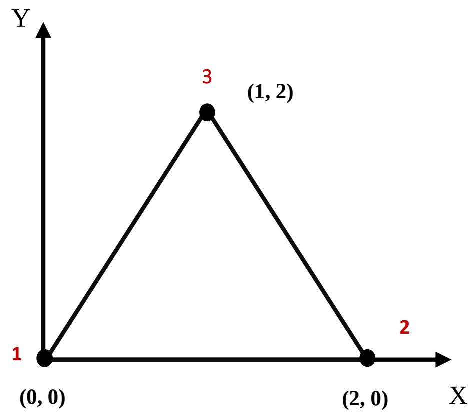
CORRIGES SERIE N°04 : Techniques d'intégration numérique en EF

Solution de l'exercice 01:



Calculons l'intégrale I :

$$I = \iint_T x^2 dx.dy = \iint_{A_{réf}} x^2(\xi,\eta)(\det J)\, d\xi\, .d\eta$$

Avec

$$x(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)x_1 + \xi x_2 + \eta x_3$$

Telles que :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2 \quad \text{et} \quad x_3 = 1$$

$$\Rightarrow x(\xi,\eta) = (1-\xi-\eta)0 + 2\xi + 1\eta$$

$$\Rightarrow x(\xi,\eta) = 2\xi + \eta$$

$$\Rightarrow x^2(\xi,\eta) = (2\xi+\eta)^2$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \langle \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \rangle \\ \langle \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \left(2\,\frac{\partial N_2}{\partial \xi} + 1\,\frac{\partial N_3}{\partial \xi}\right) & \left(2\,\frac{\partial N_3}{\partial \xi}\right) \\ \left(2\,\frac{\partial N_2}{\partial \eta} + 1\,\frac{\partial N_3}{\partial \eta}\right) & \left(2\,\frac{\partial N_3}{\partial \eta}\right) \end{bmatrix}$$

Or

$$\frac{\partial N_2}{\partial \xi} = 1\,; \qquad \frac{\partial N_2}{\partial \eta} = 0\,; \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = 0\,; \qquad \frac{\partial N_3}{\partial \eta} = 1$$

$$[J] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det\,[J] = 4$$

<u>Seconde méthode</u>

On a vu dans l'exercice précédent que l'intégration d'un $TRI\ 3$ est :

$$[J] = \begin{pmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) \end{pmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} (2-0) & 0 \\ (1-0) & (2-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Il s'agit donc de calculer

$$I = \iint\limits_{Triangle\ de\ référence} (2\xi + \eta)^2\, 4\, d\xi\ d\eta$$

Si on prend un point d'intégration :

$$\xi_i = \tfrac{1}{3}\,; \qquad \eta_i = \tfrac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \omega_i = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ I_1 = \tfrac{1}{2}\left(4\,\left(2\,.\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\right)^2\right) = \tfrac{4}{2} = 2$$ (Solution inexacte)

Pour 03 points d'intégration $\rightarrow\ m = 2$

Donc l'ordre le plus élevé est 2 c'est-à-dire $(4\,\xi^2 + 4\,\xi\,\eta + \eta^2)\ \rightarrow\ m \geq i + j\ \Rightarrow m \geq 2 \Rightarrow$ on doit prendre $m = 2$.

(C'est-à-dire 03 points d'intégration au maximum) avec les : $\omega_i = \frac{1}{6} \rightarrow\ g_1 = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ g_2 = \left(0;\frac{1}{2}\right),$ $g_3 = \left(\frac{1}{2};0\right)$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{6}\left[\left(2\,.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\,.\,0 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\,.\ \frac{1}{2} + 0\right)^2\right]$$

$$= \frac{4}{6}\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2\right] = \frac{4}{6}\left[\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + 1\right]$$

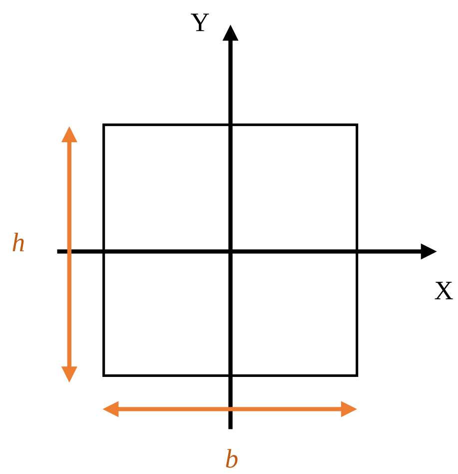
$$= \frac{4}{6}\left(\frac{14}{4}\right) = \frac{14}{6} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{7}{3}$$

$$\boxed{I = \frac{7}{3}}$$

Solution de l'exercice 02:

1/ Calculons numériquement la valeur de l'intégrale $I = \iint_A y^2 dx\, dy$

On a :



On associer à ce quadrangle un élément de référence

$$I = \iint_{carré\ de\ référence} y^2(\xi,\eta) \det[J] d\xi\, d\eta$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \xi} & \frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x(\xi,\eta)}{\partial \eta} & \frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\rangle \\ \langle\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$$

$$[J]=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial \xi}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial \xi}x_4\right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial \xi}y_1+\frac{\partial N_2}{\partial \xi}y_2+\frac{\partial N_3}{\partial \xi}y_3+\frac{\partial N_4}{\partial \xi}y_4\right)\\ \left(\frac{\partial N_1}{\partial \eta}x_1+\frac{\partial N_2}{\partial \eta}x_2+\frac{\partial N_3}{\partial \eta}x_3+\frac{\partial N_4}{\partial \eta}x_4\right) & \left(\frac{\partial N_1}{\partial \eta}y_1+\frac{\partial N_2}{\partial \eta}y_2+\frac{\partial N_3}{\partial \eta}y_3+\frac{\partial N_4}{\partial \eta}y_4\right)\end{bmatrix}$$

Avec

$(x_1,y_1)=\left(-\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right)$; $(x_2,y_2)=\left(+\frac{b}{2},-\frac{h}{2}\right)$; $(x_3,y_3)=\left(+\frac{b}{2},+\frac{h}{2}\right)$; $(x_4,y_4)=\left(-\frac{b}{2},+\frac{h}{2}\right)$

Et on sait que les équations d'interpolation sont :

* $N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$
* $N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$
* $N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$
* $N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$

Donc :

$\Rightarrow \frac{\partial N_1}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(-1+\eta)$; $\frac{\partial N_2}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1-\eta)$; $\frac{\partial N_3}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(1+\eta)$; $\frac{\partial N_4}{\partial \xi}=\frac{1}{4}(-1-\eta)$

Remplaçons ces expressions, on trouve :

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{b}{2} & 0\\ 0 & \frac{h}{2}\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det[J]=\frac{bh}{4}$$

$$y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{4}N_i(\xi,\eta)y_i$$

$$y(\xi,\eta)=\frac{1}{4}\Big[(1-\xi)(1-\eta)\left(-\frac{h}{2}\right)+(1+\xi)(1-\eta)\left(-\frac{h}{2}\right)+(1+\xi)(1+\eta)\left(+\frac{h}{2}\right)+(1-\xi)(1+\eta)\left(+\frac{h}{2}\right)\Big]$$

$$y(\xi,\eta)=\frac{h}{2\times 4}[(1-\xi)(1-\eta)(-1)+(1+\xi)(1-\eta)(-1)+(1+\xi)(1+\eta)+(1-\xi)(1+\eta)$$

$$y(\xi,\eta)=\frac{h}{8}[(\eta-1)[(1-\xi)+(1+\xi)]+(1+\eta)[(1+\xi)+(1-\xi)]]$$

$$\Rightarrow y(\xi,\eta)=\frac{h}{8}\big(2(\eta-1)+2(1+\eta)\big)=\frac{h}{8}(2\eta-2+2+2\eta)$$

$$y(\xi,\eta) = \frac{h}{8} \times 4 \times \eta = \frac{h}{2}\eta$$

$$\Rightarrow \quad y^2(\xi,\eta) = \frac{h^2}{4}\eta^2$$

$$\Rightarrow \iint_A y^2 dxdy = \frac{bh^3}{16} \iint_{carré} \left(\frac{h^2}{4}\eta^2\right)\left(\frac{b\,h}{4}\right) d\xi d\eta$$

$$\Rightarrow \iint_A y^2 dxdy = \frac{bh^3}{16} \iint_{A\,réfférance} \eta^2 d\xi d\eta$$

Or

$$\iint_{A\,réfférance} \eta^2 d\xi d\eta = \frac{4}{3} \qquad \text{(Voir exemple 2)}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} \omega_i F(\xi_i,\eta_i) = 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{2}$$

$$\boxed{\Rightarrow \iint_A y^2 dxdy = \frac{bh^3}{16}\,\frac{4}{3} = \frac{bh^3}{12}}$$

Et on retrouve le résultat classique de la RDM.