

# TABLES DES ÉLÉMENTS

Annexe



Pour une information plus détaillée, le lecteur est invité à consulter les ouvrages mis en référence à la fin du chapitre 4.

## CONVENTION

### Définition A1.1

On considère ici les conventions de notation assez classiques suivantes :

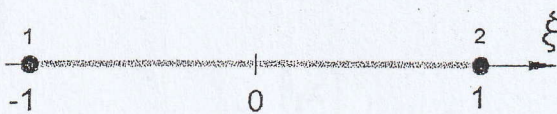
$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

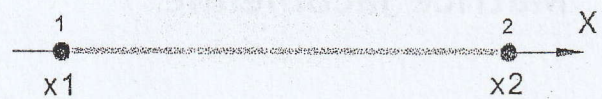
$$z_{ij} = z_i - z_j$$

## ÉLÉMENT 1D LINÉAIRE

### Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

### Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.1 - Table de l'élément 1D linéaire.

| $i$ | $N_i$             | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ |
|-----|-------------------|-------------------------------------|
| 1   | $\frac{1-\xi}{2}$ | $-\frac{1}{2}$                      |
| 2   | $\frac{1+\xi}{2}$ | $\frac{1}{2}$                       |

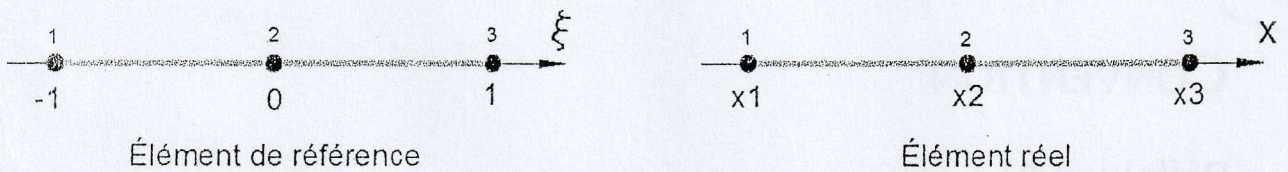
### Matrice Jacobienne

$$[J] = \det[J] = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{2}{L}$$

### ÉLÉMENT 1D QUADRATIQUE

#### Élément et élément de référence



#### Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.2 - Table de l'élément 1D quadratique.

| $i$ | $N_i$                     | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ |
|-----|---------------------------|-------------------------------------|
| 1   | $\frac{-\xi}{2}(1 - \xi)$ | $\frac{-1}{2} + \xi$                |
| 2   | $1 - \xi^2$               | $-2\xi$                             |
| 3   | $\frac{\xi}{2}(1 + \xi)$  | $\frac{1}{2} + \xi$                 |

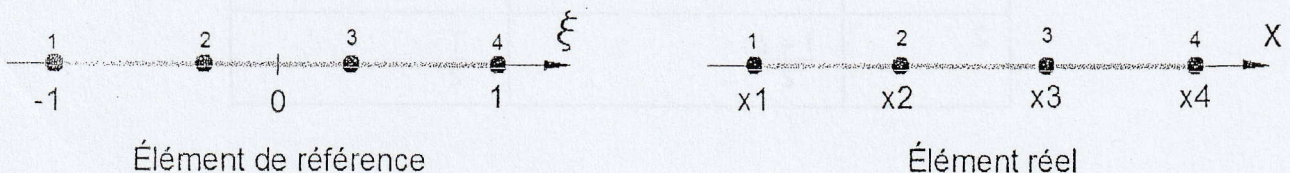
### Matrice Jacobienne

$$[J] = \det[J] = \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{[J]}$$

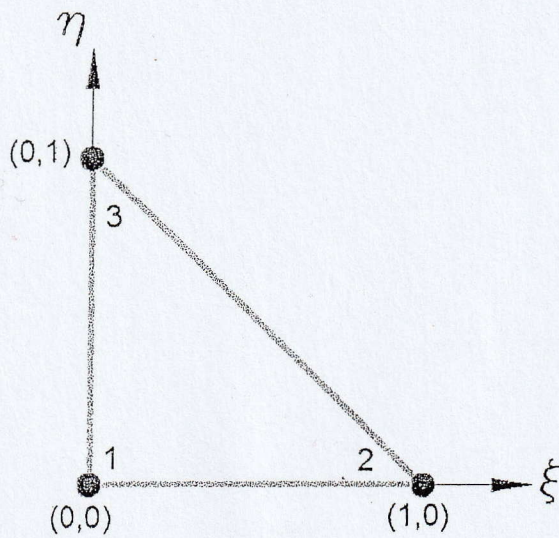
### ÉLÉMENT 1D CUBIQUE

#### Élément et élément de référence

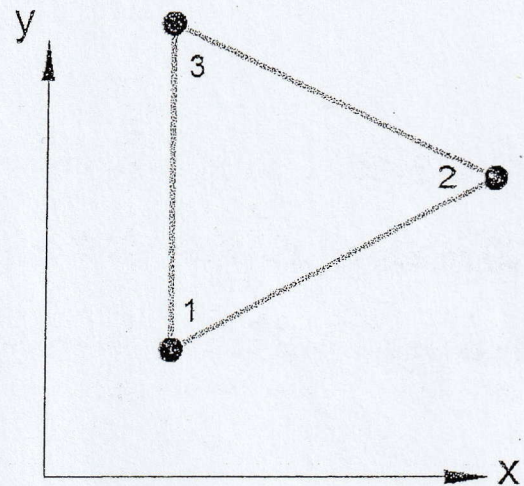


## ÉLÉMENT DE TYPE TRIANGLE LINÉAIRE

Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

## Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.7 - Table du triangle linéaire.

| $i$ | $N_i$            | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ |
|-----|------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1   | $1 - \xi - \eta$ | -1                                  | -1                                   |
| 2   | $\xi$            | 1                                   | 0                                    |
| 3   | $\eta$           | 0                                   | 1                                    |

## Matrice Jacobienne

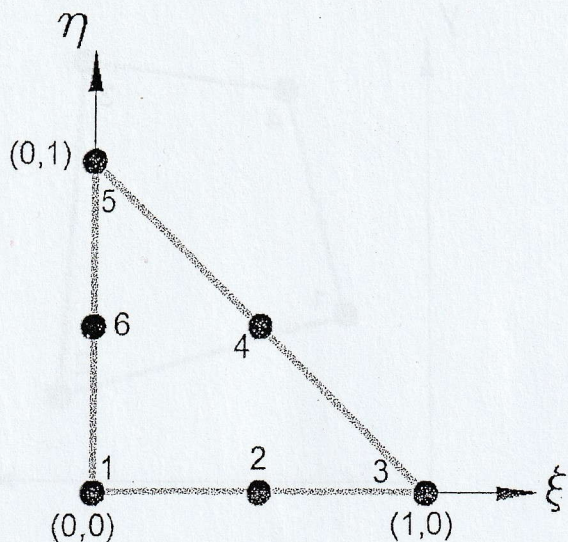
$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix}$$

$\det [J] = 2 \cdot A = x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}$  où A est l'aire du triangle réel

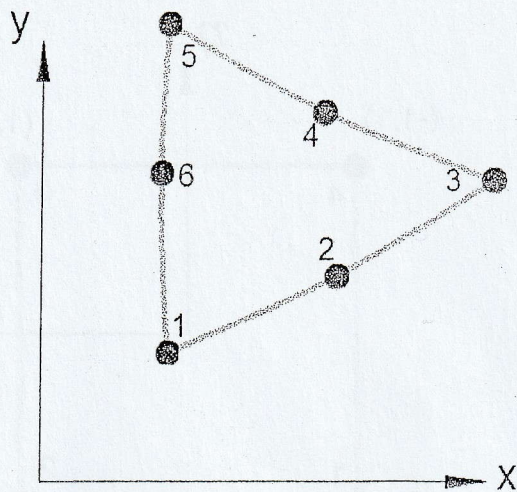
$$[j] = \frac{1}{x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

# ÉLÉMENT DE TYPE TRIANGLE QUADRATIQUE

## Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

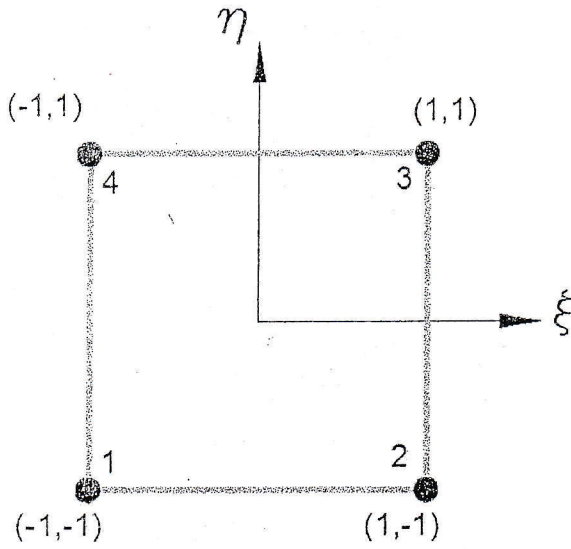
## Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.8 - Table du triangle quadratique.

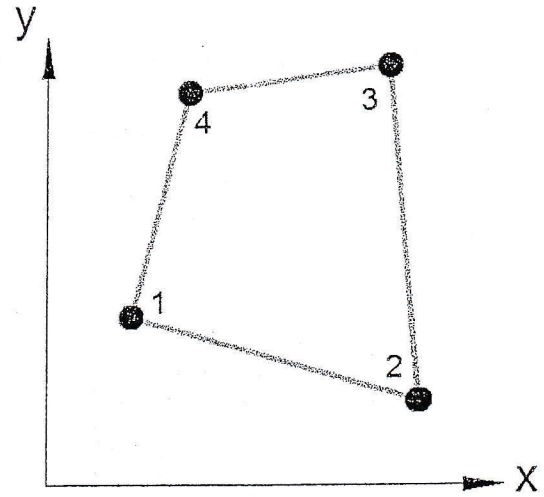
| $i$ | $N_i$   | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ |
|-----|---|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1   | $(-1 + \xi + \eta) \cdot (-1 + 2\xi + 2\eta)$ | $-3 + 4\xi + 4\eta$                 | $-3 + 4\xi + 4\eta$                  |
| 2   | $4\xi \cdot (1 - \xi - \eta)$                 | $4 - 8\xi - 4\eta$                  | $-4\xi$                              |
| 3   | $-\xi(1 - 2\xi)$                              | $-1 + 4\xi$                         | 0                                    |
| 4   | $4\xi\eta$                                    | $4\eta$                             | $4\xi$                               |
| 5   | $-\eta(1 - 2\eta)$                            | 0                                   | $-1 + 4\eta$                         |
| 6   | $4\eta \cdot (1 - \xi - \eta)$                | $-4\eta$                            | $4 - 4\xi - 8\eta$                   |

## ÉLÉMENT DE TYPE QUADRANGLE LINÉAIRE

### Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

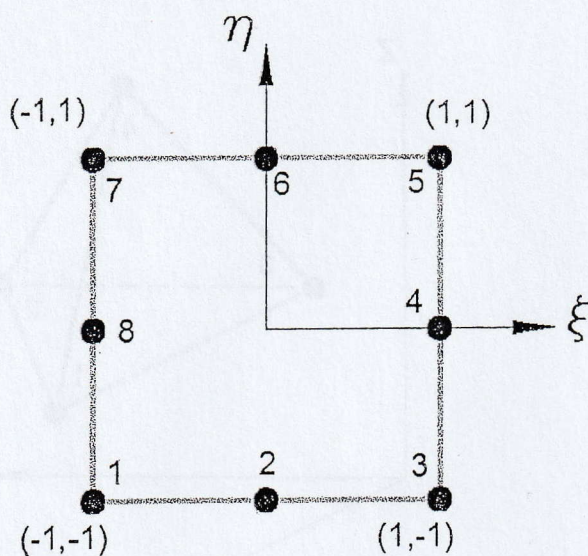
### Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.9 - Table du quadrangle linéaire.

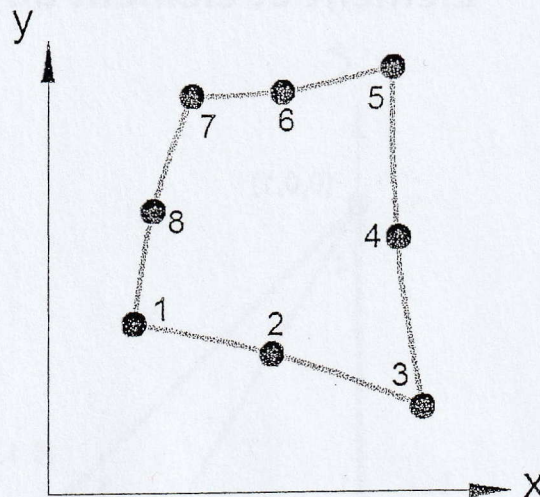
| $i$ | $N_i$                                   | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ |
|-----|---|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1   | $\frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 - \eta)$ | $\frac{1}{4}(-1 + \eta)$            | $\frac{1}{4}(-1 + \xi)$              |
| 2   | $\frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 - \eta)$ | $\frac{1}{4}(1 - \eta)$             | $\frac{1}{4}(-1 - \xi)$              |
| 3   | $\frac{1}{4}(1 + \xi) \cdot (1 + \eta)$ | $\frac{1}{4}(1 + \eta)$             | $\frac{1}{4}(1 + \xi)$               |
| 4   | $\frac{1}{4}(1 - \xi) \cdot (1 + \eta)$ | $\frac{1}{4}(-1 - \eta)$            | $\frac{1}{4}(1 - \xi)$               |

# ÉLÉMENT DE TYPE QUADRANGLE QUADRATIQUE

## Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

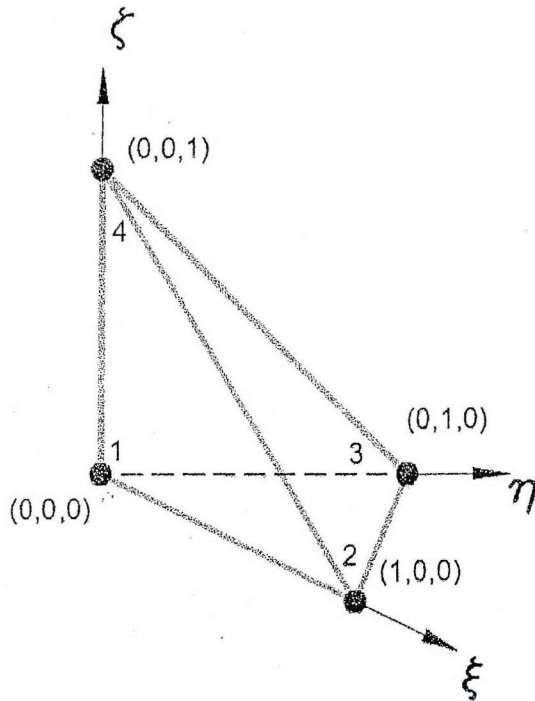
## Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.10 - Table du quadrangle quadratique.

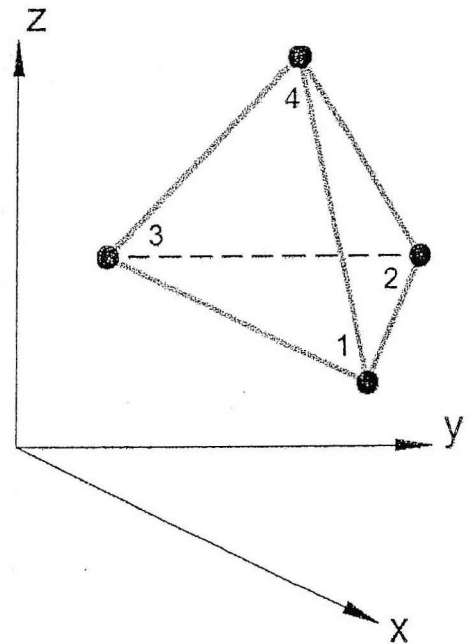
| $i$ | $N_i$                                       | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ |
|-----|---|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1   | $-\frac{1}{4}(1-\xi).(1-\eta).(1+\xi+\eta)$ | $\frac{1}{4}(1-\eta).(2\xi+\eta)$   | $\frac{1}{4}(1-\xi).( \xi+2\eta)$    |
| 2   | $\frac{1}{2}(1-\xi^2).(1-\eta)$             | $-\xi(1-\eta)$                      | $-\frac{1}{2}(1-\xi^2)$              |
| 3   | $-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta).(1-\xi+\eta)$  | $\frac{1}{4}(1-\eta).(2\xi-\eta)$   | $-\frac{1}{4}(1+\xi).( \xi-2\eta)$   |
| 4   | $\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2)$              | $\frac{1}{2}(1-\eta^2)$             | $-(1+\xi)\eta$                       |
| 5   | $-\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta).(1-\xi-\eta)$  | $\frac{1}{4}(1+\eta).(2\xi+\eta)$   | $\frac{1}{4}(1+\xi).( \xi+2\eta)$    |
| 6   | $\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta)$              | $-\xi(1+\eta)$                      | $\frac{1}{2}(1-\xi^2)$               |
| 7   | $-\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).(1+\xi-\eta)$  | $\frac{1}{4}(1+\eta).(2\xi-\eta)$   | $-\frac{1}{4}(1-\xi).( \xi-2\eta)$   |
| 8   | $\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)$              | $-\frac{1}{2}(1-\eta^2)$            | $-(1+\xi)\eta$                       |

## ÉLÉMENT DE TYPE TÉTRAÈDRE LINÉAIRE

### Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

### Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.11 - Table du tétraèdre linéaire.

| $i$ | $N_i$                    | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ |
|-----|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1   | $1 - \xi - \eta - \zeta$ | -1                                  | -1                                   | -1                                    |
| 2   | $\xi$                    | 1                                   | 0                                    | 0                                     |
| 3   | $\eta$                   | 0                                   | 1                                    | 0                                     |
| 4   | $\zeta$                  | 0                                   | 0                                    | 1                                     |

### Matrice Jacobienne

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} & z_{21} \\ x_{31} & y_{31} & z_{31} \\ x_{41} & y_{41} & z_{41} \end{bmatrix}$$

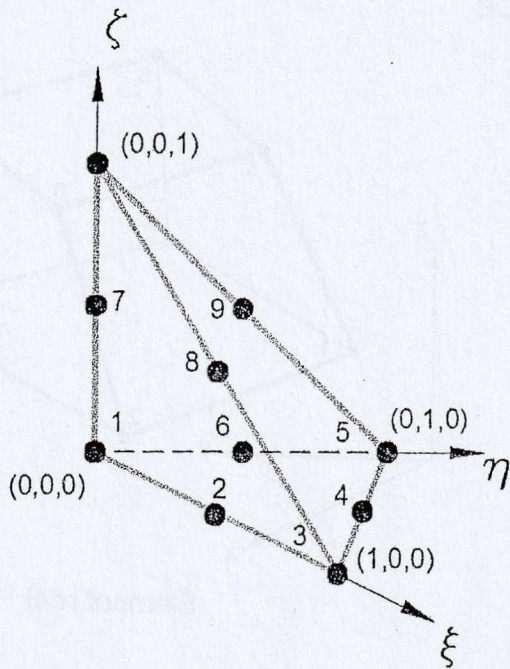
$$\det [J] = 6.V = x_{41} \cdot (y_{21} \cdot z_{31} - z_{21} \cdot y_{31}) + x_{31} \cdot (z_{21} \cdot y_{41} - y_{21} \cdot z_{41}) + x_{21} \cdot (y_{31} \cdot z_{41} - z_{31} \cdot y_{41})$$

V est le volume du tétraèdre réel.

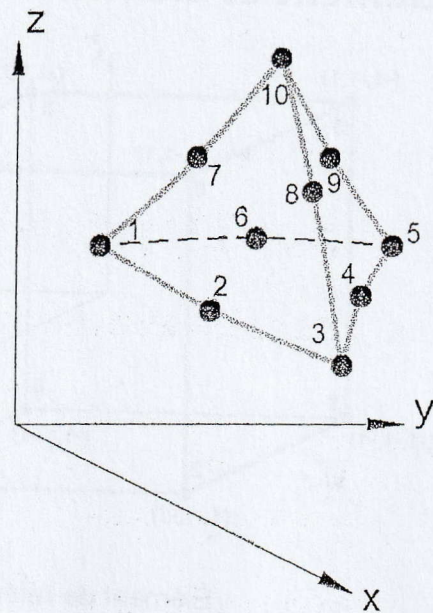
$$[j] = [J]^{-1} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{6.V} \begin{bmatrix} y_{31} \cdot z_{41} - z_{31} \cdot y_{41} & z_{21} \cdot y_{41} - y_{21} \cdot z_{41} & y_{21} \cdot z_{31} - z_{21} \cdot y_{31} \\ -x_{31} \cdot z_{41} + x_{41} \cdot z_{31} & -x_{41} \cdot z_{21} + x_{21} \cdot z_{41} & -x_{21} \cdot z_{31} + x_{31} \cdot z_{21} \\ -x_{41} \cdot y_{31} + x_{31} \cdot y_{41} & -x_{21} \cdot y_{41} + x_{41} \cdot y_{21} & -x_{31} \cdot y_{21} + x_{21} \cdot y_{31} \end{bmatrix}$$

# ÉLÉMENT DE TYPE TÉTRAÈDRE QUADRATIQUE

## Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

## Fonctions d'interpolation et dérivées

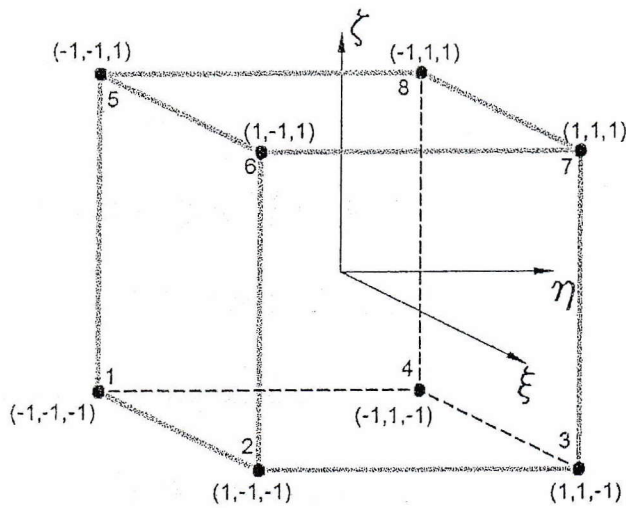
Tableau A1.12 - Table du tétraèdre quadratique.

| $i$ | $N_i$   | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ |
|-----|---|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1   | $(-1 + \xi + \eta + \zeta)$<br>$(-1 + 2\xi + 2\eta + 2\zeta)$ | $-3 + 4\xi + 4\eta + 4\zeta$        | $-3 + 4\xi + 4\eta + 4\zeta$         | $-3 + 4\xi + 4\eta + 4\zeta$          |
| 2   | $4\xi(1 - \xi - \eta - \zeta)$                                | $4 - 8\xi - 4\eta - 4\zeta$         | $-4\zeta$                            | $-4\zeta$                             |
| 3   | $-\xi(1 - 2\zeta)$  | $-1 + 4\xi$                         | 0                                    | 0                                     |
| 4   | $4\xi\eta$  | $4\eta$                             | $4\xi$                               | 0                                     |
| 5   | $-\eta(1 - 2\eta)$  | 0                                   | $-1 + 4\eta$                         | 0                                     |
| 6   | $4\eta(1 - \xi - \eta - \zeta)$                               | $-4\eta$                            | $4 - 4\xi - 8\eta - 4\zeta$          | $-4\eta$                              |
| 7   | $4\zeta(1 - \xi - \eta - \zeta)$                              | $-4\zeta$                           | $-4\zeta$                            | $4 - 4\xi - 4\eta - 8\zeta$           |
| 8   | $4\xi\zeta$   | $4\zeta$                            | 0                                    | $4\xi$                                |
| 9   | $4\eta\zeta$  | 0                                   | $4\zeta$                             | $4\eta$                               |
| 10  | $-\zeta(1 - 2\zeta)$  | 0                                   | 0                                    | $-1 + 4\zeta$                         |

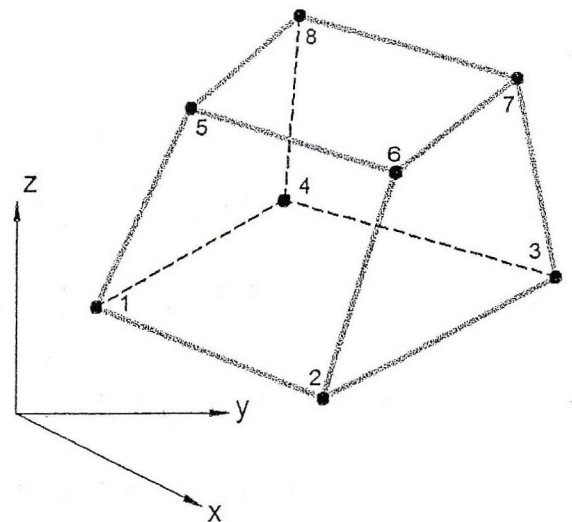


## ÉLÉMENT DE TYPE HEXAÈDRE LINÉAIRE

### Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

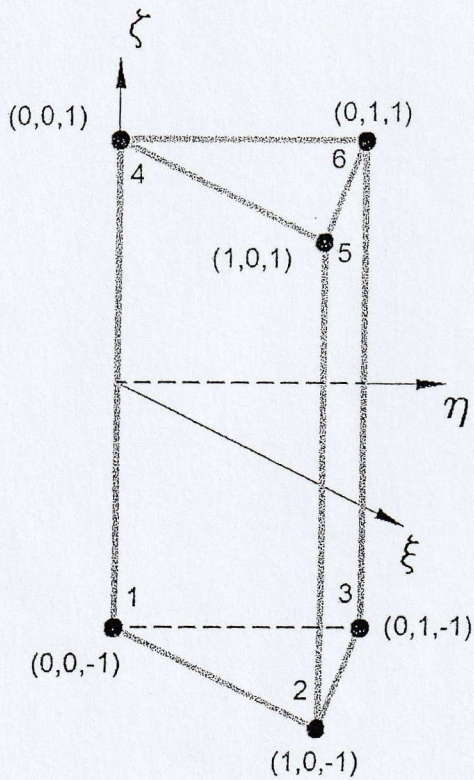
### Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.13 - Table de l'hexaèdre linéaire.

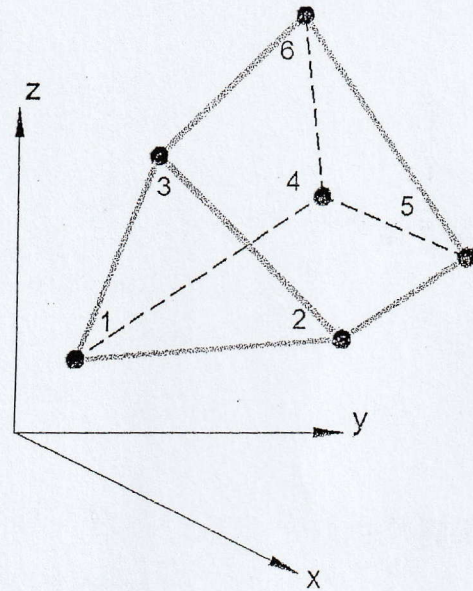
| $i$ | $N_i$   | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$  | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ |
|-----|---|--------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1   | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 - \eta).(1 - \zeta)$ | $-\frac{1}{8}(1 - \eta).(1 - \zeta)$ | $-\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 - \zeta)$  | $-\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 - \eta)$    |
| 2   | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 - \eta).(1 - \zeta)$ | $\frac{1}{8}(1 - \eta).(1 - \zeta)$  | $-\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 - \zeta)$  | $-\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 - \eta)$    |
| 3   | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 + \eta).(1 - \zeta)$ | $\frac{1}{8}(1 + \eta).(1 - \zeta)$  | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 - \zeta)$   | $-\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 + \eta)$    |
| 4   | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \eta).(1 - \zeta)$ | $-\frac{1}{8}(1 + \eta).(1 - \zeta)$ | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 - \zeta)$   | $-\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \eta)$    |
| 5   | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 - \eta).(1 + \zeta)$ | $-\frac{1}{8}(1 - \eta).(1 + \zeta)$ | $-\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \zeta)$  | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 - \eta)$     |
| 6   | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 - \eta).(1 + \zeta)$ | $\frac{1}{8}(1 - \eta).(1 + \zeta)$  | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \zeta)$   | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 - \eta)$     |
| 7   | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 + \eta).(1 + \zeta)$ | $\frac{1}{8}(1 + \eta).(1 + \zeta)$  | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 + \zeta)$   | $\frac{1}{8}(1 + \xi).(1 + \eta)$     |
| 8   | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \eta).(1 + \zeta)$ | $-\frac{1}{8}(1 + \eta).(1 + \zeta)$ | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \zeta)$   | $\frac{1}{8}(1 - \xi).(1 + \eta)$     |

## ÉLÉMENT DE TYPE PENTAÈDRE LINÉAIRE

## Élément et élément de référence



Élément de référence



Élément réel

## Fonctions d'interpolation et dérivées

Tableau A1.14 - Table du pentaèdre linéaire.

| $i$ | $N_i$   | $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$ | $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ |
|-----|---|-------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1   | $\frac{1}{2}(1 - \xi - \eta) \cdot (1 - \zeta)$ | $-\frac{1}{2}(1 - \zeta)$           | $-\frac{1}{2}(1 - \zeta)$            | $-\frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)$        |
| 2   | $\frac{1}{2}\xi \cdot (1 - \zeta)$              | $\frac{1}{2}(1 - \zeta)$            | 0                                    | $-\frac{1}{2}\xi$                     |
| 3   | $\frac{1}{2}\eta \cdot (1 - \zeta)$             | 0                                   | $\frac{1}{2}(1 - \zeta)$             | $-\frac{1}{2}\eta$                    |
| 4   | $\frac{1}{2}(1 - \xi - \eta) \cdot (1 + \zeta)$ | $-\frac{1}{2}(1 + \zeta)$           | $-\frac{1}{2}(1 + \zeta)$            | $\frac{1}{2}(1 - \xi - \eta)$         |
| 5   | $\frac{1}{2}\xi \cdot (1 + \zeta)$              | $\frac{1}{2}(1 + \zeta)$            | 0                                    | $\frac{1}{2}\xi$                      |
| 6   | $\frac{1}{2}\eta \cdot (1 + \zeta)$             | 0                                   | $\frac{1}{2}(1 + \zeta)$             | $\frac{1}{2}\eta$                     |