ , on retrouve  $x(-1,1) = x_4$  et  $y(-1,1) = y_4$ . On retrouve ainsi la correspondance ou bien la relation des nœuds 1, 2, 3 et 4 de l'élément réel avec ceux de l'élément de référence (figure 17).

**Nota :**

Pour les cas des éléments bidimensionnels de degrés 2 (TRI6 et QUA8) et des éléments tridimensionnels, des tableaux sont fournis en annexe et sur lesquels les fonctions de forme et d'interpolations ainsi que d'autres détails sont donnés.

**5.4 Interpolation nodale dans l'élément de référence**

Nous avons vu dans la première méthode d'interpolation directe, que l'interpolation nodale d'une grandeur  $U$  connue aux  $n$  nœuds de l'élément réel considéré se fait selon l'équation (07) que nous rappelons ici :

$$U(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \cdot U_i \tag{07}$$

$N_i(x, y, z)$  : sont les  $n$  fonctions d'interpolations écrites dans l'élément considéré

$U_i$  : sont les  $n$  valeurs connues de la grandeur physique  $U$  qui est représentée mathématiquement par la fonction  $U(x, y, z)$

De la même manière, la grandeur physique  $U$  dont les valeurs sont supposées connues aux  $n$  nœuds de l'élément de référence, peut être représentée mathématiquement à l'intérieur de cet élément de référence par la fonction  $U(\xi, \eta, \zeta)$  écrite dans l'espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ . L'expression de cette fonction  $U(\xi, \eta, \zeta)$  peut être obtenue par interpolation nodale directe en utilisant les fonctions d'interpolations  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  de l'élément de référence telle que :

$$U(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) \quad N_2(\xi, \eta, \zeta) \quad \dots \quad N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot U_i \tag{18}$$

$U_i$  sont les  $n$  valeurs connues de la grandeur physique  $U$  aux  $n$  nœuds de cet élément de référence.

**5.5 Eléments isoparamétriques**

Pour une très grande quantité d'éléments finis, les fonctions vues précédemment d'interpolation directe dans l'élément de référence  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  sont égales aux fonctions de forme  $\bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$  de cet élément de référence. Ce résultat très important permet de définir une classe importante d'éléments largement utilisés par la MEF. Ces éléments sont dit « **isoparamétriques** » pour lesquels :

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta) \tag{19}$$

Pour la suite de ce cours, nous nous limiterons uniquement à cette classe d'éléments isoparamétriques pour lesquels les fonctions de forme seront notées désormais de la même façon que les fonctions d'interpolation. Plus précisément, les fonctions de forme seront notées désormais par  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  au lieu de  $\bar{N}_i(\xi, \eta, \zeta)$ . Ainsi, puisque les éléments traités précédemment (SEG2, SEG3, TRI3 et QUA4) sont isoparamétriques, cette notation sera également appliquée au niveau des tableaux précédents 01, 02, 03 et 04 ainsi que par les tableaux donnés en annexe.

## 5.6 Démarche à suivre

La démarche à suivre pour effectuer cette interpolation nodale utilisant l'élément de référence est comme suit. En effet, soit un corps solide modélisé par un maillage d'éléments finis. Soit un élément quelconque  $E$  appartenant à ce maillage. Soit  $n$  le nombre total de nœuds que contient cet élément  $E$ . Soit un point  $M$  quelconque situé à l'intérieur de cet élément ou sur sa frontière. Soit une grandeur physique  $U$  dont les valeurs sont connues aux  $n$  nœuds de cet élément. Ces valeurs sont notées :  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$ . La valeur approchée de  $U$  au point  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  (ou bien l'expression de  $U(x, y)$ ) peut être obtenue cette fois par interpolation indirecte en suivant les quatre étapes suivantes :

**Etape 01 interpolation dans l'élément de référence :** Il s'agit d'interpoler la grandeur considérée  $U$  dans l'élément de référence au lieu d'interpoler directement dans l'élément  $E$  considéré du maillage et que nous appellerons désormais : *élément réel*. Cette étape nous permettra d'obtenir selon le cas (1D, 2D ou 3D) les expressions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi).U_i \text{ en } 1D \\ U(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta).U_i \text{ en } 2D \\ U(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).U_i \text{ en } 3D \end{array} \right. \quad (20)$$

Les fonctions  $N_i(\xi)$ ,  $N_i(\xi, \eta)$  et  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  peuvent être extraites directement à partir des tables des éléments. Les quantités  $U_i$  sont des valeurs connues de la grandeur physique  $U$  au niveau de l'élément de référence.

**Etape 02 Ecriture des relations entre l'élément réel et l'élément de référence :** Il s'agit d'écrire les relations entre l'élément réel  $E$  considéré du maillage et défini dans l'espace réel de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  et l'élément de référence défini dans l'espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Selon le cas (1D, 2D ou 3D), on peut écrire ces relations comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi).x_i \text{ en } 1D \\ x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta).x_i \text{ et } y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta).y_i \text{ en } 2D \\ x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).x_i ; y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).y_i \text{ et } z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta).z_i \text{ en } 3D \end{array} \right. \quad (21)$$

**Etape 3 Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes.** Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi(x) \text{ en } 1D \\ \xi(x, y) \text{ et } \eta(x, y) \text{ en } 2D \\ \xi(x, y, z) ; \eta(x, y, z) \text{ et } \zeta(x, y, z), \text{ en } 3D \end{array} \right. \quad (22)$$

**Etape 4 : Substitution des relations précédentes (22) de l'étape 03 dans les relations (20) de l'étape 01.**

Cette étape consiste à remplacer les relations précédentes (22) obtenues au niveau de l'étape 03 dans les relations (20) obtenues dans l'étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir les relations recherchées :

$$\begin{cases} U(x) = U(\xi(x)) \text{ en } 1D \\ U(x, y) = U(\xi(x, y); \eta(x, y)) \text{ en } 2D \\ U(x, y, z) = U(\xi(x, y, z); \eta(x, y, z); \zeta(x, y, z)) \text{ en } 3D \end{cases} \quad (23)$$

**5.7 Exemples**

*5.7.1 Exemple 05 : interpolation en 1D dans l'élément SEG2 en utilisant l'élément de référence*

Reprendre l'exemple 01 traité dans le paragraphe 3-4-a d'une barre en acier de 1 m de longueur modélisé en EF par un seul élément linéaire unidimensionnel de type SEG2. Le nœud 1 étant fixé donc  $U_1$  est égal à zéro  $U_1=0$ . Par contre, les calculs de la RDM ont donné pour déplacement du nœud 2 la quantité  $U_2=0.0476$  cm. Il est demandé en utilisant l'élément de référence et en suivant les étapes 01 à 04 précédentes de trouver l'expression  $U(x)$  dans cette barre.

Solution :

Donc à cet élément réel représenté en figure 18 ci-dessous, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds des éléments de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur du déplacement  $U_1=0$ . De la même façon, le nœud 2 de l'élément de référence étant relié au nœud 2 de l'élément réel et il portera donc la même valeur du déplacement  $U_2=0.048$  cm.

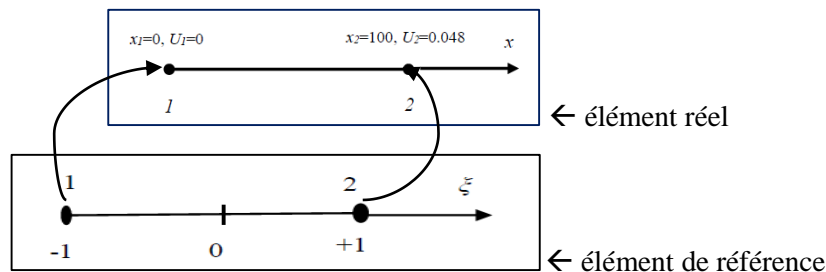


Figure 18 : Représentation de l'élément réel SEG2 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas 1D telle que :

$$U(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \cdot U_i = N_1(\xi) \cdot U_1 + N_2(\xi) \cdot U_2 = N_2(\xi) \cdot U_2 = \frac{1+\xi}{2} \cdot (0.048) = (0.024 + 0.024\xi)$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément réel et l'élément de référence en appliquant (21) pour le cas 1D telle que :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^2 N_i(\xi) \cdot x_i = N_1(\xi) \cdot x_1 + N_2(\xi) \cdot x_2 = N_2(\xi) \cdot x_2 = \frac{1+\xi}{2} \cdot (100) = 50 \cdot (1 + \xi)$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) de la relation précédente. Ceci permet d'obtenir la fonction suivante :

$$\xi(x) = \frac{x}{50} - 1$$

Etape 04 : Substitution de la fonction précédente dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$U(x) = U(\xi(x)) = (0.024 + 0.024\xi(x)) = 0.024 + 0.024\left(\frac{x}{50} - 1\right) = 0.024 \cdot \frac{x}{50} = 4.8 \cdot 10^{-4} \cdot x$$

Finalement :

$$U(x) = 4.8 \cdot 10^{-4} \cdot x$$

Vérification :

Pour  $x=x_1=0$  (nœud 1), on a :  $U(0) = U_1 = 0$

Et pour  $x=x_2=100$  (nœud 2), on a :

$$U(100) = U_2 = 4.8 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 4.8 \cdot 10^{-2} = 0.048 \text{ cm}$$

### 5.7.2 Exemple 06 : interpolation quadratique de degré 2 en 1D en utilisant l'élément de référence SEG3

Reprenre l'exemple 04 traité dans le paragraphe 4.2 d'une barre en acier de 1 m de longueur sur laquelle trois mesures de températures ont effectuées (deux aux extrémités ainsi que celle du milieu de cette barre) telle que les températures des deux extrémités soient respectivement  $T_1 = 10^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 13^\circ\text{C}$  tandis que celle du milieu corresponde à  $T_2 = 15^\circ\text{C}$ . Trouver l'expression de  $T(x)$  le long de cette barre en utilisant une interpolation avec élément de référence SEG3 de degré 2.

Solution :

Donc à cet élément réel représenté en figure 19 ci-dessous, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds des éléments de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=10^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2 et 3 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2 et 3 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=15^\circ\text{C}$  et  $T_3=13^\circ\text{C}$ .

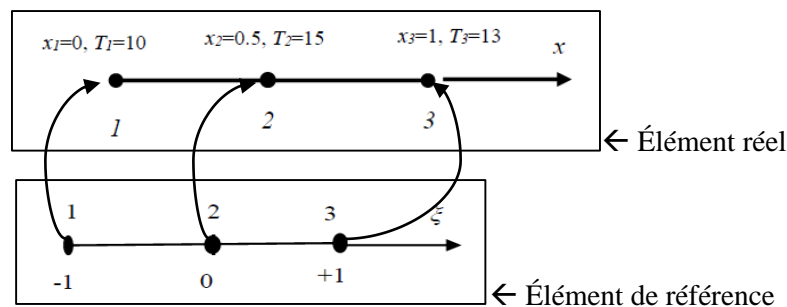


Figure 19 : Représentation de l'élément réel SEG3 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas 1D telle que :

$$T(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot T_i = N_1(\xi) \cdot T_1 + N_2(\xi) \cdot T_2 + N_3(\xi) \cdot T_3$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi) = \frac{1}{2}(T_1 - 2T_2 + T_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(T_3 - T_1)\xi + T_2$$

$$T(\xi) = \frac{1}{2}(10 - (2 \times 15) + 13)\xi^2 + \frac{1}{2}(13 - 10)\xi + 15$$

$$T(\xi) = -\frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\xi + 15$$

Verification:

$$T(-1) = -\frac{7}{2}(-1)^2 + \frac{3}{2}(-1) + 15 = -3.5 - 1.5 + 15 = 10 = T_1$$

$$T(0) = -\frac{7}{2}(0)^2 + \frac{3}{2}(0) + 15 = 15 = T_2$$

$$T(1) = -\frac{7}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(1) + 15 = -3.5 + 1.5 + 15 = 13^\circ\text{C} = T_3$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément réel et l'élément de référence en appliquant (21) pour le cas 1D telle que :

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \cdot x_i = N_1(\xi) \cdot x_1 + N_2(\xi) \cdot x_2 + N_3(\xi) \cdot x_3$$

Sous forme matricielle :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + x_2 = \frac{1}{2}(0 - (2 \times 0.5) + 1)\xi^2 + \frac{1}{2}(1 - 0)\xi + 0.5$$

$$x(\xi) = 0.5\xi + 0.5 = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad \text{donc} \quad x(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1)$$

Vérification

$$x(-1) = 0.5(-1 + 1) = 0 = x_1,$$

$$x(0) = 0.5(0 + 1) = 0.5 = x_2$$

$$\text{et } x(1) = 0.5(1 + 1) = 1 = x_3$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) de la relation précédente. Ceci permet d'obtenir la fonction suivante :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 1) \Rightarrow \xi(x) = 2x - 1$$

Etape 04 : Substitution de la fonction précédente  $\xi(x)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$\text{D'après l'étape 01, on a :} \quad T(\xi) = -\frac{7}{2}\xi^2 + \frac{3}{2}\xi + 15$$

$$\Rightarrow T(x) = T(\xi(x)) = -\frac{7}{2}\xi(x)^2 + \frac{3}{2}\xi(x) + 15 = -\frac{7}{2}(2x - 1)^2 + \frac{3}{2}(2x - 1) + 15$$

Finalement :

$$T(x) = -14x^2 + 17x + 10$$

Cette expression est identique à l'expression obtenue par interpolation directe en utilisant le polynôme de Lagrange dans l'exemple 04.

5.7.3 Exemple 07 : interpolation linéaire de degré 1 en 2D en utilisant l'élément triangulaire de référence TRI3

Soit une plaque supposée parfaitement plane, de forme rectangulaire, en acier, de 20 cm de longueur et de 10 cm de largeur (figure 20). Après avoir été chauffée dans un four, quatre mesures de température ont été effectuées simultanément au niveau des quatre coins de cette plaque. Ces mesures sont comme suit  $T_1=150^\circ\text{C}$ ,  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ . Pour trouver la valeur approchée de la température  $T$  en tout point M de coordonnées  $(x,y)$  par rapport au repère  $(1,x,y)$  (voir figure 20), cette plaque a été modélisée avec un maillage composé de deux éléments finis triangulaires de type TRI3. Il est demandé de trouver l'expression mathématique approchée  $T(x,y)$  du champ de température en tout point de cette

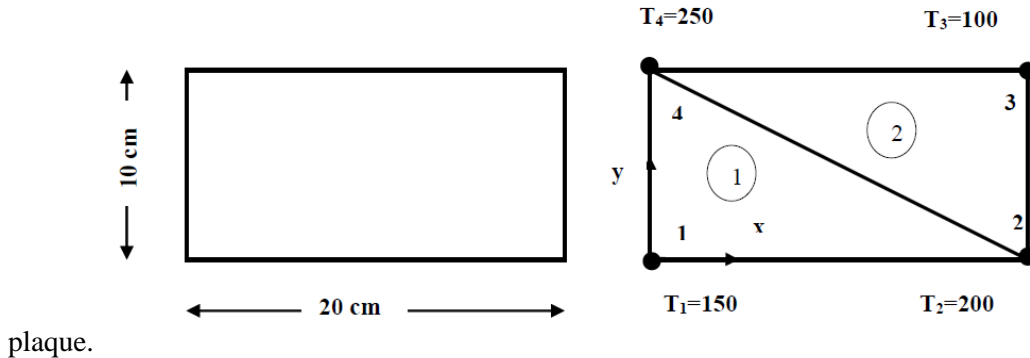


Figure 20 : Schéma de la plaque (à gauche) et son maillage EF avec deux éléments de type TRI3 (à droite).

Solution :

Puisque notre plaque a été maillée par deux éléments finis, elle sera donc divisée en deux domaines ou éléments 1 et 2 (voir le maillage ci-dessus de la figure 20) et la fonction  $T(x,y)$  sera définie comme suit :

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) & \text{surl'élément 1} \\ T_2(x,y) & \text{surl'élément 2} \end{cases}$$

Détermination de l'expression de  $T_1(x,y)$  sur l'élément 1

Soit donc l'élément 1 du maillage et son élément de référence tel que représenté en figure 21 ci-dessous. Cet élément 1 est constitué des nœuds 1, 2 et 4. On associe à l'élément 1 un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds de cet élément de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=150^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2 et 3 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2 et 4 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=200^\circ\text{C}$  et  $T_3=250^\circ\text{C}$ .

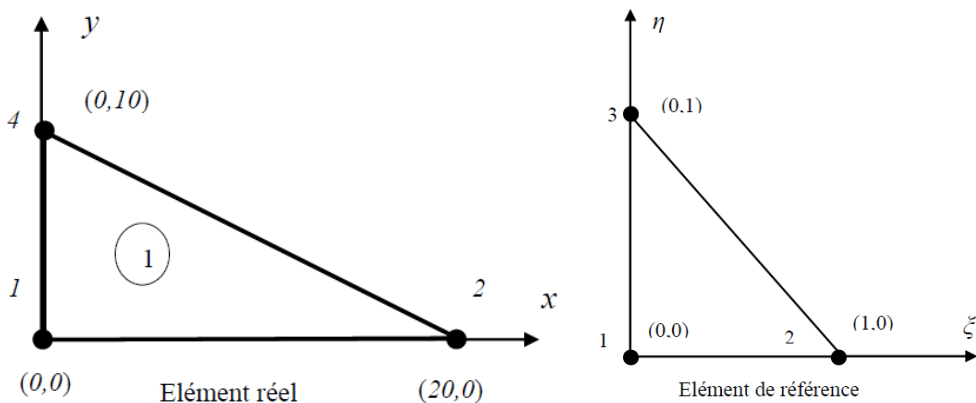


Figure 21 : Représentation de l'élément triangulaire 1 et de son élément de référence associé



Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas du TRI3 telle que :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i = N_1(\xi, \eta) \cdot T_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot T_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot T_3$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)T_1 + \xi T_2 + \eta T_3 = T_1 + (T_2 - T_1)\xi + (T_3 - T_1)\eta$$

$$T(\xi, \eta) = 150 + (200 - 150)\xi + (250 - 150)\eta = 150 + 50\xi + 100\eta$$

$$T(\xi, \eta) = 150 + 50\xi + 100\eta$$

Vérification :

$$T(0,0) = T_1 = 150 + 0 + 0 = 150 = T_1$$

$$T(1,0) = 150 + 50 \times 1 + 100 \times 0 = 150 + 50 = T_2$$

$$T(0,1) = 150 + 50 \times 0 + 100 \times 1 = 150 + 100 = T_3$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément 1 et l'élément de référence en appliquant (19) telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (x_2 - x_1)\xi + (x_4 - x_1)\eta + x_1 \\ y(\xi, \eta) = (y_2 - y_1)\xi + (y_4 - y_1)\eta + y_1 \end{cases}$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (20 - 0)\xi + (0 - 0)\eta + 0 = 20\xi \\ y(\xi, \eta) = (0 - 0)\xi + (10 - 0)\eta + 0 = 10\eta \end{cases}$$

Finalement, les relations entre l'élément 1 et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20\xi \\ y(\xi, \eta) = 10\eta \end{cases}$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes. Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20\xi \Rightarrow \xi(x, y) = \frac{x}{20} \\ y(\xi, \eta) = 10\eta \Rightarrow \eta(x, y) = \frac{y}{10} \end{cases}$$

Etape 04 : Substitution des fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$T(\xi(x, y), \eta(x, y)) = T_1(x, y) = 150 + 50\xi + 100\eta = 150 + 50 \frac{x}{20} + 100 \frac{y}{10}$$

$$T_1(x, y) = 150 + 2.5x + 10y$$

Vérification dans l'élément réel 1 :

Pour le nœud 1 :  $T_1(x_1, y_1) = 150 + 2.5 x_1 + 10y_1 = T_1(0,0) = 150 + 0 + 0 = 150 = T_1$

Pour le nœud 2 :  $T_1(x_2, y_2) = 150 + 2.5 x_2 + 10y_2 = T_1(20,0) = 150 + 2.5 \times 20 + 10 \times 0 = 200 = T_2$

Pour le nœud 4 :  $T_1(x_4, y_4) = 150 + 2.5 x_4 + 10y_4 = T_1(0,10) = 150 + 2.5 \times 0 + 10 \times 10 = 250 = T_4$

Donc l'expression  $T_1(x, y) = 150 + 2.5x + 10y$  est bien vérifiée au niveau de l'élément 01.

Détermination de l'expression de  $T_2(x, y)$  sur l'élément 2

L'élément 2 du maillage est associé à son élément de référence tel que représenté en figure 22 ci-dessous. Cet élément 2 est constitué des nœuds 2, 3 et 4. Ces nœuds doivent correspondre aux nœuds 1, 2 et 3 de l'élément de référence de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 2 de cet élément 2 doit être relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier (le nœud 1 de l'élément de référence) portera la même valeur de la température et sera notée  $T_1=200^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2 et 3 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 3 et 4 de l'élément 2 et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=100^\circ\text{C}$  et  $T_3=250^\circ\text{C}$ .

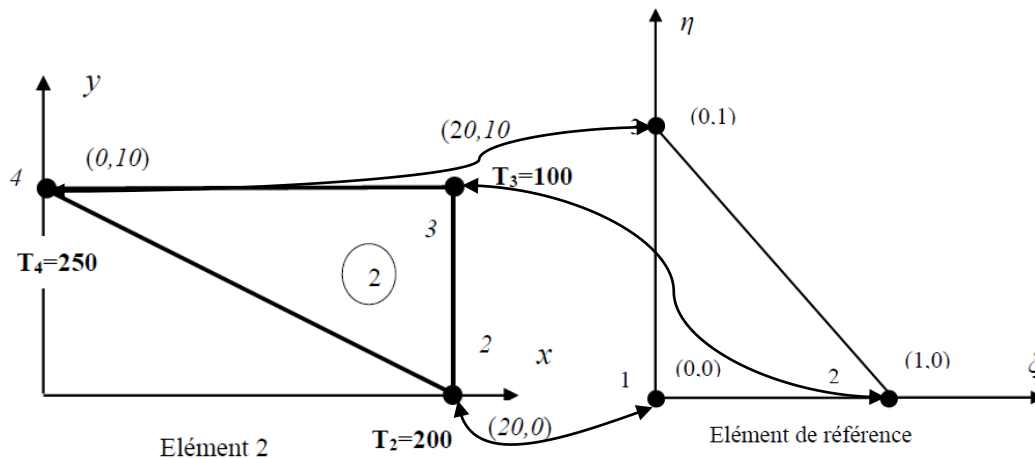


Figure 22 : Représentation de l'élément triangulaire 1 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas du TRI3 telle que :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i = N_1(\xi, \eta) \cdot T_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot T_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot T_3$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)T_1 + \xi T_2 + \eta T_3 = T_1 + (T_2 - T_1)\xi + (T_3 - T_1)\eta$$

Puisque dans l'élément de référence, on a :  $T_1 = 200^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 100^\circ\text{C}$  et  $T_3 = 250^\circ\text{C}$  (voir les correspondances en figure 22), on peut donc écrire :

$$T(\xi, \eta) = 200 + (100 - 200)\xi + (250 - 200)\eta = 200 - 100\xi + 50\eta$$

$$T(\xi, \eta) = 200 - 100\xi + 50\eta$$

Vérification :

$$T(0,0) = T_1 = 200 - 0 + 0 = 200 = T_1$$

$$T(1,0) = 200 - 100 \times 1 + 50 \times 0 = 200 - 100 = 100 = T_2$$

$$T(0,1) = 200 - 100 \times 0 + 50 \times 1 = 200 + 50 = 250 = T_3$$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément 2 et l'élément de référence en appliquant (19) telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (x_3 - x_2)\xi + (x_4 - x_2)\eta + x_2 \\ y(\xi, \eta) = (y_3 - y_2)\xi + (y_4 - y_2)\eta + y_2 \end{cases}$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = (20 - 20)\xi + (0 - 20)\eta + 20 = 0\xi - 20\eta + 20 = 20(1 - \eta) \\ y(\xi, \eta) = (10 - 0)\xi + (10 - 0)\eta + 0 = 10\xi + 10\eta = 10(\xi + \eta) \end{cases}$$

Finalement, les relations entre l'élément 2 et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20(1 - \eta) \\ y(\xi, \eta) = 10(\xi + \eta) \end{cases}$$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes. Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20(1 - \eta) \Rightarrow \eta(x, y) = 1 - \frac{x}{20} \\ y(\xi, \eta) = 10(\xi + \eta) = 10(\xi + \eta) \Rightarrow \xi(x, y) = \frac{y}{10} - \eta = \frac{y}{10} - \left(1 - \frac{x}{20}\right) = \frac{x}{20} + \frac{y}{10} - 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \eta(x, y) = 1 - \frac{x}{20} \\ \xi(x, y) = \frac{x}{20} + \frac{y}{10} - 1 \end{cases}$$

Etape 04 : Substitution des fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$\begin{aligned} T(\xi(x, y), \eta(x, y)) &= T_2(x, y) = T(\xi, \eta) = 200 - 100\xi + 50\eta \\ &= 200 - 100\left(\frac{x}{20} + \frac{y}{10} - 1\right) + 50\left(1 - \frac{x}{20}\right) \end{aligned}$$

$$T_2(x, y) = 200 - 5x - 10y + 100 + 50 - 2.5x = 350 - 7.5x - 10y$$

Donc :  $T_2(x, y) = 350 - 7.5x - 10y$

Vérification dans l'élément réel 2 :

Pour le nœud 2 :  $T_2(x_2, y_2) = 350 - 7.5 \times 20 - 10 \times 0 = T_2(20,0) = 350 - 150 - 0 = 200 = T_2$

Pour le nœud 3 :  $T_2(x_3, y_3) = 350 - 7.5 \times 20 - 10 \times 10 = T_2(20,10) = 350 - 150 - 100 = 100 = T_3$

Pour le nœud 4 :  $T_2(x_4, y_4) = 350 - 7.5 \times 0 - 10 \times 10 = T_2(0,10) = 350 - 0 - 100 = 250 = T_4$

Donc l'expression  $T_2(x, y) = 350 - 7.5x - 10y$  est bien vérifiée au niveau de l'élément 02.

Finalement 
$$T(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) = (150 + 2.5x + 10y) & \text{sur l'élément 1} \\ T_2(x, y) = (350 - 7.5x - 10y) & \text{sur l'élément 2} \end{cases}$$

5.7.4 Exemple 08 : interpolation linéaire de degré 1 en 2D en utilisant l'élément quadrangulaire de type QUA4

Reprendre l'exemple précédent de la plaque rectangulaire en acier de 20 cm de longueur et de 10 cm de largeur (figure 23) avec les mêmes valeurs des températures aux nœuds  $T_1=150^\circ\text{C}$ ,  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ . Toutefois, cette plaque a été cette fois modélisée avec un maillage composé d'un seul élément fini quadrangulaire de type QUA4 (figure 23). Il est donc demandé, en utilisant l'élément de type QUA4, de trouver l'expression mathématique approchée  $T(x,y)$  du champ de température en tout point de cette plaque.

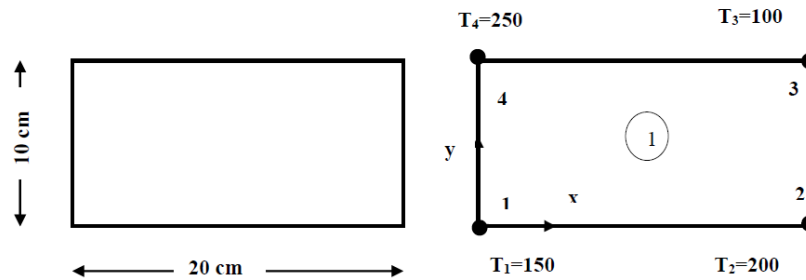


Figure 23 : Schéma de la plaque (à gauche) et son maillage EF avec un seul élément de type QUA4 (à droite).

Solution :

Soit donc l'élément 1 du maillage de type QUA4 et son élément de référence tel que représenté en figure 24 ci-dessous. Cet élément 1 est constitué des nœuds 1, 2, 3 et 4. A cet élément, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=150^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2, 3 et 4 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2, 3 et 4 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ .

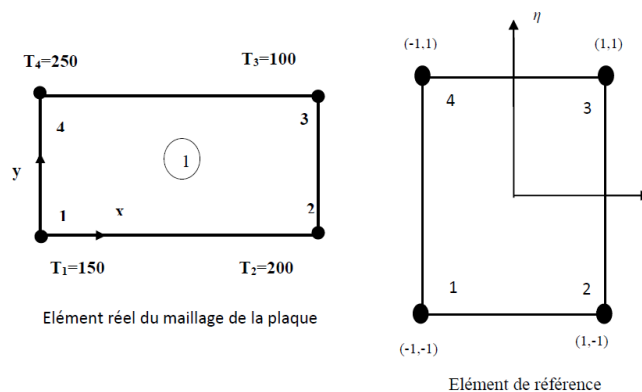


Figure 24 : Représentation de l'élément quadrangulaire 1 et de son élément de référence associé

Etape 01 : interpolation dans l'élément de référence en appliquant (20) pour le cas du QUA4 telle que :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \cdot T_i = N_1(\xi, \eta) \cdot T_1 + N_2(\xi, \eta) \cdot T_2 + N_3(\xi, \eta) \cdot T_3 + N_4(\xi, \eta) \cdot T_4$$

Sous forme matricielle

$$T(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{pmatrix}$$

Après développement, on obtient :

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(T_1 + T_2 + T_3 + T_4) + (-T_1 + T_2 + T_3 - T_4)\xi + (-T_1 - T_2 + T_3 + T_4)\eta + (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)\xi\eta]$$

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(150 + 200 + 100 + 250) + (-150 + 200 + 100 - 250)\xi + (-150 - 200 + 100 + 250)\eta + (150 - 200 + 100 - 250)\xi\eta]$$

$$T(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [700 - 100\xi - 200\xi\eta] = 175 - 25\xi - 50\xi\eta$$

Verification :

Pour le premier nœud  $(\xi, \eta) = (-1, -1)$  :  $T(-1, -1) = 175 - 25(-1) - 50(-1)(-1) = 150 = T_1$

Pour le second nœud  $(\xi, \eta) = (1, -1)$  :  $T(1, -1) = 175 - 25(1) - 50(1)(-1) = 200 = T_2$

Pour le troisième nœud  $(\xi, \eta) = (1, 1)$  :  $T(1, 1) = 175 - 25(1) - 50(1)(1) = 100 = T_3$

Pour le quatrième nœud  $(\xi, \eta) = (-1, 1)$  :  $T(-1, 1) = 175 - 25(-1) - 50(-1)(1) = 250 = T_4$

Etape 02 : Ecriture de la relation entre l'élément 1 et l'élément de référence en appliquant (21) telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)\xi + (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\eta + (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)\xi\eta] \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) + (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)\xi + (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)\eta + (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)\xi\eta] \end{cases}$$

En remplaçant les coordonnées par leurs valeurs, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(0 + 20 + 20 + 0) + (-0 + 20 + 20 - 0)\xi + (-0 - 20 + 20 + 0)\eta + (0 - 20 + 20 - 0)\xi\eta] \\ y(\xi, \eta) = \frac{1}{4} [(0 + 0 + 10 + 10) + (-0 + 0 + 10 - 10)\xi + (-0 - 0 + 10 + 10)\eta + (0 - 0 + 10 - 10)\xi\eta] \end{cases}$$

Après développement, les relations entre l'élément 1 et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10 + 10\xi = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

Vérification

Pour le Nœud 1  $\begin{cases} x(-1, -1) = 10 + 10(-1) = 0 = x_1 \\ y(-1, -1) = 5 + 5(-1) = 0 = y_1 \end{cases}$

Pour le Nœud 2  $\begin{cases} x(1, -1) = 10 + 10(1) = 20 = x_2 \\ y(1, -1) = 5 + 5(-1) = 0 = y_2 \end{cases}$

Pour le Nœud 3  $\begin{cases} x(1, 1) = 10 + 10(1) = 20 = x_3 \\ y(1, 1) = 5 + 5(1) = 10 = y_3 \end{cases}$

Pour le Nœud 4  $\begin{cases} x(-1, 1) = 10 + 10(-1) = 0 = x_4 \\ y(-1, 1) = 5 + 5(1) = 10 = y_4 \end{cases}$

Etape 03 : Ecriture inverse (ou inversion) des relations précédentes. Ceci permet d'obtenir les fonctions suivantes :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10(1 + \xi) \Rightarrow \xi(x, y) = \frac{x}{10} - 1 \\ y(\xi, \eta) = 5(1 + \eta) \Rightarrow \eta(x, y) = \frac{y}{5} - 1 \end{cases}$$

Etape 04 : Substitution des fonctions  $\xi(x, y)$  et  $\eta(x, y)$  dans la relation obtenue en étape 01. Ceci permettra finalement d'obtenir la fonction recherchée :

$$T(\xi(x, y), \eta(x, y)) = T(x, y) = 175 - 25\xi - 50\xi\eta = 175 - 25\left(\frac{x}{10} - 1\right) - 50\left(\frac{x}{10} - 1\right)\left(\frac{y}{5} - 1\right)$$

Et on obtient finalement

$$T(x, y) = 150 + 2.5x + 10y - xy$$

Vérification dans l'élément réel 1 :

Pour le nœud 1 :  $T(x_1, y_1) = 150 + 2.5 x_1 + 10y_1 - x_1y_1 = T(0,0) = 150 + 0 + 0 - 0 = 150 = T_1$

Pour le nœud 2 :  $T(x_2, y_2) = 150 + 2.5 x_2 + 10y_2 - x_2y_2 = T(20,0) = 150 + 2.5 \times 20 + 10 \times 0 - 0 = 200 = T_2$

Pour le nœud 3 :  $T(x_3, y_3) = 150 + 2.5 x_3 + 10y_3 - x_3y_3 = T(20,10) = 150 + 2.5 \times 20 + 10 \times 10 - 20 \times 10 = 100 = T_3$

Pour le nœud 4 :  $T(x_4, y_4) = 150 + 2.5 x_4 + 10y_4 - x_4y_4 = T(0,10) = 150 + 2.5 \times 0 + 10 \times 10 - 0 \times 10 = 250 = T_4$

Donc l'expression  $T(x, y) = 150 + 2.5x + 10y - xy$  est bien vérifiée pour l'élément 01.

Visualisation et comparaison des champs de température obtenus

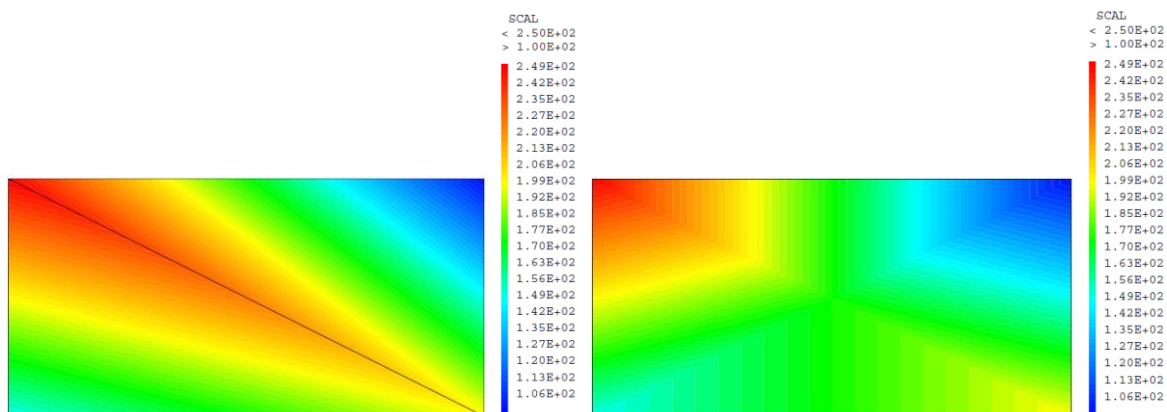


Figure 25 : Distribution des champs de température en utilisant un maillage composé de deux éléments triangulaires TRI3 (à gauche) et d'un élément quadrangulaire QUA4 (à droite)

En observant et en analysant la distribution de la température sur la figure 25 précédente, on constate que le second maillage composé d'un seul élément QUA4 donne une distribution plus proche de la réalité que le maillage à gauche utilisant deux éléments TRI3. L'interprétation de ce résultat sera traitée dans le paragraphe suivant.

## 6. Forme particulière de la matrice Jacobienne en éléments finis

Comme déjà vu au chapitre 03 précédent, la matrice Jacobienne  $[J]$  a été introduite de manière générale dans le cadre d'une transformation entre l'espace de coordonnées réelles  $(x, y, z)$  et paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$  telles pour les relations suivantes :

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta, \zeta) \\y &= y(\xi, \eta, \zeta) \\z &= z(\xi, \eta, \zeta)\end{aligned}$$

la matrice Jacobienne  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial y(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial z(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, nous rappelons également les relations entre l'élément réel et l'élément de référence qui ont été établies dans l'équation (16) telles que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) & \dots & N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) & \dots & N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) = \langle N_1(\xi, \eta, \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) & \dots & N_n(\xi, \eta, \zeta) \rangle \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta, \zeta) \cdot z_i \end{cases}$$

Puisque les coordonnées des nœuds des éléments sont constantes, on en déduit que les dérivées partielles des termes de la matrice Jacobienne  $[J]$  n'affectent que les dérivées des fonctions de formes telles que par exemple :

$$\frac{\partial x(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} = \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \quad \dots \quad \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \cdot x_i$$

En écrivant tous les termes de la matrice Jacobienne sous la même forme que celle de l'expression précédente et en les remplaçant dans la matrice, on obtient la forme suivante qui est une forme particulière propre à la matrice Jacobienne en éléments finis telle que:

$$[J] = \begin{bmatrix} \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial N_1(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_n(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta} \right\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \end{bmatrix}$$

### 6.1.1 Exemple 09 : Forme particulière de la matrice Jacobienne [J] de l'élément triangulaire TRI3

Soit un élément triangulaire linéaire défini en 2D dans le plan (x, y). Les coordonnées des nœuds de l'élément sont les suivantes : nœud 1 (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>), nœud 2 (x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>), nœud 3 (x<sub>3</sub>, y<sub>3</sub>). On associe cet élément réel à son élément de référence. Déterminer la matrice Jacobienne associée à cet élément ainsi que son déterminant et sa matrice inverse.

Solution :

Pour l'élément TRI3 défini en 2D, la matrice Jacobienne est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \text{ avec } x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) x_i \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) y_i$$

En Remplaçant  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  par leurs expressions dans [J], on aura :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} [\{x_i\}\{y_i\}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3 \right) & \left( \frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3 \right) \\ \left( \frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3 \right) & \left( \frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3 \right) \end{bmatrix}$$

Avec

$$N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad N_2(\xi, \eta) = \xi, \quad N_3(\xi, \eta) = \eta$$

Et

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= -1, & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= 1, & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= -1, & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= 0, & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= 1 \end{aligned}$$

On obtient finalement, l'expression très connue de la matrice Jacobienne qui ne dépend que des valeurs des coordonnées des nœuds de l'élément réel.

$$[J] = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{bmatrix}$$

Cette matrice est écrite également sous la forme :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \text{ avec } x_{ij} = x_i - x_j \text{ et } y_{ij} = y_i - y_j$$



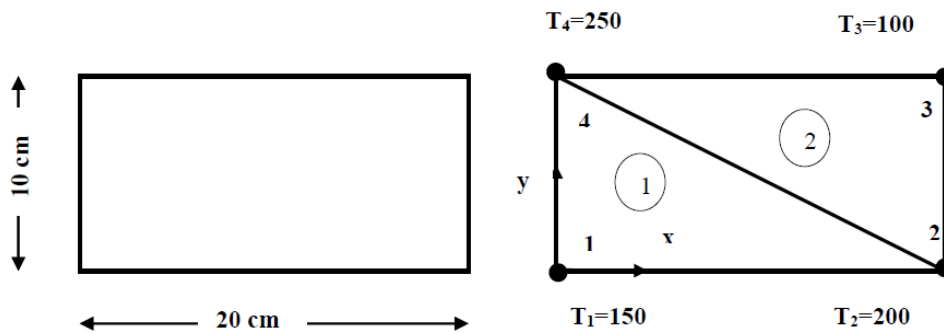
Calculons le déterminant de  $[J]$

$$\det[J] = x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21} = 2A \text{ où } A \text{ est l'aire du triangle}$$

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_3 \end{pmatrix}^T$$

### 6.1.2 Exemple 10 :

Reprendre l'exemple du maillage de l'exemple 07 dans lequel le maillage illustré en figure 20 et reproduit une seconde fois ci-dessous, est composé de deux éléments triangulaires pour lesquels il est demandé de calculer la matrice  $[J]$  et son déterminant en utilisant directement le résultat de l'exemple précédent.



### Solution :

Pour l'élément 02, la matrice  $[J]$  est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{32} & y_{32} \\ x_{42} & y_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) & (y_3 - y_2) \\ (x_4 - x_2) & (y_4 - y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 20) & (10 - 0) \\ (0 - 20) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = -(-20 \times 10) = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 02}$$

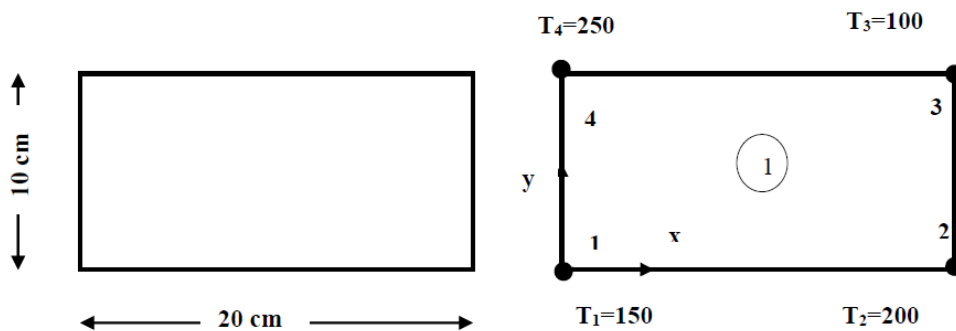
Pour l'élément 01, la matrice  $[J]$  est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{41} & y_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 0) & (0 - 0) \\ (0 - 0) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 01}$$

### 6.1.3 Exemple 11 :

Reprendre l'exemple du maillage de l'exemple 08 dans lequel le maillage illustré en figure 23 et reproduit une seconde fois ci-dessous, est composé d'un élément quadrangulaire et pour lequel il est demandé de calculer la matrice  $[J]$  et son déterminant.



**Solution :**

Pour l'élément Qua4 défini en 2D, la matrice Jacobienne est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Or les relations trouvées dans l'exemple 08, entre cet élément et son élément de référence sont comme suit :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10 + 10\xi = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

Donc

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 10 \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 5$$

Ainsi, la matrice  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Et le déterminant  $\det[J] = 50$

On voit bien que pour l'élément quadrangulaire QUA4, le calcul des termes de la matrice  $[J]$  se fait plus facilement si les expressions des relations  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont disponibles (déjà calculées auparavant).