

SERIE N°03 : Techniques d'interpolations nodales (suite)

Exercice 01 :

On considère une barre définie le long de l'axe x . Cette barre est maillée avec deux éléments. Le premier élément (associé aux nœuds 1,2 et 3) est un élément 1D quadratique. Le deuxième élément est un élément 1D linéaire (associé aux nœuds 3 et 4). On donne également à la figure suivante la position et la numérotation des nœuds de chaque élément.

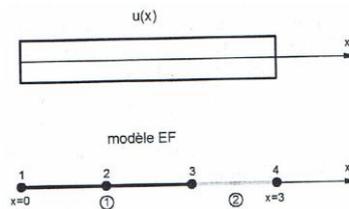


Figure 01 — Interpolation le long d'une barre.

Les coordonnées x des nœuds sont : nœud 1 ($x=0$), nœud 2 ($x=1$), nœud 3 ($x=2$) et nœud 4 ($x=3$).

On cherche à interpoler un champ de déplacements $u(x)$ le long de cette barre. On mesure les déplacements u aux nœuds suivants : $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 0$.

Déterminer l'interpolation $u(x)$ (pour chaque élément) en passant par l'élément de référence. Veuillez noter $u_{(1)}(x)$ l'interpolation sur le premier élément et $u_{(2)}(x)$ l'interpolation sur le deuxième élément.

En déduire l'expression de la déformation ε_x au milieu de la barre (pour $x=1.5$).

Donner ensuite l'expression de $\frac{du}{dx}$ en fonction de $\frac{du}{d\xi}$ (pour chaque élément) pour l'élément de référence associé à ces types d'éléments.

Exercice 02 :

Soit un élément triangulaire linéaire défini en 2D dans le plan (x, y) . Les coordonnées des nœuds de l'élément sont les suivantes : nœud 1 (x_1, y_1), nœud 2 (x_2, y_2), nœud 3 (x_3, y_3). On associe cet élément réel à son élément de référence.

Déterminer la matrice Jacobienne associée à cet élément ainsi que son déterminant et sa matrice inverse.

Exercice 03 :

Soit une zone rectangulaire (figure 01) définie dans le plan (x, y) à l'intérieur de laquelle on désire interpoler un champ de températures $T(x, y)$ à partir de la mesure de la température aux quatre coins de la zone. On assimile cette zone à un élément fini quadrilatéral à quatre nœuds.

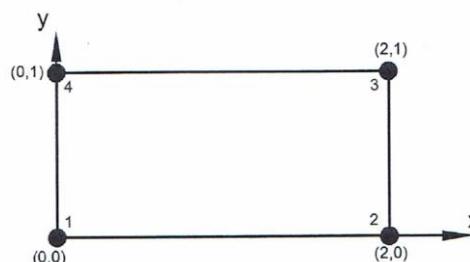


Figure 02 Définition de la zone rectangulaire.

Les coordonnées des nœuds de l'élément et les températures associées sont les suivantes : nœud 1 (0,0), nœud 2 (2,0), nœud 3 (2,1), nœud 4 (0,1) et $T_1 = 20$, $T_2 = 21$, $T_3 = 18$, $T_4 = 15$.

- 1- En passant par l'élément de référence, calculer l'expression de l'interpolation $T(x, y)$.
- 2- Calculer ensuite l'expression du gradient de température.
- 3- Calculer et dessiner la courbe isovaleur correspondant à $T = 20$ degrés.

Exercice 04 :

Reprendre l'exercice précédent avec les mêmes données numériques pour les coordonnées des nœuds et les valeurs de températures mais en considérant cette fois un maillage de la zone utilisant deux triangles linéaires (figure 03). On désire toujours interpoler un champ de températures $T(x, y)$ à partir de la mesure de la température aux quatre coins de la zone. L'élément (1) est constitué des nœuds 1, 2 et 4. L'élément (2) est constitué des nœuds 2, 3 et 4.

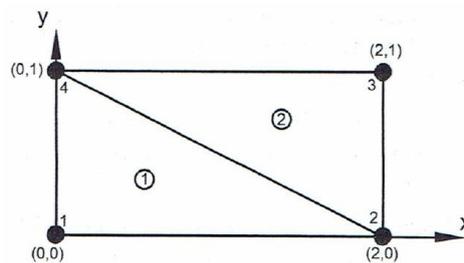


Figure 03 : Maillage de la zone rectangulaire avec deux éléments triangulaires linéaires.

- 1- En passant par l'élément de référence, calculer l'expression de l'interpolation $T(x, y)$ sous la forme de $T_{(1)}(x, y)$ et $T_{(2)}(x, y)$.
- 2- Calculer ensuite l'expression du gradient de température.
- 3- Calculer et dessiner la courbe isovaleur correspondant à $T = 20$ degrés.

Exercices supplémentaires (extraits de sujets d'examens)

Exercice 01 : (07.5 points)

On considère dans le plan, le cas d'une plaque rectangulaire de longueur 100 mm et de largeur 20 mm. Cette plaque est modélisée en 2D par un seul élément quadrangulaire de type QUA4 à quatre nœuds (voir figure 04 ci-dessous). Les nœuds 1 et 4 étant bloqués, ce qui implique que toutes les composantes de leurs déplacements selon les axes ox et oy sont nulles, c'est-à-dire : $u_1 = u_4 = 0$ et $v_1 = v_4 = 0$.

Par contre, les composantes des vecteurs déplacements des nœuds 2 et 3 ont pour valeurs :

- selon l'axe ox (composantes horizontales) : $u_2 = -2\text{mm}$ et $u_3 = +2\text{mm}$
- selon l'axe oy (composantes verticales) : $v_2 = -1\text{ mm.}$ et $v_3 = -1\text{ mm.}$

- 1) Trouver les expressions des composante horizontales $u(x,y)$ et verticales $v(x,y)$ des déplacements dans la plaque (04 points).
- 2) Dédire analytiquement l'ensemble des points (ou bien le lieu géométrique des points) sur lesquels $u(x,y) = 0$ (joindre un schéma à votre réponse) (02 points).
- 3) Dédire les expressions de $\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ et $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right)$ (1.5 points).

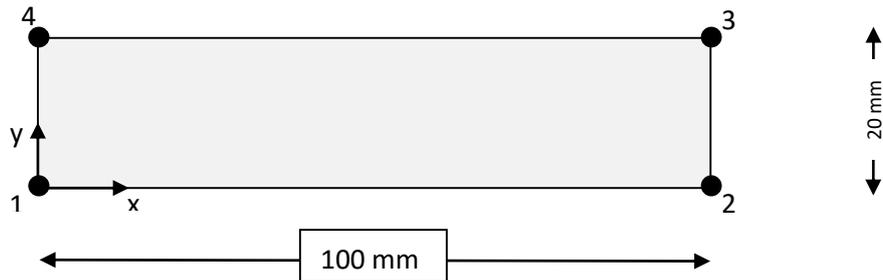


Figure 04 : plaque de 100 mm de longueur et de 20 mm de largeur modélisée par un seul élément QUA4

Exercice 02 : (08.50 points)

On considère dans le plan lié au repère 1xy, le cas d'une plaque rectangulaire de longueur 100 mm et de largeur 20 mm. Cette plaque est modélisée en 2D par deux éléments triangulaires de type TRI3 à trois nœuds (voir figure 05 ci-dessous). Les nœuds 1 et 4 étant bloqués, ce qui implique que toutes les composantes de leurs déplacements selon les axes ox et oy sont nulles, c'est-à-dire : $u_1 = u_4 = 0$ et $v_1 = v_4 = 0$.

Par contre, les composantes des vecteurs déplacements des nœuds 2 et 3 ont pour valeurs :

- selon l'axe ox (composantes horizontales) : $u_2 = +4$ mm et $u_3 = -2$ mm
- selon l'axe oy (composantes verticales) : $v_2 = +1$ mm et $v_3 = +1$ mm

4) Trouver les expressions des composante horizontales $u(x,y)$ et verticales $v(x,y)$ des déplacements dans la plaque (06 points).

5) Déduire les expressions de $\epsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$; $\epsilon_y = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ et $\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right)$ (1.5 pts).

6) Déduire analytiquement l'ensemble des points (ou bien le lieu géométrique des points) sur lesquels $u(x,y) = 0$ (joindre un schéma à votre réponse) (01 point).

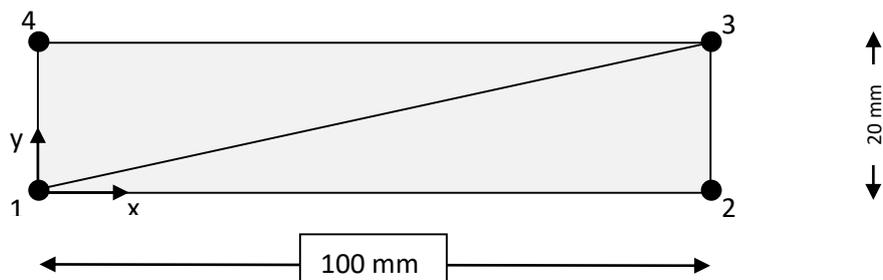


Figure 05 : plaque de 100 mm de longueur et de 20 mm de largeur modélisée par deux éléments triangulaires TRI3