

## Techniques d'intégrations numériques en éléments finis

### Table des matières

1.	Principes utilisés.....	1
2.	Calcul d'intégrales sur des éléments 1D à une dimension .....	2
	Exemple 01 : Schémas d'intégration d'une fonction non polynômiale et précision des calculs de la méthode de quadrature .....	5
	Exemple 02 Intégration numérique sur un élément fini 1D réel .....	6
3.	Calcul d'intégrales sur des éléments 2D à deux dimensions.....	8
	Exemple 03 : Schémas d'intégration et précision des calculs de la méthode de quadrature.....	12
	Exemple 04 : Intégration sur un maillage 2D composé de deux éléments finis triangulaires TRI3 .	14
	Exemple 05: Intégration numérique sur un maillage 2D composé d'un élément quadrangulaire QUA4 .....	20
4.	Calcul d'intégrales sur des éléments 3D à trois dimensions.....	25

### 1. Principes utilisés

En éléments finis, nous avons souvent besoin de calculer des intégrales sur des éléments du maillage ou sur leurs frontières. A titre d'exemple, et comme nous le verrons plus loin, pour calculer les matrices de rigidités et les vecteurs forces en élasticité, on doit utiliser une formulation intégrale.

Afin de simplifier leurs calculs, au lieu de les calculer directement sur les éléments réels du maillage, ces intégrales seront calculées sur les éléments de référence en utilisant la matrice Jacobienne dans le calcul intégral. En effet, soit la fonction  $F(x, y, z)$  définie dans l'élément réel  $V$  du maillage appartenant à l'espace basé sur les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . En utilisant l'élément de référence noté  $V_{ref}$  défini dans l'espace de coordonnées paramétriques  $(\xi, \eta, \zeta)$ , cette fonction  $F(x, y, z)$  se transforme en une fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  définie dans l'élément de référence  $V_{ref}$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (01)$$

Comme déjà vu dans le paragraphe 03 du chapitre 03, cette transformation du calcul intégral, utilisant le déterminant de la matrice Jacobienne  $det[J]$ , est effectuée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_V F(x, y, z). dx. dy. dz &= \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta, \zeta). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \end{aligned} \quad (02)$$

Il s'agit donc d'intégrer la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence  $V_{ref}$ . On déduit également de l'équation (02), la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx \cdot dy \cdot dz = \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta \quad (03)$$

Par ailleurs, la méthode utilisée pour l'intégration de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence est basée sur le principe de quadrature de Gauss-Legendre. Ce principe consiste à calculer les intégrales sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  en certains points de l'élément de référence appelés « points d'intégration » ou points de Gauss.

## 2. Calcul d'intégrales sur des éléments 1D à une dimension

Soit à calculer l'intégrale  $I_1$  d'une fonction à une seule variable  $F(x)$  dont l'expression est une donnée connue sur un élément fini linéaire à deux nœuds de type SEG2 et appartenant à un maillage unidimensionnel 1D tel que les deux nœuds 1 et 2 de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $x_1$  et  $x_2$  (figure 01).

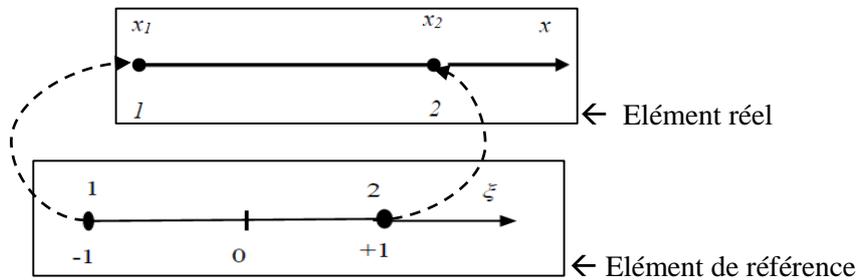


Figure 01 : relation entre élément réel 1D à 2 nœuds (SEG2) et son élément de référence

Comme déjà vu au chapitre 05 précédent, à cet élément réel du maillage, on associe un élément de référence par la relation suivante :

$$x(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (04)$$

Après développement de l'équation (04) précédente, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi}{2}(x_1 - x_2) \quad (05)$$

En remplaçant la fonction  $x(\xi)$  par son expression tirée de l'équation (05) précédente dans l'expression de la fonction  $F(x)$ , on obtient la nouvelle fonction  $\varphi(\xi)$  définie dans l'élément de référence telle que :

$$\varphi(\xi) = F(x(\xi)) \quad \text{avec} \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad (06)$$

Ainsi, la fonction  $\varphi(\xi)$  étant désormais connue, on peut donc appliquer la relation (02) comme suit :

$$I_1 = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)) \cdot \det[J] \cdot d\xi = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) \cdot \det[J] \cdot d\xi \quad (07)$$

Dans le cas de cet élément unidimensionnel SEG2, la matrice Jacobienne étant  $[J]$  est égale à son déterminant  $\det[J]$ , telle qu'en dérivant totalement  $x(\xi)$  écrit dans (05) par rapport à  $\xi$ , on obtient :

$$[J] = \det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (08)$$

$L$  étant la longueur de l'élément réel considéré du maillage.

Ainsi, nous allons donc calculer la valeur  $I_1$  de l'intégrale de la manière suivante :

$$I_1 = \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi \quad (09)$$

Par la suite, pour calculer le terme intégral  $\left(\int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi\right)$ , on applique le principe de quadrature de Gauss-Legendre. Dans ce cas, l'application de ce principe consiste à calculer l'intégrale sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi)$  en certains points d'abscisses  $\xi_i$ . appelés « points d'intégration » ou points de Gauss d'abscisses  $\xi_i$  tels que :

$$\int_{-1}^{+1} \varphi(\xi). d\xi = \sum_{i=1}^r w_i. \varphi(\xi_i) \quad (10)$$

$r$  : le nombre de points d'intégration utilisés. Ces points définissent donc « un schéma d'intégration » (figure 02). Nous verrons plus loin (notamment dans l'exemple 01) que plus le nombre  $r$  est élevé, plus la précision des calculs augmente.

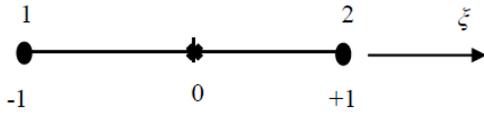
Les valeurs  $\xi_i$   $i = 1, r$  représentent les abscisses de ces points d'intégration.

Les valeurs  $w_i$   $i = 1, r$  représentent les valeurs des coefficients à affecter à chaque point d'intégration. Ils sont également appelés « coefficients poids » en anglais « weight coefficients ».

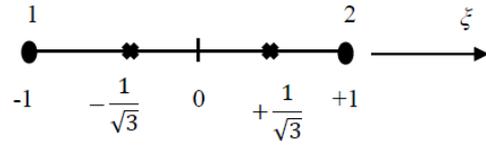
Les valeurs de  $\xi_i$  et  $w_i$   $i = 1, r$  sont données par le tableau 01 ci-dessous ainsi que par les tables d'intégration données en annexe.

$r$	$\xi_i$	$w_i$	Degré maximum de polynôme à intégrer
$r=1$ (figure 02-a)	0	2	1
$r=2$ (figure 02-b)	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	3
$r=3$ (figure 02-c)	0 $\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{8}{9}$ $\frac{5}{9}$	5
$r=4$ (figure 02-d)	$\pm \sqrt{\frac{3 - 2.\sqrt{6/5}}{7}}$ $\pm \sqrt{\frac{3 + 2.\sqrt{6/5}}{7}}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{6.\sqrt{6/5}}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{6.\sqrt{6/5}}$	7

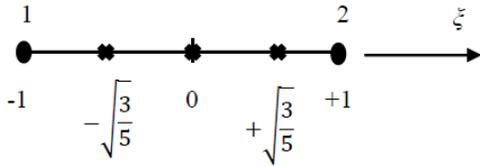
Tableau 01 : tables d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour le cas unidimensionnel 1D



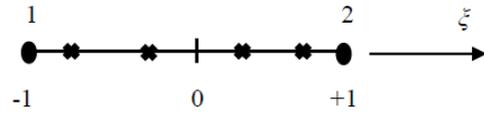
( a ) schéma d'intégration à un point de Gauss



( b ) schéma d'intégration à deux points de Gauss



( c ) schéma d'intégration à trois points de Gauss



( d ) schéma d'intégration à quatre points de Gauss

Légende : \* points de Gauss    • nœuds de l'élément de référence

Figure 02 : Schémas d'intégration correspondants au tableau 01 ci-dessus

**Remarque :**

Il est important de noter que cette méthode de quadrature de Gauss-Legendre intègre exactement les polynômes de degré inférieur ou égal à  $(2r-1)$ . Par ailleurs, l'intégration par cette méthode de polynômes dont le degré est supérieur à  $(2r-1)$  devient un calcul approché. En effet, soit  $d_g$  le degré d'un polynôme quelconque à intégrer. Ainsi, pour avoir une intégration exacte de ce polynôme, il faut que :

$$d_g \leq 2r - 1 \tag{11}$$

Autrement dit :

$$\Rightarrow r \geq \frac{d_g + 1}{2} \tag{12}$$

Ce qui signifie que pour un degré fixé d'un polynôme donné, le nombre de points de Gauss du schéma d'intégration à adopter (ou à choisir) doit avoir pour valeur minimale celle de l'expression (12) ci-dessus. Cela signifie également que plus le degré  $d_g$  du polynôme à intégrer augmente, plus il est nécessaire d'augmenter le nombre  $r$  de points d'intégration. D'autre part, si cette dernière condition (12) n'est pas vérifiée, le calcul devient alors approché et la précision des calculs en sera affectée. Pour éviter ce calcul approché, une autre méthode consiste à utiliser la dernière colonne du tableau 01 précédent. En effet, celle-ci fournit les valeurs maximales des degrés de polynômes à intégrer pour un nombre donné de points de Gauss. A titre d'exemple, si notre polynôme à intégrer est de degré  $d_g=5$  de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 ,$$

Alors, d'après la condition (12), pour avoir une intégration exacte, il faut que :

$$r \geq \frac{d_g+1}{2} \Rightarrow r \geq \frac{5+1}{2} \Rightarrow r \geq 3.$$

Ainsi, pour ce polynôme de degré 5, le nombre minimum de points d'intégration à utiliser est donc  $r=3$ . Le schéma d'intégration à adopter devra contenir au minimum trois points de Gauss. Ce résultat peut également être obtenu en utilisant la dernière colonne du tableau 01

Par ailleurs, l'intégration par cette méthode de fonctions qui ont une forme non polynomiale reste toujours un calcul approché quel que soit le nombre  $r$  choisi de points d'intégration. Toutefois, pour augmenter la précision des calculs, il suffit d'augmenter le nombre de points de Gauss. C'est le cas de l'exemple 01 suivant.

**Exemple 01 : Schémas d'intégration d'une fonction non polynômiale et précision des calculs de la méthode de quadrature**

Soit l'intégrale suivante d'une fonction non polynômiale dont la solution exacte est égale  $(\pi/2)$  telle que :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1+\xi^2} \right) \cdot d\xi = \frac{\pi}{2}$$

En utilisant la méthode de quadrature de Gauss-Legendre, calculer directement sur l'élément de référence la valeur approchée de cette intégrale  $I_1$  et ce, en adoptant les trois schémas d'intégrations suivants :

- a) Premier schéma d'intégration : en utilisant un point d'intégration donc  $r=1$
- b) Second schéma d'intégration : en utilisant deux points d'intégration  $r=2$
- c) Troisième schéma d'intégration : en utilisant trois points d'intégration  $r=3$

**Solution :**

Cet exemple traite uniquement la méthode de quadrature de Gauss. Il s'agit d'étudier l'influence du schéma adopté d'intégration sur la précision du résultat obtenu.

Il s'agit donc d'intégrer la fonction  $\varphi(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$  dans l'élément de référence et de comparer la valeur approchée de la solution obtenue avec la solution exacte qui est égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$

- a) Premier schéma d'intégration : en utilisant un point d'intégration donc  $r=1$  on aura :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1+\xi^2} \right) \cdot d\xi = w_1 \cdot \varphi(\xi_1)$$

D'après le tableau 01 précédent, pour  $r = 1$  on a:

$\xi_1 = 0$  (c'est à dire que le point de Gauss se trouve au milieu de l'élément de référence)

et  $w_1 = 2$ . Donc  $I_1 = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) = w_1 \cdot \left( \frac{1}{1+\xi_1^2} \right) = 2 \cdot \left( \frac{1}{1+0^2} \right) = 2$

Ainsi, pour ce schéma d'intégration à un point, on voit bien un écart important entre la solution obtenue égale à 2 et la solution exacte égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$ .

- b) Second schéma d'intégration : en utilisant deux points d'intégration donc  $r=2$  on aura :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1+\xi^2} \right) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \varphi(\xi_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2)$$

D'après le tableau 01, pour  $r = 2$  on a:

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 = 1.$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2) = w_1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_1^2} \right) + w_2 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_2^2} \right) \\
 &= 1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) + 1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) = \frac{3}{2} = 1.5
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour ce schéma d'intégration à deux points, on voit bien une réduction de l'écart entre la solution obtenue égale cette fois à 1.50 et la solution exacte égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$ .

c) Troisième schéma d'intégration : en utilisant trois points d'intégration donc  $r=3$  on aura :

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \left( \frac{1}{1 + \xi^2} \right) \cdot d\xi = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3)$$

La lecture du tableau 01 pour  $r = 3$  donne :

le premier point de Gauss d'abscisse  $\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$  est affecté d'un coefficient poids  $w_1 = \frac{5}{9}$

le second point de Gauss d'abscisse  $\xi_2 = 0$  est affecté d'un coefficient poids  $w_2 = \frac{8}{9}$

le troisième point de Gauss d'abscisse  $\xi_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$  est affecté d'un coefficient poids  $w_3 = \frac{5}{9}$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3) = w_1 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_1^2} \right) + w_2 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_2^2} \right) + w_3 \cdot \left( \frac{1}{1 + \xi_3^2} \right) \\
 &= \frac{5}{9} \cdot \left( \frac{1}{1 + \left( -\sqrt{\frac{3}{5}} \right)^2} \right) + \frac{8}{9} \cdot \left( \frac{1}{1 + (0)^2} \right) + \frac{5}{9} \cdot \left( \frac{1}{1 + \left( \sqrt{\frac{3}{5}} \right)^2} \right) = 1.583
 \end{aligned}$$

$$I_1 = 1.583$$

Ainsi, pour ce schéma d'intégration à trois points, on voit bien une meilleure précision des calculs par rapport aux cas précédents (on rappelle que la solution exacte est égale à  $\frac{\pi}{2} \cong 1.5708$ ).

### **Exemple 02 Intégration numérique sur un élément fini 1D réel**

Calculer numériquement l'intégrale suivante de la fonction  $F(x) = x^3 + 2x^2$  en adoptant un schéma d'intégration qui puisse satisfaire la condition de précision minimale requise par la dernière colonne du tableau 01 précédent. Comparer ensuite le résultat obtenu avec celui la solution exacte obtenue en utilisant la méthode analytique qui consiste à calculer la primitive de la fonction  $F(x)$ .

$$I_2 = \int_0^3 (x^3 + 2x^2) dx$$

### Solution :

On utilise un maillage composé d'un seul élément fini de type SEG2 à deux nœuds dont le nœud 1 a pour abscisse  $x_1 = 0$  et le nœud 2 a pour abscisse  $x_2 = 3$ . Ensuite, on associe à cet élément réel un élément de référence telle que leur relation puisse être écrite :

$$x(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Après développement de l'équation précédente, on obtient :

$$x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi}{2}(x_1 - x_2) = \frac{0 + 3}{2} - \frac{\xi}{2}(0 - 3) = 1.5 + 1.5\xi = 1.5(1 + \xi)$$

Ainsi, en remplaçant  $x(\xi)$  par son expression dans celle de l'expression

$$F(x) = x^3 + 2x^2 = x^2 \cdot (x + 2)$$

on aura :

$$\varphi(\xi) = F(x(\xi)) = x(\xi)^2(x(\xi) + 2) = 2.25(1 + 2\xi + \xi^2)(3.5 + 1.5\xi) \text{ avec } -1 \leq \xi \leq +1$$

Après développement :  $\varphi(\xi) = 7.875 + 19.125\xi + 14.625\xi^2 + 3.375\xi^3$

Ainsi, au lieu donc d'intégrer  $F(x)$  dans l'élément réel du maillage, on intègre  $\varphi(\xi)$  dans l'élément de référence défini par  $-1 \leq \xi \leq +1$  telle que :

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = \int_{-1}^{+1} F(x(\xi)) \cdot \det[J] \cdot d\xi = \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) \cdot \det[J] \cdot d\xi$$

Comme déjà démontré auparavant  $\det[J] = \frac{L}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$ .

Ainsi

$$I_2 = 1.5 \int_{-1}^{+1} \varphi(\xi) \cdot d\xi = 1.5 \cdot \int_{-1}^{+1} (7.875 + 19.125\xi + 14.625\xi^2 + 3.375\xi^3) \cdot d\xi$$

Par ailleurs, le polynôme à intégrer étant de degré  $dg = 3$  en  $\xi$ . En appliquant la condition (11) ainsi que la relation (12) telle que le nombre minimal de points d'intégration soit :

$$\Rightarrow r \geq \frac{dg + 1}{2} \Rightarrow r \geq \frac{3 + 1}{2} \Rightarrow r \geq 2$$

Ceci est également confirmé par le tableau 01. Ainsi, le nombre minimal de points d'intégration à utiliser est donc  $r=2$ . On adopte donc un schéma d'intégration à deux points de Gauss.

$$\begin{aligned} I_2 &= 1.5 \int_{-1}^{+1} (7.875 + 19.125\xi + 14.625\xi^2 + 3.375\xi^3) \cdot d\xi \\ &= 1.5 \sum_{i=1}^2 w_i \cdot \varphi(\xi_i) = 1.5(w_1 \cdot \varphi(\xi_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2)) = \end{aligned}$$

D'après le tableau 01, pour  $r = 2$ , on a:

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad w_1 = w_2 = 1.$$

$$I_2 = 1.5 \left( \varphi \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \varphi \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = 38,25$$

Par ailleurs, le résultat analytique exact obtenu par le calcul des primitives est égal à 38.25. Il est donc égal à notre résultat obtenu numériquement  $I_2 = 38.25$ . Ceci montre l'exactitude des calculs par cette méthode de quadrature lorsque les fonctions à intégrer ont une forme polynomiale et que dans le schéma d'intégration adopté, on a utilisé un nombre suffisant de points de Gauss ( $r=2$  dans notre cas).

### 3. Calcul d'intégrales sur des éléments 2D à deux dimensions

Soit à calculer l'intégrale  $I_1$  d'une fonction à deux variables  $F(x, y)$  dont l'expression est une donnée connue sur un élément fini  $V$  appartenant à un maillage bidimensionnel 2D tels que les  $n$  nœuds de cet élément ont respectivement pour coordonnées  $(x_1, y_1)$ ;  $(x_2, y_2)$ ; ... ..  $(x_n, y_n)$ .

$$I_1 = \int_V F(x, y) dx dy \quad (13)$$

Comme déjà vu au chapitre 05 précédent, à cet élément réel du maillage, on associe un élément de référence par les relations suivantes :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot x_i \quad \text{et} \quad y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \cdot y_i \quad (14)$$

En remplaçant les fonctions  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  par leurs expressions tirée de (14) dans l'expression de la fonction  $F(x, y)$ , on obtient la nouvelle fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  définie dans l'élément de référence  $V_{ref}$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta) = F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \quad (15)$$

Ainsi, la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  étant désormais connue, on peut donc appliquer la relation (02) comme suit :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_V F(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta. \\ &= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta \end{aligned} \quad (16)$$

Après avoir calculé la matrice Jacobienne  $[J]$  et son déterminant  $\det[J]$  qui est une constante, on aura :

$$I_1 = \det[J] \cdot \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (17)$$

Par la suite, pour calculer le terme intégral dans l'élément de référence  $(\int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta)$ , on applique le principe de quadrature pour lequel il existe essentiellement deux méthodes dans la littérature : la méthode produit et la méthode directe. La méthode produit possède l'avantage d'utiliser moins de points d'intégration par rapport à la méthode directe. Toutefois, elle possède l'inconvénient d'être difficile à utiliser. Par contre, la méthode directe utilise un nombre plus élevé de points de Gauss mais possède l'avantage d'être plus facile à utiliser que la méthode produit. Cela étant dit, nous nous limiterons, pour le présent cours, uniquement à la présentation et à l'utilisation de la méthode directe.

En effet, cette méthode directe consiste à calculer l'intégrale sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  en  $r$  points d'intégration de coordonnées  $(\xi_i, \eta_i)$ . tels que :

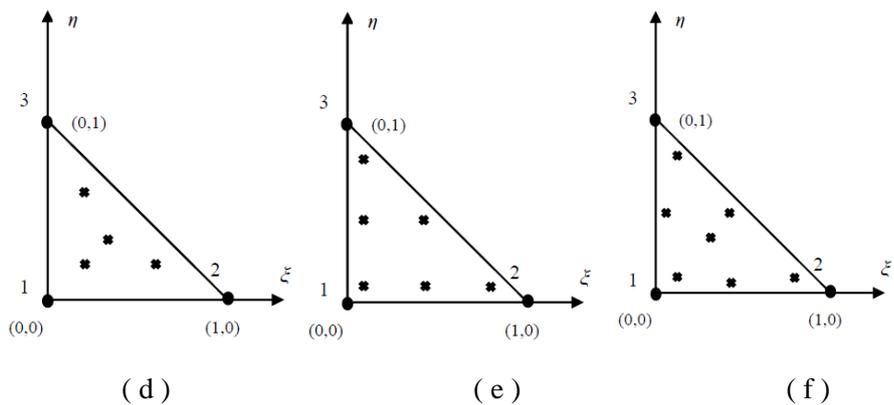
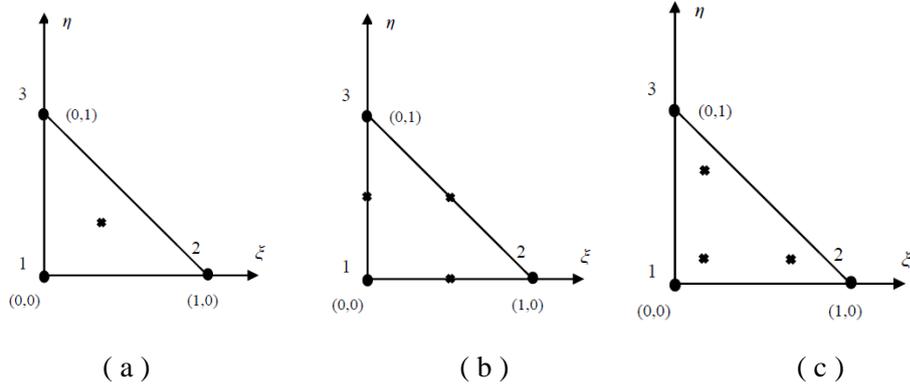
$$\int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta). d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^r w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \quad (18)$$

$r$  : étant le nombre de points d'intégration utilisés dans le schéma d'intégration adopté.

Les valeurs  $(\xi_i, \eta_i)$   $i = 1, r$  représentant les coordonnées de ces  $r$  points d'intégration dans l'élément de référence ainsi que les valeurs des coefficients poids  $w_i$  à affecter à chaque point d'intégration sont données par les tableaux 02 et 03 respectivement pour les éléments triangulaires et quadrangulaires ainsi que sur les tables d'intégration données en annexe. Quant aux schémas d'intégration, ils sont donnés en figures 03 et 04.

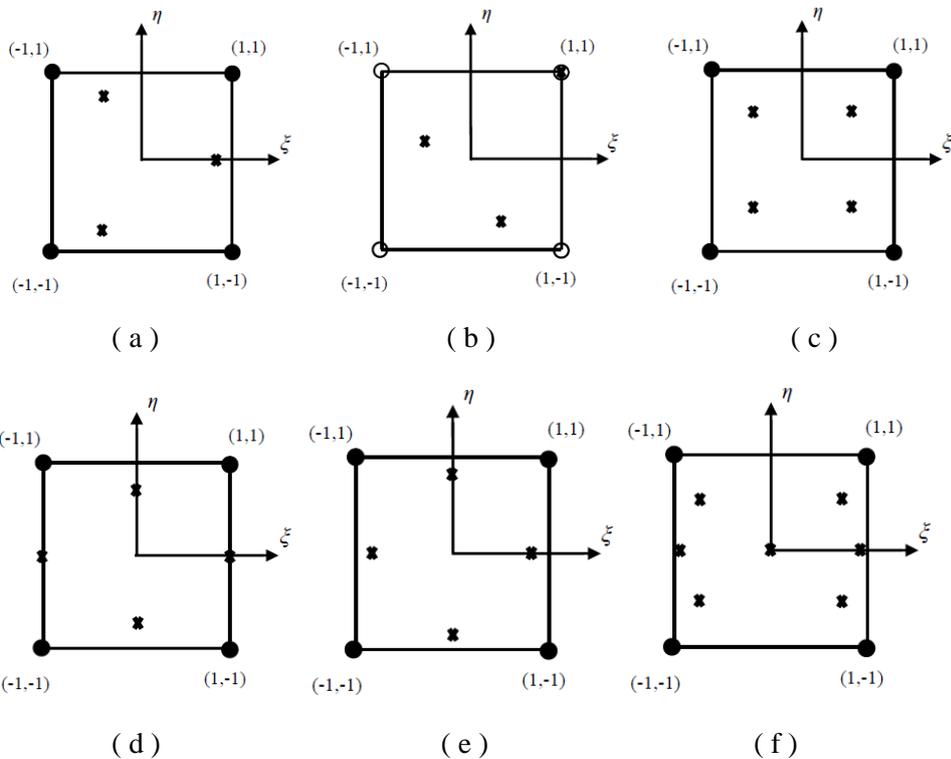
$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	$m$
$r=1$ (figure 3-a)	1 / 3	1 / 3	1/2	1
$r=3$ (figure 3-b)	1/2	1/2	1/6	2
	0	1/2	1/6	
$r=3$ (figure 3-c)	1/2	0	1/6	2
	1/6	1/6	1/6	
$r=3$ (figure 3-c)	2/3	1/6	1/6	2
	1/6	2/3	1/6	
$r=4$ (figure 3-d)	1/3	1/3	-27/96	3
	1/5	1/5	25/96	
	3/5	1/5	25/96	
	1/5	3/5	25/96	
$r=6$ (figure 3-e)	0,44594 84909 15965	0,44594 84909 15965	0,11169 07948 39005	4
	0,10810 30181 68070	0,44594 84909 15965	0,11169 07948 39005	
	0,44594 84909 15965	0,10810 30181 68070	0,11169 07948 39005	
	0,09157 62135 09771	0,09157 62135 09771	0,05497 58718 27661	
	0,81684 75729 80458	0,09157 62135 09771	0,05497 58718 27661	
	0,09157 62135 09771	0,81684 75729 80458	0,05497 58718 27661	
$r=7$ (figure 3-f)	1/3	1/3	9/80	5
	0,47014 20641 05115	0,47014 20641 05115	0,06619 70763 94253	
	0,05971 58717 89770	0,47014 20641 05115	0,06619 70763 94253	
	0,47014 20641 05115	0,05971 58717 89774	0,06619 70763 94253	
	0,10128 65073 23456	0,10128 65073 23456	0,06296 95902 72413	
	0,79742 69853 53088	0,10128 65073 23456	0,06296 95902 72413	
	0,10128 65073 23456	0,79742 69853 53088	0,06296 95902 72.413	

Tableau 02 : tables d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour l'élément TRI3



Légende : \* points de Gauss • nœuds de l'élément de référence

Figure 03 : Schémas d'intégration correspondants au tableau 02 ci-dessus



Légende : \* points de Gauss • nœuds de l'élément de référence

Figure 04 : Schémas d'intégration correspondants au tableau 03 ci-dessus

$r$	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$	$m$
$r=3$ (figure 04-a)	$\sqrt{2/3}$	0	4/3	2
	$-1/\sqrt{6}$	$-1/\sqrt{2}$	4/3	
	$-1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	4/3	
$r=3$ (figure 04-b)	1	1	4/7	2
	-5/9	2/9	27/14	
	1/3	-2/3	3/2	
$r=4$ (figure 04-c)	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	3
	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1	
	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	
	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1	
$r=4$ (figure 04-d)	-1	0	2/3	3
	1	0	2/3	
	0	$-1/\sqrt{2}$	4/3	
	0	$1/\sqrt{2}$	4/3	
$r=4$ (figure 04-e)	$\sqrt{2/3}$	0	1	3
	$-\sqrt{2/3}$	0	1	
	0	$\sqrt{2/3}$	1	
	0	$-\sqrt{2/3}$	1	
$r=7$ (figure 04-f)	0	0	8/7	5
	0	$\sqrt{14/15}$	20/63	
	0	$-\sqrt{14/15}$	20/63	
	$\sqrt{3/5}$	$-1/\sqrt{3}$	20/36	
	$-\sqrt{3/5}$	$-1/\sqrt{3}$	20/36	
	$-\sqrt{3/5}$	$1/\sqrt{3}$	20/36	
	$\sqrt{3/5}$	$1/\sqrt{3}$	20/36	

Tableau 03 : tables d'intégration numérique de Gauss-Legendre pour l'élément QUA4

Par ailleurs, soit  $m$  l'ordre du schéma d'intégration adopté dont la valeur est affichée dans les dernières colonnes des tableaux 02 et 03 ci-dessus. Soit  $(\xi^i \cdot \eta^j)$  le monôme le plus élevé du polynôme à intégrer. Ce schéma d'intégration adopté d'ordre  $m$  est exact, si  $m$  est supérieur ou égal au degré de  $(\xi^i \cdot \eta^j)$ . Autrement dit, pour que les calculs utilisant la méthode de quadrature soient exacts il faut que :

$$m \geq i + j \quad (19)$$

A titre d'exemple, soit un polynôme à intégrer de degré 3 tel que le monôme de degré le plus élevé soit égal à  $(\xi^2 \cdot \eta^1)$ . En appliquant la condition précédente (19), l'ordre du schéma d'intégration aura la valeur minimale suivante :

$$m \geq i + j \Rightarrow m \geq 2 + 1 = 3 \Rightarrow m \geq 3$$

Par la suite, si nous intégrons sur un élément de forme triangulaire, l'utilisation du tableau 02 ci-dessus donnera, pour un schéma d'intégration d'ordre  $m = 3$ , un nombre minimal de points de Gauss égal à quatre donc  $r \geq 4$  dont les schémas d'intégrations correspondants sont en figures 3-d, 3-e et 3-f. De la même manière, si nous intégrons sur un élément de forme quadrangulaire (dont l'élément de référence est de forme carrée), l'utilisation du tableau 03 ci-dessus, donnera, pour un schéma d'intégration d'ordre  $m = 3$ , un nombre minimal de points de Gauss égal à quatre donc  $r \geq 4$  dont les schémas d'intégrations correspondants sont en figures 4-c, 4-d, 4-e et 4-f.

### **Exemple 03 : Schémas d'intégration et précision des calculs de la méthode de quadrature**

Calculer les valeurs exactes des intégrales suivantes  $I_1$  et  $I_2$  respectivement sur un triangle de référence et un carré de référence.

$$I_1 = \iint_{triangle_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta \quad \text{et} \quad I_2 = \iint_{carré_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

#### **Solution :**

Le degré du polynôme à intégrer étant égal à  $i + j = 1 + 1 = 2$ . Par conséquent, pour avoir une intégration exacte, l'ordre du schéma d'intégration doit avoir pour valeur minimale  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ .

a-) Pour le calcul de  $I_1$  sur le triangle de référence, on adopte la valeur minimale de  $m$  comme ordre du schéma d'intégration donc on prend  $m = 2$ .

$$I_1 = \iint_{triangle_{ref}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

D'après le tableau 02 précédent, pour  $m = 2$  on a la possibilité de choisir entre deux schémas d'intégration différents mais utilisant trois ( $r=3$ ) points de Gauss chacun. Ces schémas sont illustrés dans les figures 03-b et 03-c. Nous choisissons le schéma de la figure 03-c qui est très utilisé par les logiciels de calcul EF.

Ainsi en adoptant ce schéma d'intégration à trois points de Gauss ( $r=3$ ), il s'agit de calculer l'intégrale de la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  définie sur le triangle de référence telle que  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ :

$$I_1 = \iint_{triangle_{ref}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3)$$

La lecture du tableau 02 pour ce schéma d'intégration donne pour :

le premier point de Gauss les coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{6}$  et un coefficient poids  $w_1 = \frac{1}{6}$

le second point de Gauss les coordonnées  $\xi_2 = \frac{2}{3}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{6}$  et un coefficient poids  $w_2 = \frac{1}{6}$

le troisième point de Gauss les coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{6}$  et  $\eta_3 = \frac{2}{3}$  et un coefficient poids  $w_3 = \frac{1}{6}$

Ainsi :

$$I_1 = w_1 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \xi_3 \cdot \eta_3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$$

$$I_1 = \frac{1}{24}$$

b-) Calcul de sur le carré de référence : Pour le calcul de  $I_2$  sur le carré de référence, on adopte une valeur de  $m = 3$  comme ordre du schéma d'intégration.

$$I_2 = \iint_{\text{carré}_{\text{réf}}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta$$

D'après le tableau 03 précédent, pour  $m = 3$  on a la possibilité de choisir entre trois schémas d'intégration différents mais utilisant quatre ( $r=4$ ) points de Gauss chacun. Ces schémas sont illustrés dans les figures 04-c, 04-d et 04-e. Nous choisissons le schéma de la figure 04-c qui est également très utilisé par les logiciels de calcul EF.

Ainsi en adoptant ce schéma d'intégration à quatre points de Gauss ( $r=4$ ), il s'agit de calculer l'intégrale de la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  définie sur le carré de référence telle que  $\varphi(\xi, \eta) = \xi \cdot \eta$ :

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\text{carré}_{\text{réf}}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta \\ &= \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4 \cdot \varphi(\xi_4, \eta_4) \end{aligned}$$

La lecture du tableau 03 pour ce schéma d'intégration donne pour :

le premier point de Gauss les coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_1 = 1$

le second point de Gauss les coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_2 = 1$

le troisième point de Gauss les coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_3 = 1$

le quatrième point de Gauss les coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_4 = 1$

Ainsi :

$$\begin{aligned} I_2 &= w_1 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \xi_3 \cdot \eta_3 + w_4 \cdot \xi_4 \cdot \eta_4 \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

$$I_2 = 0$$

**Exemple 04 : Intégration sur un maillage 2D composé de deux éléments finis triangulaires TRI3**

Reprendre le même maillage que celui de l'exemple 07 du chapitre 05 précédent en supposant que ce maillage est celui de la section transversale d'extrémité d'une barre en acier. Cette section transversale est donc de forme rectangulaire, de 20 cm de largeur et de 10 cm de hauteur (figure 05). Ce maillage étant composé de deux éléments finis triangulaires de type TRI3, les coordonnées des nœuds sont les suivants Nœud 1 (0,0) ; Nœud 2 (20,0) ; Nœud 3 (20,10) et le Nœud 4 (0,10). Après avoir été chauffée dans un four, quatre mesures de température ont été effectuées simultanément au niveau de ces nœuds. Ces mesures sont les mêmes que celles de l'exemple cité précédemment. Elles sont comme suit :  $T_1=150^\circ\text{C}$ ,  $T_2=200^\circ\text{C}$ ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ . L'expression mathématique approchée  $T(x,y)$  du champ de température en tout point de cette section (voir solution de l'exemple 07 chapitre 05) est comme suit :

$$T(x,y) = \begin{cases} T_1(x,y) = (150 + 2.5x + 10y) & \text{sur l'élément 1} \\ T_2(x,y) = (350 - 7.5x - 10y) & \text{sur l'élément 2} \end{cases}$$

En utilisant l'élément de référence, il est demandé de calculer numériquement les trois intégrales ci-dessous  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_{XY}$  qui représentent respectivement les trois moments d'inertie de cette section d'aire  $A$  par rapport aux axes  $X$ ,  $Y$  et à l'origine du repère 1, tels que :

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy \quad I_Y = \iint_A x^2 dx. dy \quad I_{XY} = \iint_A x.y. dx. dy$$

En utilisant l'expression  $T(x,y)$  citée plus haut, calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. dy$$

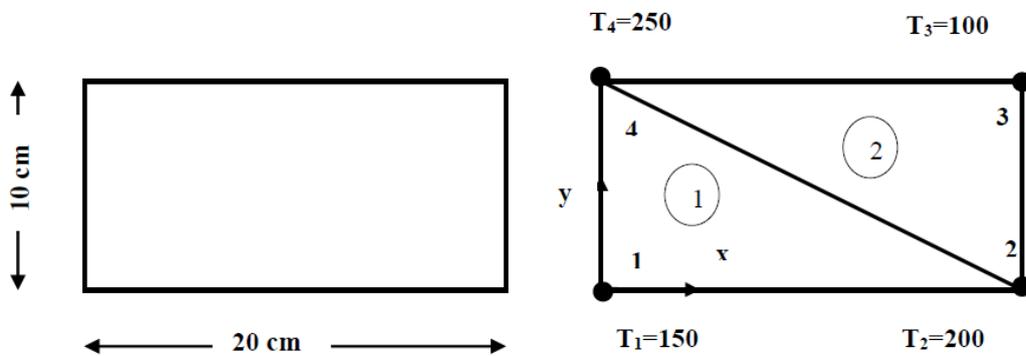


Figure 05 : section transversale d'extrémité (à gauche) et son maillage EF à 2 éléments de type TRI3 (à droite).

**Solution :**

Puisque notre section a été maillée par deux éléments 1 et 2, nos intégrales seront donc égales à la somme des deux intégrales sur les deux aires  $A_1$  et  $A_2$  des deux éléments 1 et 2 respectivement avec  $A = A_1 + A_2$  telles que :

$$I_X = \iint_{(A_1+A_2)} y^2 dx. dy = \iint_{A_1} y^2 dx. dy + \iint_{A_2} y^2 dx. dy = I_{X_1} + I_{X_2}$$

$$I_Y = \iint_{(A_1+A_2)} x^2 dx. dy = \iint_{A_1} x^2 dx. dy + \iint_{A_2} x^2 dx. dy = I_{Y_1} + I_{Y_2}$$

$$I_{XY} = \iint_{(A_1+A_2)} x. y. dx. dy = \iint_{A_1} x. y. dx. dy + \iint_{A_2} x. y. dx. dy = I_{XY_1} + I_{XY_2}$$

**Calcul des termes intégraux  $I_{X_1}$ ,  $I_{Y_1}$  et  $I_{XY_1}$  sur l'élément 1 :**

Soit donc l'élément 1 du maillage et son élément de référence associé tel que représenté en figure 06 ci-dessous.

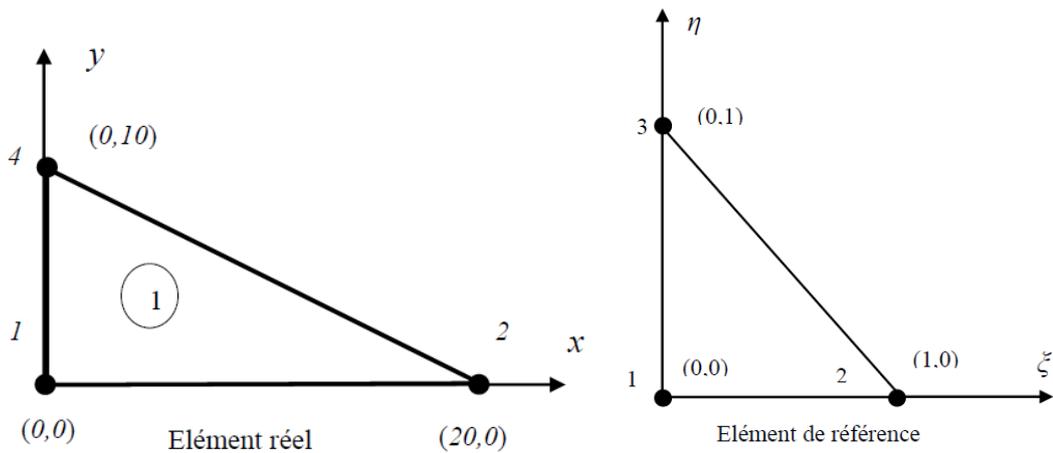


Figure 06 : Représentation de l'élément triangulaire 1 et de son élément de référence associé

La relation entre l'élément 1 et l'élément de référence étant telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on a obtenu (voir solution de l'exemple 07 chapitre précédent 05):

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20\xi \\ y(\xi, \eta) = 10\eta \end{cases}$$

On substitue les deux expressions précédentes dans celles des termes  $I_{X_1}$ ,  $I_{Y_1}$  et  $I_{XY_1}$  telles que :

$$I_{X_1} = \iint_{A_1} y^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} y(\xi, \eta)^2. \det[J_1]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} (10\eta)^2. \det[J_1]. d\xi. d\eta$$

$$I_{Y_1} = \iint_{A_1} x^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta)^2. \det[J_1]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} (20\xi)^2. \det[J_1]. d\xi. d\eta$$

$$I_{XY_1} = \iint_{A_1} x.y. dx. dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta).y(\xi, \eta). \det[J_1]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} 200. \xi. \eta. \det[J_1]. d\xi. d\eta$$

Pour l'élément 01 (voir solution de l'exemple 10 chapitre 05), la matrice  $[J_1]$  est comme suit :

$$[J_1] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{41} & y_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 0) & (0 - 0) \\ (0 - 0) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J_1] = 20 \times 10 = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 01}$$

Donc

$$I_{X_1} = 100. \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \eta^2. d\xi. d\eta = 2. 10^4. \iint_{A_{réf}} \eta^2. d\xi. d\eta$$

$$I_{Y_1} = 400. \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \xi^2. d\xi. d\eta = 8. 10^4. \iint_{A_{réf}} \xi^2. d\xi. d\eta$$

$$I_{XY_1} = 200. \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \xi. \eta. d\xi. d\eta = 4. 10^4. \iint_{A_{réf}} \xi. \eta. d\xi. d\eta$$

Pour calculer les termes  $\iint_{A_{réf}} \eta^2. d\xi. d\eta$ ,  $\iint_{A_{réf}} \xi^2. d\xi. d\eta$  et  $\iint_{A_{réf}} \xi. \eta. d\xi. d\eta$ , on applique la méthode de Gauss-Legendre aux trois fonctions polynomiales  $\eta^2$ ,  $\xi^2$  et  $\xi. \eta$  qui sont toutes les trois de degré 02 de la forme  $\varphi(\xi, \eta) = \xi^i. \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur minimale pour  $m$  donc  $m=2$ , et en choisissant le schéma d'intégration à  $r=3$  points de gauss de la figure 03-c qui est reproduite ci-dessous, on peut calculer les intégrales ci-dessus telle que la lecture du tableau 02 pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

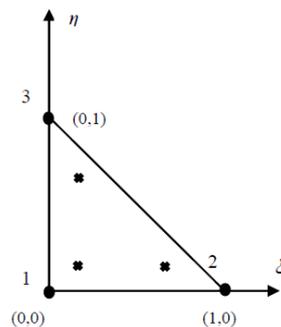
$$\iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta). d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1. \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2. \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3. \varphi(\xi_3, \eta_3)$$

Et tels que :

le premier point de Gauss de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{6}$  aie un coefficient poids  $w_1 = \frac{1}{6}$

le second point de Gauss de coordonnées  $\xi_2 = \frac{2}{3}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{6}$  aie un coefficient poids  $w_2 = \frac{1}{6}$

le troisième point de Gauss de coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{6}$  et  $\eta_3 = \frac{2}{3}$  aie un coefficient poids  $w_3 = \frac{1}{6}$



Ainsi :

$$\iint_{A_{réf}} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \eta_1^2 + w_2 \cdot \eta_2^2 + w_3 \cdot \eta_3^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$\iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \xi_1^2 + w_2 \cdot \xi_2^2 + w_3 \cdot \xi_3^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \xi_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \xi_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \xi_3 \cdot \eta_3 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Finalement :

$$I_{X_1} = 2 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_1} \eta^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{12} = 1666,66 \text{ cm}^2$$

$$I_{Y_1} = 8 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} \xi^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{12} = 6666,66 \text{ cm}^2$$

$$I_{XY_1} = 200 \cdot \det[J_1] \iint_{A_{réf}} \xi \cdot \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{24} = 1666,66 \text{ cm}^2$$

**Calcul des termes intégraux  $I_{X_2}$ ,  $I_{Y_2}$  et  $I_{XY_2}$  sur l'élément 2 :**

Soit donc l'élément 2 du maillage et son élément de référence associé tel que représenté en figure 07 ci-dessous.

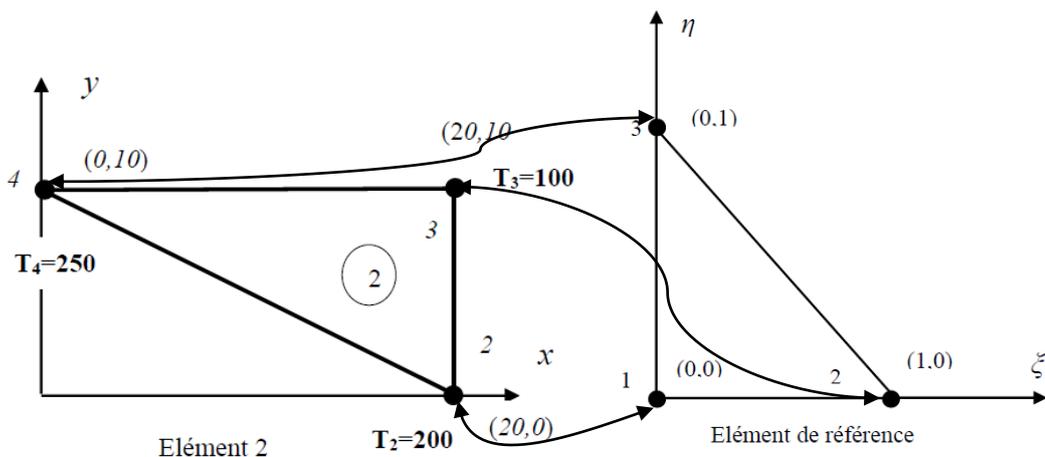


Figure 07 : Représentation de l'élément triangulaire 2 et de son élément de référence associé

La relation entre l'élément 2 et l'élément de référence étant telle que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) & \xi & \eta \rangle \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on obtient :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 20(1 - \eta) \\ y(\xi, \eta) = 10(\xi + \eta) \end{cases}$$

On substitue les deux expressions précédentes dans celles des termes  $I_{X_2}$ ,  $I_{Y_2}$  et  $I_{XY_2}$  telles que :

$$I_{X_2} = \iint_{A_2} y^2 dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} y(\xi, \eta)^2 \cdot \det[J_2] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} (10(\xi + \eta))^2 \cdot \det[J_2] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{Y_2} = \iint_{A_2} x^2 dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta)^2 \cdot \det[J_2] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} (20(1 - \eta))^2 \cdot \det[J_2] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$\begin{aligned} I_{XY_2} &= \iint_{A_2} x \cdot y \cdot dx \cdot dy \\ &= \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta) \cdot y(\xi, \eta) \cdot \det[J_2] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} 200 \cdot (\xi + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot \det[J_2] \cdot d\xi \cdot d\eta \end{aligned}$$

Pour l'élément 02 (voir solution de l'exemple 10 chapitre 05), la matrice  $[J_2]$  est comme suit :

$$[J_2] = \begin{bmatrix} x_{32} & y_{32} \\ x_{42} & y_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) & (y_3 - y_2) \\ (x_4 - x_2) & (y_4 - y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 - 20) & (10 - 0) \\ (0 - 20) & (10 - 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -20 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\det[J_2] = -(-20 \times 10) = 200 \text{ cm}^2 = 2 \times \text{aire du triangle 02}$$

Donc

$$I_{X_2} = 100 \cdot \det[J_2] \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 2 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{Y_2} = 400 \cdot \det[J_2] \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 8 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{XY_2} = 200 \cdot \det[J_2] \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = 4 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta - \xi\eta - \eta^2) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Pour calculer les termes intégraux précédents  $\iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$ ,  $\iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$  et  $\iint_{A_{réf}} (\xi + \eta - \xi\eta - \eta^2) \cdot d\xi \cdot d\eta$  on doit utiliser la méthode de Gauss-Legendre aux trois fonctions polynomiales précédentes qui sont toutes les trois de degré 02 dont le monôme le plus élevé est de la forme  $\xi^i \cdot \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Ainsi, pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur minimale

pour m donc  $m=2$ , et en choisissant le même schéma d'intégration à  $r=3$  points de gauss que celui du calcul effectué sur l'élément 01, on peut calculer les intégrales ci-dessus telle que

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot (\xi_1 + \eta_1)^2 + w_2 \cdot (\xi_2 + \eta_2)^2 + w_3 \cdot (\xi_3 + \eta_3)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot (1 - \eta_1)^2 + w_2 \cdot (1 - \eta_2)^2 + w_3 \cdot (1 - \eta_3)^2 \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1 \cdot (\xi_1 + \eta_1) \cdot (1 - \eta_1) + w_2 \cdot (\xi_2 + \eta_2) \cdot (1 - \eta_2) + w_3 \cdot (\xi_3 + \eta_3) \cdot (1 - \eta_3) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$I_{X_2} = 2 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 2 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{4} = 5000 \text{ cm}^2$$

$$I_{Y_2} = 8 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (1 - \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 8 \cdot 10^4 \cdot \frac{1}{4} = 20000 \text{ cm}^2$$

$$I_{XY_2} = 4 \cdot 10^4 \cdot \iint_{A_{réf}} (\xi + \eta) \cdot (1 - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = 4 \cdot 10^4 \cdot \frac{5}{24} = 8333.33 \text{ cm}^2$$

Finalement :

$$I_X = I_{X_1} + I_{X_2} = 1666,66 + 5000 = 6666,67 \text{ cm}^2$$

$$I_Y = I_{Y_1} + I_{Y_2} = 6666,66 + 20000 = 26666,67 \text{ cm}^2$$

$$I_{XY} = I_{XY_1} + I_{XY_2} = 1666,66 + 8333,34 = 10000 \text{ cm}^2$$

En utilisant les expressions trouvées dans l'exemple 07 du chapitre 05, telles que :

$$T(x, y) = \begin{cases} T_1(x, y) = (150 + 2.5x + 10y) & \text{sur l'élément réel 1} \\ T_2(x, y) = (350 - 7.5x - 10y) & \text{sur l'élément réel 2} \end{cases}$$

Calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. dy$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x} = 2.5 & \text{dans l'élément 01} \\ \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial x} = -7.5 & \text{dans l'élément 02} \end{cases}$$

$$I_2 = \iint_{A_1} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. dy = \iint_{A_1} \left( \frac{\partial T_1(x, y)}{\partial x} \right)^2 dx. dy + \iint_{A_2} \left( \frac{\partial T_2(x, y)}{\partial x} \right)^2 dx. dy$$

$$I_2 = \iint_{A_1} 6.25 dx. dy + \iint_{A_2} 56.25 dx. dy = 6.25 \cdot \det[J_1] \cdot \iint_{A_{réf}} d\xi. d\eta + 56.25 \cdot \det[J_2] \cdot \iint_{A_{réf}} d\xi. d\eta$$

$$\text{Or } \iint_{A_{réf}} d\xi. d\eta = \text{aire de l'élément de référence} = 0.5 \text{ cm}^2$$

Nota : ce résultat peut également être retrouvé en appliquant la méthode de Gauss-Legendre. En effet, si on adopte le même schéma d'intégration à trois points que celui utilisé précédemment, on peut écrire :

$$\iint_{A_{réf}} d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + w_3 \cdot 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$I_2 = 6.25 \det[J_1] \cdot \left( \frac{1}{2} \right) + 56.25 \cdot \det[J_2] \cdot \left( \frac{1}{2} \right) = 625 + 5625 = 6250$$

### **Exemple 05: Intégration numérique sur un maillage 2D composé d'un élément quadrangulaire QUA4**

Reprendre le même exemple de section rectangulaire que celui de l'exemple précédent en supposant que cette fois que cette section a été maillée avec un seul élément quadrangulaire à quatre nœuds de type QUA4. Soit donc l'élément 1 du maillage de type QUA4 et son élément de référence tel que représenté en figure 08 ci-dessous. Cet élément 1 est constitué des nœuds : 1, 2, 3 et 4. A cet élément, on associe un élément de référence tout en faisant correspondre les nœuds de manière « respective » c'est-à-dire le nœud 1 de l'élément réel est relié au nœud 1 de l'élément de référence. Donc ce dernier portera la même valeur de la température  $T_1=150^\circ\text{C}$ . De la même façon, les nœuds 2, 3 et 4 de l'élément de référence étant respectivement reliés aux nœuds 2, 3 et 4 de l'élément réel et ils porteront donc les mêmes valeurs de la température à savoir :  $T_2=200^\circ\text{C}$  ,  $T_3=100^\circ\text{C}$  et  $T_4=250^\circ\text{C}$ .

En utilisant cet élément de référence, il est demandé de calculer numériquement les trois intégrales ci-dessous  $I_X$ ,  $I_Y$  et  $I_{XY}$  qui représentent respectivement les trois moments d'inertie de cette section d'aire A par rapport aux axes X, Y et à l'origine du repère 1, tels que :

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy \quad I_Y = \iint_A x^2 dx. dy \quad I_{XY} = \iint_A x. y. dx. dy$$

En utilisant l'expression T(x,y) citée plus haut, calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 dx. dy$$

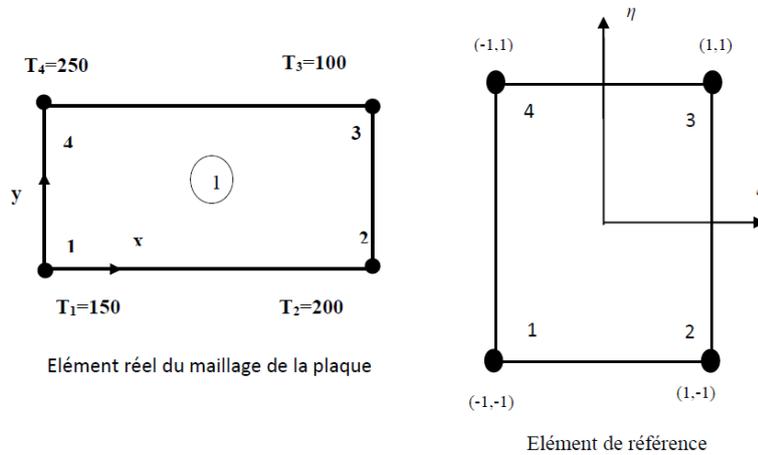


Figure 08 : Représentation de l'élément quadrangulaire 1 et de son élément de référence associé

**Solution :**

Soit donc à calculer les quantités

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy$$

$$I_Y = \iint_A x^2 dx. dy$$

$$I_{XY} = \iint_A x. y. dx. dy$$

Soit donc l'élément unique noté 1 du maillage et son élément de référence associé tel que représenté en figure 08 ci-dessus. Les relations entre ces deux éléments étant telles que :

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}((1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta)) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ y(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) & N_2(\xi, \eta) & N_3(\xi, \eta) & N_4(\xi, \eta) \rangle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}((1-\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1-\eta) & (1+\xi)(1+\eta) & (1-\xi)(1+\eta)) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Après développement, on a obtenu (voir solution de l'exemple 08 chapitre précédent 05):

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10 + 10\xi = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

On substitue les deux expressions précédentes dans celles de \$I\_X\$, \$I\_Y\$ et \$I\_{XY}\$ telles que :

$$I_X = \iint_A y^2 dx. dy = \iint_{A_{réf}} y(\xi, \eta)^2. \det[J]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} 25. (1 + \eta)^2. \det[J]. d\xi. d\eta$$

$$I_Y = \iint_A x^2 dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta)^2 \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} 100 \cdot (1 + \xi)^2 \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{XY} = \iint_A x \cdot y \cdot dx \cdot dy = \iint_{A_{réf}} x(\xi, \eta) \cdot y(\xi, \eta) \cdot \det[J_1] \cdot d\xi \cdot d\eta = \iint_{A_{réf}} 50 \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Comme déjà vu dans l'exemple 11 du chapitre 05, pour l'élément QUA4 défini en 2D, la matrice Jacobienne est comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Or les relations  $x(\xi, \eta)$  et  $y(\xi, \eta)$  sont déjà connues telles que :

$$\frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 10 \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0 \quad \frac{\partial x(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial y(\xi, \eta)}{\partial \eta} = 5$$

Ainsi, la matrice  $[J]$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Et le déterminant  $\det[J] = 50$

Donc

$$I_X = 25 \cdot \det[J] \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 1250 \cdot \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_Y = 100 \cdot \det[J] \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = 5000 \cdot \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$$

$$I_{XY} = 50 \cdot \det[J] \iint_{A_{réf}} (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = 2500 \cdot \iint_{A_{réf}} (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Pour calculer les termes

$\iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$ ,  $\iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2 \cdot d\xi \cdot d\eta$  et  $\iint_{A_{réf}} (1 + \xi) \cdot (1 + \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta$ , on applique la méthode de Gauss-Legendre à ces trois fonctions polynomiales qui sont toutes les trois de degré 02 tel que le monôme le plus élevé est de la forme  $\xi^i \cdot \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i + j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur pour  $m$  vérifiant la condition précédente et telle que  $m=3$ , et en choisissant le schéma d'intégration à  $r=4$  points de Gauss de la figure 04-c qui est reproduite ci-dessous, on peut calculer les intégrales ci-dessus telle que la lecture du tableau 03 pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

$$\iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta). d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4 \cdot \varphi(\xi_4, \eta_4)$$

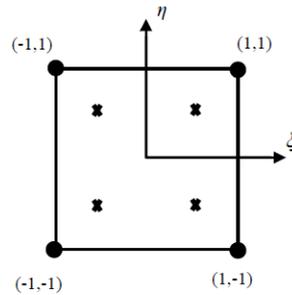
Et tels que :

le premier point de Gauss de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_1 = 1$

le second point de Gauss de coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_2 = 1$

le troisième point de Gauss de coordonnées  $\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_3 = 1$

le quatrième point de Gauss de coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_4 = 1$



Ainsi :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1 \cdot (1 + \eta_1)^2 + w_2 \cdot (1 + \eta_2)^2 + w_3 \cdot (1 + \eta_3)^2 + w_4 \cdot (1 + \eta_4)^2 \end{aligned}$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta = 1 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 5.3333$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1 \cdot (1 + \xi_1)^2 + w_2 \cdot (1 + \xi_2)^2 + w_3 \cdot (1 + \xi_3)^2 + w_4 \cdot (1 + \xi_4)^2 \end{aligned}$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta = 1 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{3}})^2 + 1 \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}})^2 = 5.3333$$

$$\begin{aligned} \iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta &= \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) \\ &= w_1 \cdot (1 + \xi_1)(1 + \eta_1) + w_2 \cdot (1 + \xi_2)(1 + \eta_2) + w_3 \cdot (1 + \xi_3)(1 + \eta_3) \\ &\quad + w_4 \cdot (1 + \xi_4)(1 + \eta_4) \end{aligned}$$

$$= 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1. \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1. \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ = 4$$

Finalemment :

$$I_X = 1250. \iint_{A_{réf}} (1 + \eta)^2. d\xi. d\eta = 1250 * 5.333 = 6666.625 \text{ cm}^4$$

$$I_Y = 5000. \iint_{A_{réf}} (1 + \xi)^2. d\xi. d\eta = 26666.67 \text{ cm}^4$$

$$I_{XY} = 2500. \iint_{A_{réf}} (1 + \xi). (1 + \eta). d\xi. d\eta = 2500 * 4 = 10000 \text{ cm}^4$$

On retrouve ainsi les mêmes valeurs de résultats que celles obtenues dans l'exemple 04 précédent avec l'intégration sur deux éléments de type TRI3.

En utilisant l'expression de la distribution de la température trouvée dans l'exemple 08 du chapitre 05, telle que :

$$T(x, y) = 150 + 2.5x + 10y - xy$$

Calculer la valeur de l'intégrale suivante

$$I_2 = \iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx. dy$$

$$\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = 2.5 - y$$

$$I_2 = \iint_A \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dx. dy = \iint_A (2.5 - y)^2 dx. dy$$

Or on sait que  $y(\xi, \eta) = 5 + 5\eta$

$$\Rightarrow I_2 = \iint_{A_{réf}} (2.5 - y(\xi, \eta))^2. \det[J]. d\xi. d\eta = \iint_{A_{réf}} (2.5 + 5\eta)^2. \det[J]. d\xi. d\eta$$

Or  $\det[J] = 50$  (voir plus haut)

Donc

$$I_2 = 50 \iint_{A_{réf}} (2.5 + 5\eta)^2. d\xi. d\eta = 50 \iint_{A_{réf}} 2.5^2 (1 + 2\eta)^2. d\xi. d\eta = 312.5 \iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2. d\xi. d\eta$$

Pour calculer les termes  $\iint_{A_{réf}} (1 + 2\eta)^2. d\xi. d\eta$ , on applique la méthode de Gauss-Legendre à cette fonction polynomiale qui est du degré 02 puisque le monôme le plus élevé est de la forme  $(4. \xi^i. \eta^j) = 4. \xi^0. \eta^2$  avec  $i + j = 0 + 2 = 2$ . Ainsi, pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma

d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i+j$  donc  $m \geq 2$ . En effet, en adoptant une valeur pour  $m$  vérifiant la condition précédente et telle que  $m=3$ , et en choisissant le schéma d'intégration à  $r=4$  points de Gauss de la figure 04-c qui est reproduite ci-dessus, on peut calculer l'intégrale ci-dessus telle que la lecture du tableau 03 pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

$$\iint_{A_{ref}} \varphi(\xi, \eta). d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1. \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2. \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3. \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4. \varphi(\xi_4, \eta_4)$$

Et tels que :

le premier point de Gauss de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_1 = 1$

le second point de Gauss de coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_2 = 1$

le troisième point de Gauss de coordonnées  $\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_3 = 1$

le quatrième point de Gauss de coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  aie un coefficient poids  $w_4 = 1$

Ainsi :

$$\iint_{A_{ref}} (1 + 2\eta)^2. d\xi. d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i. \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1. (1 + 2\eta_1)^2 + w_2. (1 + 2\eta_2)^2 + w_3. (1 + 2\eta_3)^2 + w_4. (1 + 2\eta_4)^2$$

$$\iint_{A_{ref}} (1 + 2\eta)^2. d\xi. d\eta = 1. (1 - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 + 1. (1 - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 + 1. (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 + 1. (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = 4.67$$

$$I_2 = 312.5 \iint_{A_{ref}} (1 + 2\eta)^2. d\xi. d\eta = 312.5 * 4.67 = 1459.37$$

#### 4. Calcul d'intégrales sur des éléments 3D à trois dimensions

Soit à calculer l'intégrale de la fonction à trois variables  $F(x, y, z)$  définie dans l'élément réel tridimensionnel  $V$  du maillage appartenant à l'espace basé sur les coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . En utilisant l'élément de référence noté  $V_{ref}$  défini dans l'espace de coordonnées paramétriques également à trois dimensions  $(\xi, \eta, \zeta)$ , cette fonction  $F(x, y, z)$  se transforme en une fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  définie dans l'élément de référence  $V_{ref}$  telle que :

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \quad (01)$$

Comme déjà vu depuis le début de ce chapitre cette transformation du calcul intégral, utilisant le déterminant de la matrice Jacobienne  $det[J]$ , est effectuée de la manière suivante :

$$\int_V F(x, y, z). dx. dy. dz = \int_{V_{ref}} F(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \quad (02)$$

$$= \int_{V_{ref}} \varphi(\xi, \eta, \zeta). det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta$$

Il s'agit donc d'intégrer la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence  $V_{ref}$ . On déduit également de l'équation (02), la relation suivante entre éléments différentiels :

$$dx. dy. dz = det[J]. d\xi. d\eta. d\zeta \quad (03)$$

Par ailleurs, la méthode utilisée pour l'intégration de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  dans l'élément de référence est basée sur le principe de quadrature de Gauss-Legendre. Ce principe consiste à calculer les intégrales sous la forme d'une somme pondérée de valeurs de la fonction  $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$  en certains points de l'élément de référence appelés « points d'intégration » ou points de Gauss. Les coordonnées de ces points de Gauss ainsi que les coefficients poids relatifs à chaque point de Gauss sont donnés dans les tables en annexe.