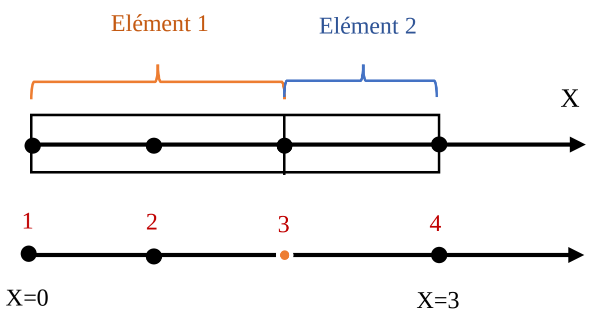
Université A. Mira Bejaia.
Faculté de Technologie.
Département de Génie mécanique.

Niveau : Première année Master.
Option :
Matière : Méthode des Eléments Finis.

CORRIGE SERIE N°03 : Techniques d'interpolations nodales (suite)

Solution de l'exercice 01 :

On a une barre maillée avec deux éléments. Le premier élément est un élément 1D quadratique, par contre le deuxième élément est un élément 1D linéaire.



1/ Détermination de l'interpolation (pour chaque élément) $u(x)$ en passant par l'élément de référence $U_{(1)}(x)$ et $U_{(2)}(x)$?

- Commençons par l'élément quadratique 1D à 3 nœuds $U_{(1)}(x)$

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi)\, x_i = N_1(\xi)\, x_1 + N_2(\xi)\, x_2 + N_3(\xi) x_3$$

$$x(\xi) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)0 + (1-\xi^2)1 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)2$$

$$x(\xi) = 1 - \xi^2 + \xi + \xi^2 = 1 + \xi$$

$$\Rightarrow x(\xi) = 1 + \xi \qquad \Rightarrow \qquad \xi = x - 1$$

$$\boxed{\xi = x - 1}$$

Et

$$u_{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi)\, u_i = N_1(\xi)\, u_1 + N_2(\xi) u_2 + N_3(\xi) u_3$$

$$u_{(1)}(x) = -\frac{\xi}{2}(1-\xi)0 + (1-\xi^2)2 + \frac{\xi}{2}(1+\xi)4$$

$$u_{(1)}(x) = 2 - 2\xi^2 + 2\xi + 2\xi^2 \quad \Rightarrow \quad u_{(1)}(x) = 2 + 2\xi = 2(1+\xi)$$

$$u_{(1)}(x) = 2(1+\xi) \qquad \text{or} \qquad \xi = x - 1$$

Donc

$$u_{(1)}(x) = 2(1+(x-1))$$

$$\boxed{u_{(1)}(x) = 2x}$$

- Pour le deuxième élément linéaire 1D à 2 nœuds $U_{(2)}(x)$

$$x_{(2)}(\xi) = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi)\, x_i = N_1(\xi)\, x_1 + N_2(\xi)\, x_2$$

Avec $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$

$$x_{(2)}(\xi) = \frac{(1-\xi)}{2}2 + \frac{(1+\xi)}{2}3 = 1 - \xi + \frac{3}{2} + \frac{3\xi}{2} = \frac{5}{2} + \frac{\xi}{2}$$

$$x_{(2)}(\xi) = \tfrac{1}{2}(5+\xi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = 2x - 5}$$

Et

$$u_{(2)}(\xi) = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi)\, u_i = N_1(\xi)\, u_3 + N_2(\xi) u_4$$

$$u_{(2)}(x) = \frac{1-\xi}{2}\, u_3 + \frac{1+\xi}{2} u_4$$

Or $u_3 = 4$ et $u_4 = 0$

Cela permet d'écrire :

$$u_{(2)}(\xi) = \frac{1-\xi}{2}(4) = 2(1-\xi)$$

Mais

$$\xi = 2x - 5$$

$$u_{(2)}(\xi(x)) = u_{(2)}(x) = 2\big(1-(2x-5)\big) = 2(6-2x)$$

$$\boxed{\Rightarrow u_{(2)}(x) = 12 - 4x}$$

Pour $x = 1.5$

$$\xi_x = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{d(2x)}{dx} = 2$$

2/ Donnons l'expression de $\frac{du}{dx}$ en fonction de $\frac{du}{d\xi}$ (pour chaque élément) pour l'élément de référence associé à ces types d'éléments.

Donc pour le premier élément :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)\frac{du}{d\xi} = \frac{d(x-1)}{dx}\,\frac{d(2+2\xi)}{d\xi}$$

$$\left(\frac{du}{dx} = \frac{d(2x)}{dx} = 2\right) = \frac{d(x-1)}{dx}\;\;2$$

$$\boxed{\frac{du}{dx} = 1\;\frac{du}{d\xi}}$$

Pour le deuxième élément :

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)\frac{du}{d\xi} = \frac{d(2x-5)}{dx}\,\frac{du}{d\xi}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2\;\frac{du}{d\xi}}$$

<u>Solution de l'exercice 02 :</u>

1/ Déterminons "la matrice Jacobienne" associée à cet élément :

- On a une forme particulière de la matrice Jacobienne en EF, cas du TRI 3 avec nœud 1 (x_1, y_1), nœud 2 (x_2, y_2) et nœud 3 (x_3, y_3).

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Avec

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta)\, x_i$$

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta)\, y_i$$

Remplaçons $x(\xi,\eta)$ et $y(\xi,\eta)$ dans J

On aura :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} [\{x_i\}\{y_i\}]$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} x_3\right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \xi} y_3\right) \\ \left(\frac{\partial N_1}{\partial \eta} x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} x_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} x_3\right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial \eta} y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta} y_2 + \frac{\partial N_3}{\partial \eta} y_3\right) \end{bmatrix}$$

Avec

$$N_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta , \qquad N_2(\xi,\eta) = \xi , \qquad N_3(\xi,\eta) = \eta$$

Et

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = -1, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 1, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial \eta} = -1, \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0, \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1$$

Donc

$$J = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 & -y_1 + y_2 \\ -x_1 + x_3 & -y_1 + y_3 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}$$

Calculons le déterminant de J

$$\det J = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$j = [J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}^T$$

$$\boxed{j = \frac{1}{\det J}\begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix}}$$

Solution de l'exercice 03 :

On a :

Nœud 1 $(0,0)$, nœud 2 $(2,0)$, nœud 3 $(2,1)$, nœud 4 $(0,1)$

Et

$T_1 = 20,$ $T_2 = 21,$ $T_3 = 18,$ $T_4 = 15$

Revenons à l'élément de référence

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, x_i$$

Et

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i(\xi,\eta)\, y_i$$

Avec les fonctions d'interpolation d'un élément quadrangle linéaire suivantes :

* $N_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,(1-\xi)(1-\eta)$
* $N_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,(1+\xi)(1-\eta)$
* $N_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,(1+\xi)(1+\eta)$
* $N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\,(1-\xi)(1+\eta)$

$$x(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)0 + N_2(\xi,\eta)2 + N_3(\xi,\eta)2 + N_4(\xi,\eta)0$$

$$x(\xi,\eta) = 2\big(N_2(\xi,\eta) + N_3(\xi,\eta)\big) = \frac{2}{4}(1+\xi)((1-\eta)+(1+\eta))$$

$$x(\xi,\eta) = (1+\xi) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = x - 1}$$

Et

$$y(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)0 + N_2(\xi,\eta)0 + N_3(\xi,\eta)1 + N_4(\xi,\eta)1$$

$$y(\xi,\eta) = N_3(\xi,\eta) + N_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\eta)((1+\xi)+(1-\xi))$$

$$\Rightarrow y(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\,(1+\eta) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta = 2y - 1}$$

Or dans l'élément de référence

$$T(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)T_1 + N_2(\xi,\eta)T_2 + N_3(\xi,\eta)T_3 + N_4(\xi,\eta)T_4$$

$$T(\xi,\eta) = N_1(\xi,\eta)20 + N_2(\xi,\eta)21 + N_3(\xi,\eta)18 + N_4(\xi,\eta)15$$

$$T(\xi,\eta) = \frac{20}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{21}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{18}{4}(1+\xi)(1+\eta) + \frac{15}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$T(\xi,\eta) = 5(1-\xi)(1-\eta) + \frac{21}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{9}{2}(1+\xi)(1+\eta) + \frac{15}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

$$T(\xi,\eta) = (1-\eta)\,\left[5\,(1-\xi) + \frac{21}{4}(1+\xi)\right] + (1+\eta)\,\left[\frac{9}{2}(1+\xi) + \frac{15}{4}(1-\xi)\right]$$

$$T(\xi,\eta) = (1-\eta)\,\left[\frac{20}{4} - \frac{20}{4}\xi + \frac{21}{4} + \frac{21}{4}\xi\right] + (1+\eta)\,\left[\frac{18}{4} + \frac{18}{4}\xi + \frac{15}{4} - \frac{15}{4}\xi\right]$$

$$T(\xi,\eta) = (1-\eta)\,\left[\frac{41}{4} + \frac{1}{4}\xi\right] + (1+\eta)\,\left[\frac{33}{4} + \frac{3}{4}\xi\right]$$

$$T(\xi,\eta) = \frac{41}{4} + \frac{1}{4}\xi - \frac{41}{4}\eta - \frac{1}{4}\xi\,\eta + \frac{33}{4} + \frac{3}{4}\xi + \frac{33}{4}\eta + \frac{3}{4}\xi\,\eta$$

$$T(\xi,\eta) = \frac{74}{4} + \frac{4}{4}\xi - \frac{8}{4}\eta + \frac{2}{4}\xi\,\eta$$

$$T(\xi,\eta) = \frac{37}{2} + \xi - 2\eta + \frac{1}{2}\xi\,\eta$$

Or pour

$$\xi = x - 1 \qquad \text{et} \qquad \eta = 2y - 1$$

$$T(\xi(x,y),\eta(x,y)) = T(x,y) = \frac{37}{2} - 2(2y-1) + \frac{1}{2}(2xy - 2y - x + 1) + (x-1)$$

$$T(x,y) = \frac{37}{2} - 4y + 2 + x - 1 + yx - \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}$$

$$T(x,y) = \frac{1}{2}x - 5y + yx + 20$$

$$\boxed{T(x,y) = \frac{1}{2}x - 5y + yx + 20}$$

2/ Le vecteur gradient de la température aura pour composantes :

$$\overrightarrow{grad}\,T(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial T(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + y \\ -5 + x \end{pmatrix}$$

3/Calculons et dessinons la courbe isovaleur correspondante.

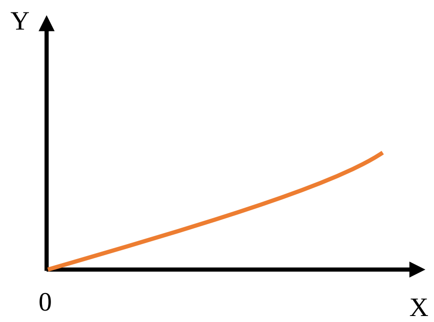
A $T = 20$ C'est-à-dire, trouvons les $T(x,y)$ telle que $T(x,y) = 20$

$$\frac{1}{2}x - 5y + yx + 20 = 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x - 5y + yx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + (x-5)y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = (5-x)y$$

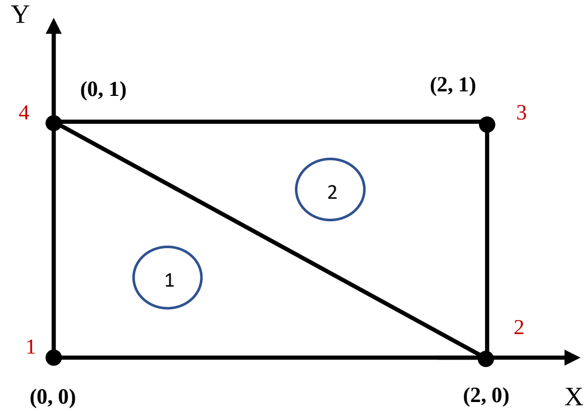
$$\boxed{y = \frac{x}{2(5-x)}}$$



<u>Solution de l'exercice 04 :</u>

On a deux triangles linéaires :

- L'élément 1 avec les nœuds 1, 2 et 4.
- L'élément 2 avec les nœuds 2, 3 et 4.



1/ Donc calculons en passant par l'élément de référence l'expression de l'interpolation $T_{(1)}(x, y)$ et $T_{(2)}(x, y)$.

➢ Pour l'élément (1) :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi, \eta)\, x_i$$

Et

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi, \eta)\, y_i$$

Avec les fonctions d'interpolation d'un élément de type triangle linéaire suivantes :

* $N_1(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$
* $N_2(\xi, \eta) = \xi$
* $N_3(\xi, \eta) = \eta$

$$x(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) \times 0 + 2 \times \xi + \eta \times 0$$

$$\Rightarrow x(\xi, \eta) = 2\,\xi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\xi = \frac{1}{2} x}$$

Et pour $y(\xi, \eta)$:

$$y(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta) \times 0 + 0 \times \xi + \eta \times 1$$

$$\Rightarrow y(\xi, \eta) = \eta \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta = y}$$

Or

$$T_{(1)}(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)\, T_1 + \xi\, T_2 + \eta\, T_4 = (1 - \xi - \eta)\, 20 + \xi\, 21 + \eta\, 15$$

$$\Rightarrow\ T_{(1)}(\xi,\eta) = 20 - 20\,\xi - 20\,\eta + 21\,\xi + 15\,\eta = 20 + \ \xi - 5\,\eta$$

$$\Rightarrow\ T_{(1)}(\xi,\eta) = 20 + \xi - \ 5\,\eta \qquad \text{où} \qquad \xi = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad \eta = y$$

Donc

$$T_{(1)}(\xi(x,y),\eta(x,y)) = 20 + \frac{x}{2} - 5y$$

$$\boxed{\Rightarrow\ T_{(1)}(x,y) = 20 + \frac{x}{2} - 5y}$$

- Pour l'élément (2) :

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta)\,x_i$$

Et

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{3} N_i(\xi,\eta)\,y_i$$

Donc

$$x(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)\ \times 2 + 2 \times\ \xi + \eta \times 0$$

$$\Rightarrow x(\xi,\eta) = 2 - 2\,\xi - 2\,\eta + 2\,\xi$$

$$\Rightarrow x(\xi,\eta) = 2(1-\eta) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta = -\frac{x}{2} + 1}$$

Et pour $y(\xi,\eta)$:

$$y(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)\ \times 0 + \ \xi + \eta$$

$$y(\xi,\eta) = \ \xi + \eta \qquad \text{mais on a déjà} \qquad \eta = 1 - \frac{x}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\xi = y + \frac{x}{2} - 1}$$

Or

$$T_{(2)}(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)\,T_2 + \ \xi\,T_3 + \eta\,T_4 = \ (1-\xi-\eta)\,21 + \ \xi\,18 + \eta\,15$$

$$\Rightarrow\ T_{(2)}(\xi,\eta) = 21 - 21\,\xi - 21\,\eta + 18\,\xi + 15\,\eta$$

$$\Rightarrow\ T_{(2)}(\xi,\eta) = 21 - 3\,\xi - 6\,\eta$$

On remplace ξ et η par leurs expressions respectives

$$T_{(2)}(\xi(x,y),\eta(x,y)) = T_{(2)}(x,y) = 21 - 3\,\left(y + \frac{x}{2} - 1\right) - 6(1 - \frac{x}{2})$$

$$T_{(2)}(x,y) = 21 - 3y - \frac{3}{2}x - 3 - 6 - 3x$$

$$\boxed{T_{(2)}(x,y) = 18 + \frac{3}{2}x - 3y}$$

2/ Calculons le gradient de température.

$$\overrightarrow{grad}\, T_{(1)}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T_{(1)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{grad}\, T_{(2)}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{(2)}}{\partial x} \\ \frac{\partial T_{(2)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que le gradient n'est pas situé à la frontière entre les deux éléments.

3/ Concernant l'équation de l'isovaleur $T = 20$ c'est-à-dire l'ensemble des points (x, y) telles que :

- Sur l'équation (1) $T_{(1)}(x,y) = 20$:

$$T_{(1)}(x,y) = 20 + \frac{x}{2} - 5y = 20 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{2} - 5y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{(1)} = \frac{x}{10}}$$

- Sur l'équation (2) $T_{(2)}(x,y) = 20$:

$$T_{(2)}(x,y) = 18 + \frac{3}{2}x - 3y = 20$$

$$T_{(2)}(x,y) = \frac{3}{2}x - 2 = 3y$$

$$\Rightarrow \boxed{y_{(2)} = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x}$$

On peut remarquer que le champ de température est bien situé à la frontière.