

TABLES D'INTÉGRATION NUMÉRIQUE

Annexe

Pour une information plus détaillée, le lecteur est invité à consulter les ouvrages mis en référence à la fin du chapitre 5.

INTÉGRATION NUMÉRIQUE À UNE DIMENSION

Cette table d'intégration correspond à une intégration sur les éléments de référence (et donc sur l'intervalle $[-1, 1]$) associée à l'expression générale :

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^r \omega_i F(\xi_i)$$

Ces schéma intègrent exactement des polynômes de degré inférieur ou égal à $2r - 1$.

Intégration numérique de Gauss-Legendre

Tableau A2.1 - Table d'intégration à une dimension (Gauss-Legendre).

r	ξ_i	ω_i	intégration exacte de polynômes de degré
1	0	2	1
2	$\pm 0,5773502691 89626(\pm 1/\sqrt{3})$	1	3
3	0 $\pm 0,77459 66692 41483(\pm \sqrt{3/5})$	0,88888 88888 88889(8/9) 0,55555 55555 55556(5/9)	5
4	$\pm 0,33998 10435 84856$ $\pm 0,86113 63115 94053$	0,65214 51548 62546 0,34785 48451 37454	7
5	0 $\pm 0,53846 93101 05683$ $\pm 0,90617 98459 38664$	0,56888 88888 88889 0,47862 86704 99366 0,23692 68850 56189	9
6	$\pm 0,23861 91860 83197$ $\pm 0,66120 93864 66265$ $\pm 0,93246 95142 03152$	0,46791 39345 72691 0,36076 15730 48139 0,17132 44923 79170	11
7	0 $\pm 0,405845151377397$ $\pm 0,741531185599394$ $\pm 0,94910 79123 42759$	0,41795 91836 73469 0,38183 00505 05119 0,27970 53914 89277 0,12948 49661 68870	13

INTÉGRATION NUMÉRIQUE À DEUX DIMENSIONS

Ces tables d'intégration correspondent à une intégration sur les deux types d'éléments de référence associée à l'expression générale :

$$\iint_{\text{Élément de référence}} F(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^r \omega_i \cdot F(\xi_i, \eta_i)$$

Ces schéma intègrent exactement les polynômes dont le monôme de degré le plus élevé est $\xi^i \cdot \eta^j$ avec $i + j \leq m$ où m est l'ordre du schéma d'intégration.

Intégration numérique sur le triangle de référence

Tableau A2.2 - Table d'intégration sur le triangle de référence.

r	ξ_i	η_i	ω_i	m
1	1/3	1/3	1/2	1
3	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	1/6 1/6 1/6	2
3	1/6 2/3 1/6	1/6 1/6 2/3	1/6 1/6 1/6	2
4	1/3 1/5 3/5 1/5	1/3 1/5 1/5 3/5	-27/96 25/96 25/96 25/96	3
6	0,44594 84909 15965 0,10810 30181 68070 0,44594 84909 15965 0,09157 62135 09771 0,81684 75729 80458 0,09157 62135 09771	0,44594 84909 15965 0,44594 84909 15965 0,10810 30181 68070 0,09157 62135 09771 0,09157 62135 09771 0,81684 75729 80458	0,11169 07948 39005 0,11169 07948 39005 0,11169 07948 39005 0,05497 58718 27661 0,05497 58718 27661 0,05497 58718 27661	4
7	1/3 0,47014 20641 05115 0,05971 58717 89770 0,47014 20641 05115 0,10128 65073 23456 0,79742 69853 53088 0,10128 65073 23456	1/3 0,47014 20641 05115 0,47014 20641 05115 0,05971 58717 89770 0,10128 65073 23456 0,10128 65073 23456 0,79742 69853 53088	9/80 0,06619 70763 94253 0,06619 70763 94253 0,06619 70763 94253 0,06296 95902 72413 0,06296 95902 72413 0,06296 95902 72413	5

Intégration numérique sur le quadrangle de référence (carré)

Tableau A2.3 - Table d'intégration sur le quadrangle de référence.

r	ξ_i	η_i	ω_i	m
3	$\sqrt{2/3}$ $-1/\sqrt{6}$ $-1/\sqrt{6}$	0 $-1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2}$	$4/3$ $4/3$ $4/3$	2
3	1 $-5/9$ $1/3$	1 $2/9$ $-2/3$	$4/7$ $27/14$ $3/2$	2
4	$-1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	1 1 1 1	3
4	-1 1 0 0	0 0 $-1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2}$	$2/3$ $2/3$ $4/3$ $4/3$	3
4	$\sqrt{2/3}$ $-\sqrt{2/3}$ 0 0	0 0 $\sqrt{2/3}$ $-\sqrt{2/3}$	1 1 1 1	3
7	0 0 0 $\sqrt{3/5}$ $-\sqrt{3/5}$ $-\sqrt{3/5}$ $\sqrt{3/5}$	0 $\sqrt{14/15}$ $-\sqrt{14/15}$ $-1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	$8/7$ $20/63$ $20/63$ $20/36$ $20/36$ $20/36$ $20/36$	5

INTÉGRATION NUMÉRIQUE À TROIS DIMENSIONS

Ces tables d'intégration correspondent à une intégration sur les deux types d'éléments de référence associée à l'expression générale :

$$\iiint_{\text{Élément de référence}} F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^r \omega_i F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$$

Ces schéma intègrent exactement les polynômes dont le monôme de degré le plus élevé est $\xi^i \eta^j \zeta^k$ avec $i + j + k \leq m$ où m est l'ordre du schéma d'intégration.

Intégration numérique sur le tétraèdre de référence

Tableau A2.4 – Table d'intégration sur le tétraèdre de référence

r	s_1	s_2	s_3	s_4	m
1	1/4	1/4	1/4	1/6	1
4	$\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5+3\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{5}}{20}$	1/24 1/24 1/24 1/24	2
5	1/4 1/6 1/6 1/6 1/2	1/4 1/6 1/6 1/2 1/6	1/4 1/6 1/2 1/6 1/6	-2/15 3/40 3/40 3/40 3/40	3
15	1/4 $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{13-3\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{13+3\sqrt{15}}{34}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$	1/4 $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{13-3\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{13+3\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$	1/4 $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{13-3\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7+\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{13+3\sqrt{15}}{34}$ $\frac{7-\sqrt{15}}{34}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5+\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$ $\frac{5-\sqrt{15}}{20}$	8/405 $\frac{2665-14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665-14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665-14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665-14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665+14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665+14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665+14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{2665+14\sqrt{15}}{226800}$ $\frac{5}{567}$ $\frac{5}{567}$ $\frac{5}{567}$ $\frac{5}{567}$ $\frac{5}{567}$ $\frac{5}{567}$ $\frac{5}{567}$	5

Intégration numérique sur l'hexaèdre de référence (cube)

Tableau A2.5 – Table d'intégration sur l'hexaèdre de référence.

r	ξ_i	η_i	ζ_i	w_i	m
4	0 0 $-\sqrt{2/3}$ $\sqrt{2/3}$	$\sqrt{2/3}$ $-\sqrt{2/3}$ 0 0	$-1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	2 2 2 2	2
6	$1/\sqrt{6}$ $1/\sqrt{6}$ $-1/\sqrt{6}$ $-1/\sqrt{6}$ $-\sqrt{2/3}$ $\sqrt{2/3}$	$1/\sqrt{2}$ $-1/\sqrt{2}$ $1/\sqrt{2}$ $-1/\sqrt{2}$ 0 0	$-1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$ $-1/\sqrt{3}$ $1/\sqrt{3}$	$4/3$ $4/3$ $4/3$ $4/3$ $4/3$ $4/3$	3
6	± 1 0 0	0 ± 1 0	0 0 ± 1	$4/3$ $4/3$ $4/3$	3
14	$\pm\sqrt{19/30}$ 0 0 $\pm\sqrt{19/33}$	0 $\pm\sqrt{19/30}$ 0 $\pm\sqrt{19/33}$	0 0 $\pm\sqrt{19/30}$ $\pm\sqrt{19/33}$	$320/361$ $320/361$ $320/361$ $121/361$	5