

Schéma global de résolution et Formulations intégrales

Table des matières

1	Introduction.....	1
2	Schéma global de résolution	3
3	Méthode des résidus pondérés – formes intégrales.....	5
3.1	Définition du Résidu d'équilibre.....	5
3.2	Forme intégrale forte	5
3.3	Forme intégrale faible :	6
3.3.1	Intégration par partie (cas unidimensionnel).....	6
3.3.2	Formules de Green dans le cas bidimensionnel 2D	6
3.3.3	Formules de Green dans le cas tridimensionnel 3D.....	6
3.3.4	Forme intégrale faible	7
4	Méthode de Galerkin.....	9
4.1	Hypothèse de Galerkin	9
4.2	Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin.....	9
4.3	Prise en compte des forces ponctuelles.....	10
5	Application à l'élément barre.....	11
5.1	Equations d'équilibre	11
5.2	Forme intégrale forte	12
5.3	Forme intégrale faible	12
5.4	Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin.....	13
5.5	Seconde méthode : utilisation directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles	13
6	Exemples.....	14
6.1	Exemple 01 (exo1 de la série de TD N°05)	14
6.2	Exemple 02 (exo2 de la série de TD N°05):	16
6.3	Exemple 03 (exo3 de la série de TD N°05):	17
6.4	Exemple 04 (exo4 de la série de TD N°05):	18

1 Introduction

Les objectifs de ce chapitre consistent non seulement à faire connaître *les différentes étapes de résolution* d'un problème d'élasticité par la méthode des éléments finis mais surtout à faire comprendre les *bases de calculs adoptées* lors de chaque étape. A cet effet, seront traités les principaux thèmes suivants :

- les bases de la *méthode des résidus pondérés*,
- les différentes étapes d'une *formulation intégrale* en éléments finis de manière générale et en élasticité en particulier,
- le passage de la forme intégrale *forte* à la forme intégrale *faible*,
- l'opérateur variation et l'hypothèse de Galerkin,
- la modélisation mathématique de l'élément barre et sa formulation intégrale

Cela étant dit, rappelons tout de même le problème posé du corps solide élastique Ω avec ses frontières Γ_F et Γ_D et les conditions aux limites associées (figure 01) ainsi que ses équations d'équilibre aux dérivées partielles telles qu'elles ont été présentées dans le chapitre 02, à savoir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} &= 0 \end{aligned} \quad (7-01)$$

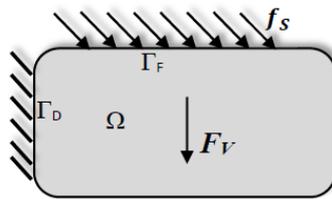


Figure 01 : position du problème

Sur Γ_D on a :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (7-02)$$

avec $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ des valeurs connues et souvent nulles à cause des appuis en Γ_D .

Des efforts de surface appliqués sur Γ_F tout en vérifiant la relation suivante :

$$- \{f_S\} = [\sigma] \cdot \{n\} \quad (7-03)$$

avec :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{Sx} \\ f_{Sy} \\ f_{Sz} \end{Bmatrix}, [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \text{ et } \{n\} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \text{ avec } \|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

Il est demandé de trouver en tout point M de notre solide son déplacement $\langle U \rangle$, les états de contraintes et de déformations représentés respectivement par les tenseurs des contraintes $[\sigma]$ et de déformations $[\epsilon]$. Autrement dit, il s'agit de trouver la réponse du solide représentée par les champs de déplacements, des contraintes et de déformations dans Ω . Nous nous intéresserons également à la détermination des champs de réactions sur Γ_D .

Par ailleurs, comme mentionné dans le paragraphe 01 du chapitre 04, la MEF commence par transformer les équations d'équilibre réécrites en (7-01) et des conditions aux limites associées (7-02) et (7-03), en une formulation intégrale. Pour cela, deux méthodes sont largement utilisées dans la littérature. La première est connue sous le nom de méthode de Ritz. Elle est basée sur des considérations énergétiques,

sur la notion de fonctionnelles ainsi que sur la formulation de condition de stationnarité de ces fonctionnelles. La seconde méthode est connue sous le nom de méthode des résidus pondérés. Exposée ci-après, cette méthode sera celle à laquelle nous nous limiterons dans le présent chapitre.

2 Schéma global de résolution

L'objectif du présent paragraphe est de présenter la manière dont est menée la résolution par éléments finis d'un problème de manière générale, et d'élasticité en particulier. Plus précisément, il s'agit de décrire toutes les étapes de résolution ainsi que les notions théoriques essentielles liées à chacune de ces étapes.

En effet, le point de départ étant le modèle mathématique, celui-ci est représenté par les systèmes d'équations aux dérivées partielles (7-01) en tout point du solide avec les conditions aux limites associées (7-02) et (7-03) sur ses frontières. Il en est suivi par les formulations intégrales fortes utilisant la méthode des résidus pondérés. Par la suite, les formulations intégrales faibles seront obtenues en utilisant les formules d'intégration par partie de Green suivies de l'adoption de l'hypothèse de Galerkin.

Il s'ensuivra alors la phase de discrétisation qui consiste en premier lieu à remplacer le domaine Ω par un maillage d'éléments finis sur lesquels les trois techniques étudiées dans les chapitres précédents seront appliquées. Il est à rappeler que ces trois techniques sont : les transformations entre éléments réels et éléments de référence, les interpolations nodales ainsi que les intégrations numériques.

En second lieu, cette phase de discrétisation consiste à construire pour chaque élément du maillage les matrices de rigidité élémentaires notées $[K_e]$, les vecteurs forces locaux notés $\{F_e\}$ ainsi que les vecteurs déplacements élémentaires généralisés notés $\{U_e\}$. L'assemblage de ces matrices de rigidité élémentaires donnera la matrice de rigidité globale notée $[K]$ de toute la structure du solide représentée (ou modélisée) ici par son maillage. L'assemblage des vecteurs forces locaux donnera le vecteur forces global noté $\{F\}$. Enfin, l'assemblage des vecteurs déplacements élémentaires généralisés donnera le vecteur déplacements global noté $\{U\}$. En assurant la continuité des déplacements au niveau des nœuds de chaque élément du maillage, les trois assemblages cités précédemment permettent d'obtenir, finalement le système global d'équations algébriques suivant :

$$[K]. \{U\} = \{F\} \quad (7-04)$$

La résolution de ce système d'équations donnera pour chaque nœud du maillage, les vecteurs déplacements nodaux. En utilisant l'interpolation nodale, les relations déplacements-déformations, ainsi que les techniques d'intégrations numériques, nous obtenons les champs de déformations à l'intérieur de chaque élément du maillage. Enfin en utilisant la relation de Hooke contraintes-déformations, nous obtenons le champ de contraintes au niveau des points d'intégration (de Gauss) de chaque élément.

Cela étant dit, toute la démarche qui vient d'être présentée ci-dessus est récapitulée dans l'organigramme des calculs illustré par le tableau 01 suivant :

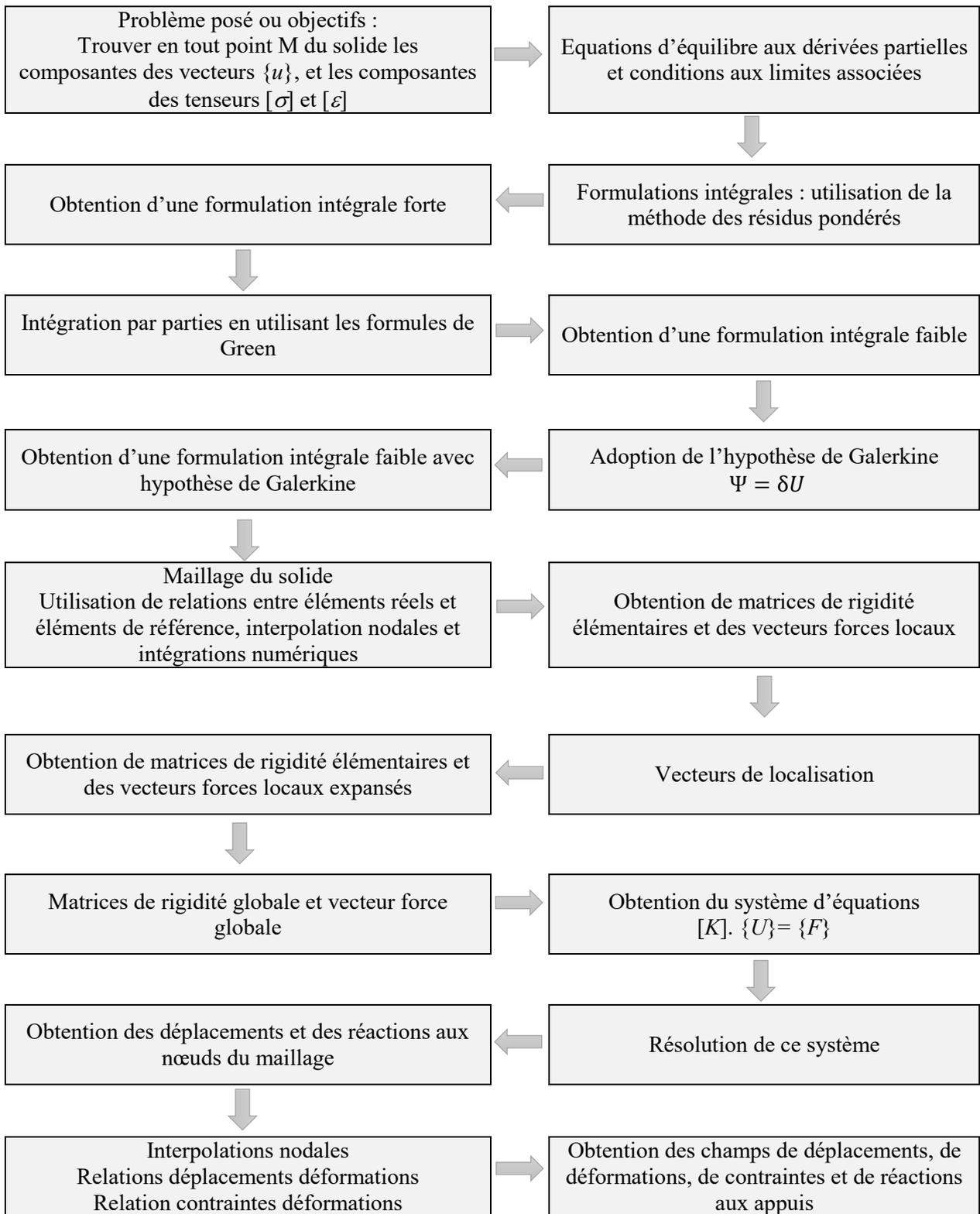


Tableau 01 : Organigramme des étapes de calculs effectués lors de la résolution par la MEF

3 Méthode des résidus pondérés – formes intégrales

3.1 Définition du Résidu d'équilibre

Pour les éléments finis formulés en déplacements, vu que la solution recherchée en première étape, est un champ de vecteurs déplacements \vec{U} à travers le domaine Ω , on définit le résidu par la quantité $\{R(\vec{U})\}$ qui est un vecteur à trois composantes car le système d'équations aux dérivées partielles compte trois équations tel que :

$$\{R(\vec{U})\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} \end{bmatrix} \quad (7-05)$$

Il est clair que si la solution obtenue \vec{U} est égale à la solution exacte \vec{U}_{ex} telle que $\vec{U} = \vec{U}_{exact}$, le vecteur résidu $\{R(\vec{U})\}$ sera nul :

$$\{R(\vec{U})\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7-06)$$

3.2 Forme intégrale forte

La méthode des résidus pondérés est une méthode qui consiste à chercher la solution sous la forme d'un champ de déplacements \vec{U} qui annule le résidu et par conséquent qui annule l'intégrale :

$$W = \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \{R(\vec{U})\} d\Omega = 0 \quad (7-07)$$

Avec $\langle \psi \rangle$: le vecteur de fonctions de pondérations dont les composantes sont $\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle$.

L'expression (7-07) est désignée par l'appellation de « *forme intégrale forte du problème* ».

Ainsi, le champ de déplacement \vec{U} est considéré comme étant la solution du problème, s'il annule l'intégrale W quels que soient les fonctions $\langle \Psi \rangle$. Prise dans un ensemble de fonctions, plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérées sont utilisées dans le choix de ces fonctions. Pour le présent chapitre, notre choix s'est porté sur la méthode de Galerkin qui constitue une des variantes parmi les plus utilisées. Toutefois, la seule condition imposée dans le choix de ces fonctions de pondérations $\langle \Psi \rangle$ est qu'elles doivent être nulles sur la frontière Γ_D où les déplacements ont été imposés.

En remplaçant les vecteurs $\langle \Psi \rangle$ et $\{R(\vec{U})\}$ par leurs expressions respectives dans (7-07), une forme intégrale dite « forte » du problème d'élasticité tridimensionnel peut être écrite comme suit :

$$W = \left[\int_{\Omega} \Psi_u \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} \right) + \Psi_v \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} \right) + \Psi_w \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (7-08)$$

Cette forme intégrale est qualifiée de forte car les inconnues recherchées sont écrites sous forme de dérivées partielles du premier ordre.

3.3 Forme intégrale faible :

3.3.1 Intégration par partie (cas unidimensionnel)

Soient les deux fonctions $u(x)$ et $\Psi(x)$. Il est rappelé que l'intégration par partie peut être écrite comme suit :

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + [\Psi(x) \cdot u(x)]_{x_1}^{x_2} \quad (7-09)$$

Il est à signaler que l'extension de ce principe d'intégration par partie aux cas 2D et 3D, peut être effectuée en utilisant des formules dites de Green.

3.3.2 Formules de Green dans le cas bidimensionnel 2D

On considère les deux fonctions $u(x, y)$ et $\Psi(x, y)$, définies sur Ω dans le plan (x, y) avec \vec{n} la normale sortante à la frontière Γ telle que $\vec{n} = \langle n_x, n_y \rangle$. On a alors les deux relations suivantes appelées formules de Green :

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot u(x, y) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot u(x, y) \cdot n_x \cdot dl \quad (7-10)$$

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot u(x, y) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot u(x, y) \cdot n_y \cdot dl \quad (7-11)$$

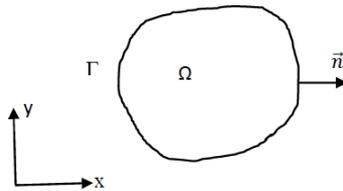


Figure 02 : Formules de Green en 2D

3.3.3 Formules de Green dans le cas tridimensionnel 3D

On considère les deux fonctions $u(x, y, z)$ et $\Psi(x, y, z)$, définies sur Ω dans l'espace (x, y, z) avec \vec{n} la normale sortante à la frontière Γ telle que $\vec{n} = \langle n_x, n_y, n_z \rangle$. On a alors les deux relations de Green suivantes :

$$\iiint_{\Omega} \Psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial x} \cdot u(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y, z) \cdot u(x, y, z) \cdot n_x \cdot d\Gamma \quad (7-12)$$

$$\iiint_{\Omega} \Psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} dx \cdot dy \cdot dz = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial y} \cdot u(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y, z) \cdot u(x, y, z) \cdot n_y \cdot d\Gamma \quad (7-13)$$

$$\iiint_{\Omega} \Psi(x, y, z) \cdot \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} dx \cdot dy \cdot dz = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y, z)}{\partial z} \cdot u(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y, z) \cdot u(x, y, z) \cdot n_z \cdot d\Gamma \quad (7-14)$$

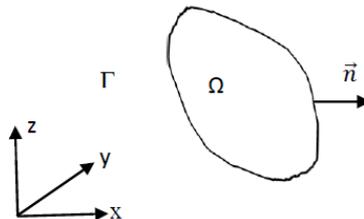


Figure 03: Formules de Green en 3D

Nota : Dans ce qui suit, les intégrales doubles et triples seront dorénavant notées comme simples

3.3.4 Forme intégrale faible

Pour un problème tridimensionnel d'élasticité linéaire, la forme intégrale faible s'écrit :

$$W = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \Psi \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma = 0 \quad (7-15)$$

Démonstration :

Rappelons la forme intégrale forte écrite dans l'expression (7-08),

$$W = \left[\int_{\Omega} \Psi_u \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{Vx} \right) + \Psi_v \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{Vy} \right) \right. \\ \left. + \Psi_w \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{Vz} \right) \right] d\Omega = 0$$

En séparant cette forme en deux parties telle que la seconde partie représente les forces de volumes, on obtient :

$$W = \left[\int_{\Omega} \Psi_u \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \Psi_v \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \right. \\ \left. + \Psi_w \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega = 0 \quad (7-16)$$

En appliquant la formule de Green à tous les termes de la première partie de (7-16), on obtient :

$$\int_{\Omega} \Psi_u \cdot \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_u \cdot \sigma_x \cdot n_x \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_u}{\partial y} \cdot \tau_{xy} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_u \cdot \tau_{xy} \cdot n_y \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_u \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_u}{\partial z} \cdot \tau_{xz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_u \cdot \tau_{xz} \cdot n_z \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_v \cdot \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \cdot \tau_{xy} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_v \cdot \tau_{xy} \cdot n_x \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_v \cdot \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_v \cdot \sigma_y \cdot n_y \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_v \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_v}{\partial z} \cdot \tau_{yz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_v \cdot \tau_{yz} \cdot n_z \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_w \cdot \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \cdot \tau_{xz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_w \cdot \tau_{xz} \cdot n_x \cdot d\Gamma \\ \int_{\Omega} \Psi_w \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \cdot d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \cdot \tau_{yz} \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_w \cdot \tau_{yz} \cdot n_y \cdot d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \Psi_w \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} d\Omega = - \int_{\Omega} \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z \cdot d\Omega + \oint_{\Gamma} \Psi_w \cdot \sigma_z \cdot n_z \cdot d\Gamma$$

En remplaçant ces termes par leurs expressions dans (7-16), on aura :

$$\begin{aligned} W = & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega \\ & + \oint_{\Gamma} \left(\Psi_u \cdot (\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z) + \Psi_v \cdot (\tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z) \right. \\ & \left. + \Psi_w \cdot (\tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z) \right) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (7-17)$$

Or on sait que la frontière fermée $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$ avec $\Gamma_D \cap \Gamma_F = \emptyset$ et telle que

Γ_D : la zone où les déplacements sont imposés et donc les fonctions de pondération $\langle \Psi \rangle$ nulles.

Γ_F : la zone où les forces de surface sont imposées avec

$$\begin{aligned} f_{S_x} &= \sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \\ f_{S_y} &= \tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \\ f_{S_z} &= \tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \end{aligned} \quad (7-18)$$

Ceci implique que l'intégrale sur la frontière Γ se réduit à l'intégrale sur Γ_F comme suit :

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} \left(\Psi_u \cdot (\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z) + \Psi_v \cdot (\tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z) + \Psi_w \cdot (\tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z) \right) d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_F} \left(\Psi_u \cdot f_{S_x} + \Psi_v \cdot f_{S_y} + \Psi_w \cdot f_{S_z} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma_F} \langle \Psi \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \end{aligned} \quad (7-19)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} W = & - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \Psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \Psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left(\frac{\partial \Psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \Psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \Psi \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \Psi \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \end{aligned} \quad (7-15)$$

C.O.F.D

Cette expression est appelée forme intégrale faible d'un problème tridimensionnel d'élasticité linéaire où apparaissent non seulement les forces de volume $\{F_V\}$ mais également les forces de surface $\{f_S\}$. Ainsi, par rapport à la formulation intégrale forte écrite en (7-08), on fait apparaître dans l'expression de la formulation faible les conditions aux limites sur Γ_F . On peut également constater sur (7-15) que comparativement à la formulation forte, ce ne sont plus les dérivées des composantes des contraintes qui figurent dans l'expression mais les composantes des contraintes elles-mêmes. Par conséquent, le degré de dérivation de la solution recherchée a baissé de un dans cette formulation faible. Ce qui permet de rechercher la solution sous une forme plus simple.

4 Méthode de Galerkin

Intéressons-nous maintenant au choix des fonctions de pondération $\langle \Psi \rangle$. Celui-ci peut se faire de différentes manières. Ce qui définit plusieurs variantes de la méthode des résidus pondérés. Les méthodes les plus connues portant sur le choix de ces fonctions sont :

- La méthode de collocation par points
- La méthode de collocation par sous domaines
- La méthode des moindres carrés
- La méthode de Galerkin

Dans le cadre de ce cours, nous nous limiterons uniquement à la méthode de Galerkin.

4.1 Hypothèse de Galerkin

Cette hypothèse consiste à prendre pour fonctions de pondération, les variations des composantes du champ de solution recherché. Ces variations sont exprimées en utilisant l'opérateur variation noté δ . Cet opérateur est identique à celui utilisé dans le théorème des travaux virtuels. En élasticité tridimensionnelle, on a :

$$\langle \Psi \rangle = \langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle = \langle \delta U \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle \quad (7-20)$$

Par ailleurs, il est important de rappeler les propriétés de cet opérateur variation δ qui sont comme suit :

$$\delta(u + v) = \delta u + \delta v$$

$$\delta(u \cdot v) = u \cdot \delta v + v \cdot \delta u$$

$$\delta(c \cdot u) = c \cdot \delta u$$

$$\delta \langle a \rangle = \langle \delta a_x \quad \delta a_y \quad \delta a_z \rangle$$

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial (\delta u)}{\partial x}$$

$$\int_V \delta u \, dV = \delta \left(\int_V u \, dV \right)$$

4.2 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

En considérant que $\langle \Psi_u \quad \Psi_v \quad \Psi_w \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle$ et en remplaçant la fonction $\langle \Psi \rangle$ par ses nouvelles composantes dans l'expression de la formulation intégrale faible (7-15), on obtient :

$$W = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (\delta u)}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial (\delta v)}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial (\delta w)}{\partial z} \cdot \sigma_z + \left(\frac{\partial (\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial (\delta v)}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \left(\frac{\partial (\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial (\delta w)}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial (\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial (\delta w)}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \quad (7-21)$$

Si on applique les propriétés de l'opérateur variation δ telles que décrites ci-dessus, on aura :

$$W = - \int_{\Omega} \left(\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \sigma_x + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \sigma_y + \delta \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \cdot \sigma_z + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xy} + \delta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \cdot \tau_{xz} \right. \\ \left. + \delta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \cdot \tau_{yz} \right) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \quad (7-22)$$

En tenant compte des relations déformations déplacements écrites dans le paragraphe 2 du chapitre 02, l'expression précédente sera comme suit :

$$W = - \int_{\Omega} (\delta(\varepsilon_x) \cdot \sigma_x + \delta(\varepsilon_y) \cdot \sigma_y + \delta(\varepsilon_z) \cdot \sigma_z + \delta(\gamma_{xy}) \cdot \tau_{xy} + \delta(\gamma_{xz}) \cdot \tau_{xz} + \delta(\gamma_{yz}) \cdot \tau_{yz}) \cdot d\Omega \quad (7-23)$$

$$+ \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

Soit les trois vecteurs :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle$$

$$\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad \delta \varepsilon_z \quad \delta \gamma_{xy} \quad \delta \gamma_{xz} \quad \delta \gamma_{yz} \rangle$$

Finalement, la forme intégrale faible devient en introduisant les trois vecteurs précédents dans (7-23) devient :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma = 0 \quad (7-23)$$

Ce dernier résultat n'est rien d'autre que l'expression du théorème des travaux virtuels (revoir le paragraphe 07 du chapitre 02) avec :

- $\int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega$: le travail virtuel interne
- $\int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega$: le travail virtuel des efforts de volume \vec{F}_V
- $\oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma$: le travail virtuel des efforts de surface \vec{f}_S

4.3 Prise en compte des forces ponctuelles

L'expression précédente ne s'applique pas dans le cas où notre solide Ω est soumis à m forces ponctuelles F_P^i $i = 1, m$ causant respectivement des déplacements virtuels δU_P^i $i = 1, m$. Le travail virtuel de ces forces ponctuelles sera pris en compte par le terme suivant :

$$\sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i$$

En intégrant ce dernier terme dans l'expression (7-23), on obtient la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin prenant en compte les forces ponctuelles :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i = 0 \quad (7-24)$$

Toutefois, nous verrons plus loin (lors de l'introduction du vecteur forces globales) qu'il est inutile d'introduire les forces ponctuelles dans la formulation faible puisqu'elles peuvent être introduites directement comme charges nodales dans le *vecteur force globale*.

5 Application à l'élément barre

Considérons un élément barre défini le long de l'axe x , et située entre x_1 et x_2 . Cette barre ne travaille que vis-à-vis de l'effort normal (soit en traction, soit en compression). Les propriétés matérielles et géométriques caractérisant cette barre sont : la masse volumique de son matériau constitutif ρ , son module d'Young E , l'aire de sa section transversale A et enfin sa longueur $L = x_2 - x_1$.

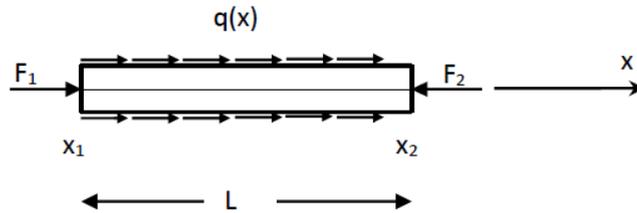


Figure 04 : exemple d'élément barre de longueur L

Soient les deux types de charges appliquées à cette barre tel qu'illustré sur la figure 04 précédente. Le premier chargement est de type ponctuel représenté par les forces F_1 et F_2 qui sont appliquées à ses extrémités. Le second chargement est de type uniformément réparti par unité de longueur. Ce dernier type est équivalent au chargement dû au poids propre. Cette charge $q(x)$ peut de manière générale avoir une variation quelconque.

5.1 Equations d'équilibre

Soit $u(x)$ la solution recherchée qui représente le champ de déplacements le long de l'axe x . L'état de contraintes dans cette barre étant considéré comme étant uniaxial, seule la composante σ_x du tenseur des contraintes est non nulle. Toutes les autres composantes sont considérées comme nulles.

Considérons un élément infinitésimal de longueur dx (figure 05) :

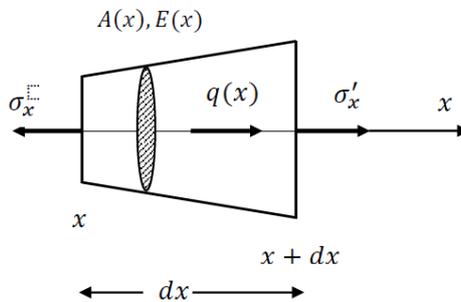


Figure 05 : Élément infinitésimal d'une barre

Considérons les deux sections transversales respectivement d'abscisses x et $(x+dx)$. Les évolutions des contraintes et des aires des sections transversales sont :

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \quad \text{et} \quad A(x+dx) = A(x) + \frac{dA(x)}{dx} dx \quad (7-25)$$

L'équilibre des forces dans la direction x s'écrit :

$$-\sigma_x \cdot A(x) + \left(\sigma_x + \frac{d\sigma_x}{dx} dx \right) \left(A(x) + \frac{dA(x)}{dx} dx \right) + q(x) \cdot dx = 0$$

En négligeant le terme du second ordre $\left(\frac{d\sigma_x}{dx} \cdot \frac{dA(x)}{dx} \cdot dx^2 \right)$, on aura :

$$\sigma_x \cdot \frac{dA(x)}{dx} \cdot dx + A(x) \frac{d\sigma_x}{dx} dx + q(x) \cdot dx = \frac{d(A(x) \cdot \sigma_x)}{dx} + q(x) \cdot dx = 0 \quad (7-26)$$

Or notre matériau étant élastique,

$$\sigma_x = E(x) \cdot \varepsilon(x) = E(x) \cdot \frac{du(x)}{dx}$$

En remplaçant σ_x par son expression dans (7-26), on obtient :

$$\frac{d}{dx} \left(A(x) \cdot E(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right) + q(x) = 0$$

Si les aires des sections transversales ainsi que le module d'Young sont constants tels que

$$E(x) \cdot A(x) = E \cdot A$$

Dans ce cas, on aura finalement l'équation différentielle d'équilibre comme suit :

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \quad (7-27)$$

La résolution de cette équation différentielle ne pouvant se faire sans conditions aux limites qui sont comme suit. En effet, au niveau de la section d'abscisse $x = x_1$ on a :

$$\sigma_x = \frac{F_1}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F_1}{E \cdot A} \Rightarrow \frac{du}{dx}(x_1) = \frac{F_1}{E \cdot A} \quad (7-28)$$

De la même manière, au niveau de la section d'abscisse ($x=x_2$), on a

$$\sigma'_x = -\frac{F_2}{A}, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma'_x}{E} = -\frac{F_2}{E \cdot A} \Rightarrow \frac{du}{dx}(x_2) = -\frac{F_2}{E \cdot A} \quad (7-29)$$

Le problème consiste donc à rechercher la fonction $u(x)$ solution de l'équation différentielle (7-27) et qui vérifie à la fois les conditions aux limites représentées par les expressions (7-28) et (7-29).

5.2 Forme intégrale forte

La forme intégrale forte du problème pouvant s'écrire comme suit :

$$W = \int_{x_1}^{x_2} \Psi \cdot \left(E \cdot A \cdot \frac{d^2u(x)}{dx^2} + q(x) \right) \cdot dx = 0 \quad (7-30)$$

5.3 Forme intégrale faible

Si on applique la formule d'intégration par partie telle que nous l'avons vue pour le cas unidimensionnel dans l'expression (7-09) du paragraphe 3.2.1 que nous rappelons ici

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + [\Psi(x) \cdot u(x)]_{x_1}^{x_2} \quad (7-09)$$

On aura donc :

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} \right) dx + E \cdot A \cdot \left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (7-31)$$

Or en tenant compte des expressions suivantes tirées de (7-28) et (7-29),

$$\frac{du}{dx}(x_1) = \frac{F_1}{E \cdot A} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx}(x_2) = -\frac{F_2}{E \cdot A}$$

et en les remplaçant les expressions suivantes dans (7-31), on aura la forme intégrale faible du problème comme suit :

$$W = -E.A. \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d\Psi(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} \right) dx + F_2 \cdot \Psi(x_2) + F_1 \cdot \Psi(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (7-32)$$

5.4 Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

L'hypothèse de Galerkin consiste à prendre pour ce cas unidimensionnel $\Psi(x) = \delta u(x)$.

En remplaçant $\Psi(x)$ par l'expression précédente et en tenant compte des propriétés de l'opérateur variation δ , on aura la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin :

$$W = -E.A. \int_{x_1}^{x_2} \left[\delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} \right] dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) + F_1 \cdot \delta u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (7-33)$$

5.5 Seconde méthode : utilisation directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles

Rappelons ci-dessous la forme intégrale faible avec prise en compte de forces ponctuelles telle qu'écrite en (7-24) de manière générale pour les problèmes tridimensionnels :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i = 0 \quad (7-34)$$

Rappelons également que $(\sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i)$ est le travail de m forces ponctuelles F_P^i causant respectivement m déplacements virtuels δU_P^i .

Dans le cas de l'élément barre, les vecteurs $\langle \varepsilon \rangle$ et $\langle \sigma \rangle$ sont comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \langle \sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \\ \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent : $\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \} = \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x = E \cdot \delta \varepsilon_x \cdot \varepsilon_x = E \cdot \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx}$

Ce qui implique : $-\int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega = -E.A. \int_{x_1}^{x_2} \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx$ avec $d\Omega = A \cdot dx$

Par ailleurs, on a : $\{ F_V \} = \frac{q(x)}{A}$. Ce qui implique : $\int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega = \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx$

Concernant les deux forces ponctuelles F_1 et F_2 , on a : $\sum_{i=1}^2 \delta U_P^i \cdot F_P^i = F_1 \cdot \delta u(x_1) + F_2 \cdot \delta u(x_2)$

Pour sa part, vu l'absence de forces surfaciques, on a : $\{ f_S \} = 0$, ceci conduit à : $\oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma = 0$

Finalement, avec cette seconde méthode, on retrouve la même expression de la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin que celle trouvée en (7-33)

$$W = -E.A. \int_{x_1}^{x_2} \left[\delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right] dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) + F_1 \cdot \delta u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0$$

6 Exemples

6.1 Exemple 01 (exo1 de la série de TD N°05)

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur t et modélisée, dans l'espace 2D muni d'un repère $(1,x,y)$, par un maillage composé d'un seul élément triangulaire à trois nœuds de type TRI3 (figure 06).

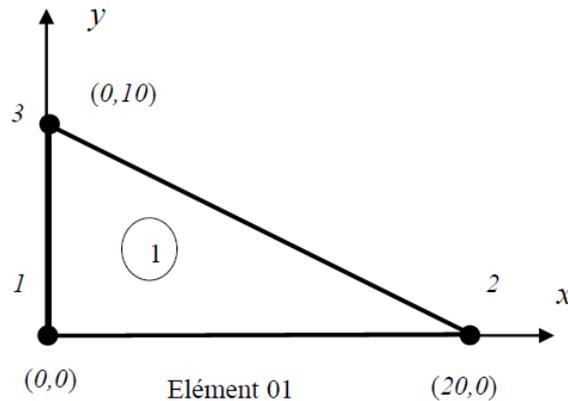


Figure 06 : paroi métallique mince de forme triangulaire

Sur le domaine occupé par cette paroi et noté Ω , on considère l'équation de transfert thermique suivante :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2 = 0$$

Les conditions aux limites liées à cette équation sont comme suit :

- Une température nulle ($T=0$) est imposée sur le bord (2-3) noté Γ_D
- Un flux de chaleur nul ($\frac{\partial T}{\partial n} = 0$) est imposé sur les bords (1-2) et (1-3) notés Γ_F .

Afin de déterminer la distribution du champ scalaire de température $T(x,y)$ dans cette paroi, il est demandé d'établir :

- 1- La forme intégrale forte du problème
- 2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

Solution :

Soit le domaine Ω dont la frontière Γ est fermée telle que $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_F$ avec $\Gamma_D \cap \Gamma_F = \emptyset$ avec

- Γ_D : (bord 2-3) la zone où les températures ont été imposées et donc les fonctions de pondération $\langle \Psi \rangle$ nulles.
- Γ_F : (bords 1-2 et 1-3) la zone où les flux chaleur ont été imposés nuls.

1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème est :

$$W = \int_{\Omega} \Psi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 2 \right) dx dy = \int_{\Omega} \Psi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) dx dy + \int_{\Omega} \Psi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) dx dy + 2 \int_{\Omega} \Psi dx dy = 0$$

2- Pour établir la forme intégrale faible du problème, on doit d'abord appliquer les formules Green en 2D qui ont été écrites dans les expressions (7-10) et (7-11) du paragraphe 3.3 pour chaque terme de l'équation précédente comme suit :

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} \right) dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x \cdot dl$$

$$\iint_{\Omega} \Psi(x, y) \cdot \left(\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \right) dx \cdot dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y \cdot dl$$

En remplaçant ces deux termes précédents par leurs expressions dans la forme intégrale forte de la question 1, on aura :

$$\begin{aligned} W = & - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x \cdot dl \\ & - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y \cdot dl + 2 \int_{\Omega} \Psi \, dx \, dy \\ = & 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} W = & - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy \\ & + \oint_{\Gamma} \Psi(x, y) \cdot \left(\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y \right) \cdot dl + 2 \int_{\Omega} \Psi \, dx \, dy = 0 \end{aligned}$$

Or
$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \cdot n_x + \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \cdot n_y$$

$$W = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + \oint_{\Gamma} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl + 2 \int_{\Omega} \Psi \, dx \, dy = 0$$

Puisque :

$$\oint_{\Gamma} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl = \oint_{\Gamma_D} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl + \oint_{\Gamma_F} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl$$

Or
$$\Psi = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \frac{\partial T}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_F$$

Par conséquent :

$$\oint_{\Gamma} \Psi \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cdot dl = 0$$

Et

$$W = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + 2 \int_{\Omega} \Psi(x, y) \, dx \, dy = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x, y) = \delta T(x, y)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = - \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial(\delta T(x, y))}{\partial x} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta T(x, y))}{\partial y} \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + 2 \int_{\Omega} (\delta T(x, y)) \cdot dx dy = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons comme suit :

$$\delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x}$$

On aura finalement :

$$W = - \iint_{\Omega} \left(\delta \left(\frac{\partial T(x, y)}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} + \delta \left(\frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy + 2 \int_{\Omega} (\delta T(x, y)) \cdot dx dy = 0$$

6.2 Exemple 02 (exo2 de la série de TD N°05):

Soit l'équation différentielle suivante définie dans l'intervalle $[1 \ 2]$ comme suit :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 3 \cdot u = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1) = 0 \text{ et } \frac{du}{dx}(2) = 0$$

Il est demandé d'établir :

- 1- La forme intégrale forte du problème
- 2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

Solution :

Soit le domaine $\Omega = [1 \ 2]$ qui est un intervalle 1D fermé

- 1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + 3 \cdot u(x) \right) dx = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx + 3 \int_1^2 \Psi(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

- 2- Pour établir la forme intégrale faible du problème précédent, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (7-09) du paragraphe 3.3 uniquement pour le premier terme de l'équation précédente comme suit :

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2$$

Le second terme $\left(3 \int_1^2 \Psi(x) \cdot u(x) \cdot dx \right)$ dont la fonction inconnue est $u(x)$ apparaît explicitement (c'est-à-dire qu'elle n'est pas écrite sous forme de dérivée), ne nécessite aucune modification.

Par ailleurs, puisque $u(1) = 0$ donc la fonction $\Psi(x)$ est nulle en $x=1$ donc $\Psi(1) = 0$ et

puisque $\frac{du}{dx}(2) = 0$, donc le terme $\left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2 = 0$

Par conséquent, la forme intégrale faible sera :

$$W = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 3 \int_1^2 \Psi(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = - \int_1^2 \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 3 \int_1^2 \delta u(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons ici comme suit :

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = - \int_1^2 \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 3 \int_1^2 \delta u(x) \cdot u(x) \cdot dx = 0$$

6.3 Exemple 03 (exo3 de la série de TD N°05):

Soit un phénomène physique modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante définie dans l'intervalle $[1, 2]$ comme suit :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - 2x = 0$$

Les conditions aux limites sont :

$$u(1) = u(2) = 0$$

Il est demandé d'établir :

- 1- La forme intégrale forte du problème
- 2- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin

Solution :

- 1- En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} - 2x \right) dx = \int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx + \int_1^2 \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx - 2 \int_1^2 \Psi(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

- 2- Pour établir la forme intégrale faible du problème précédent, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (7-09) du paragraphe 3.3 uniquement pour les deux premiers termes de l'équation précédente comme suit :

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2$$

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + [\Psi(x) \cdot u(x)]_1^2$$

Or $\Psi(1) = \Psi(2) = 0$ car $u(1) = u(2) = 0$

Ce qui implique que

$$\left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_1^2 = [\Psi(x) \cdot u(x)]_1^2 = 0$$

Dans ce cas :

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx$$

$$\int_1^2 \Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx$$

Par conséquent, la forme intégrale faible sera :

$$W = - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx - \int_1^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot u(x) \cdot dx - 2 \int_1^2 \Psi(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = \int_1^2 \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \int_1^2 \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot u(x) \cdot dx + 2 \int_1^2 \delta u(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons comme suit :

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = \int_1^2 \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \int_1^2 \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot u(x) \cdot dx + 2 \int_1^2 \delta u(x) \cdot x \cdot dx = 0$$

6.4 Exemple 04 (exo4 de la série de TD N°05):

Soit une barre de longueur $L=100$ cm de section transversale constante d'aire $A = 1 \text{ cm}^2$. Cette barre est bloquée en déplacements à l'extrémité ($x = 0$). Elle est soumise à une force ponctuelle $F=100$ KN à l'autre extrémité ($x = 100$ cm). Le poids propre de cette barre est considéré comme négligeable.

- 1- Ecrire le problème sous forme d'une équation différentielle avec ses conditions aux limites
- 2- Etablir la forme intégrale forte du problème
- 3- La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin
- 4- Retrouver cette forme intégrale faible en utilisant la méthode directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles.

Solution :

1- L'équation d'équilibre d'un élément infinitésimal de longueur dx est comme suit (voir la démonstration au paragraphe 5.1) :

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + q(x) = 0$$

Or le poids propre est négligeable donc $q(x) = 0$

Ainsi l'équation différentielle devient

$$E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

Avec comme condition aux limites

$$u(0) = 0$$

$$\frac{du}{dx}(100) = \frac{F}{EA} = \frac{100}{21000 \cdot 1} = 4.762 \cdot 10^{-3}$$

2- Forme intégrale forte du problème

En appliquant la méthode des résidus pondérés, la forme intégrale forte du problème sera :

$$W = \int_0^{100} \Psi(x) \cdot \left(E \cdot A \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = 0$$

3- Pour établir la forme intégrale faible du problème, on doit d'abord appliquer la formule d'intégration par partie en 1D qui a été écrite dans l'expression (7-09) du paragraphe 3.3 comme suit :

$$W = E \cdot A \cdot \int_0^{100} \Psi(x) \cdot \left(\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) dx = - \int_0^{100} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + \left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_0^{100} = 0$$

Or $\Psi(0) = 0$ car $u(0) = 0$

Ce qui implique que

$$\left[\Psi(x) \cdot \frac{du(x)}{dx} \right]_0^{100} = \Psi(100) \cdot \frac{du(100)}{dx} - \Psi(0) \cdot \frac{du(0)}{dx} = 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \Psi(100)$$

On obtient ainsi

$$W = - \int_0^{100} \frac{d\Psi(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \Psi(100) = 0$$

On applique l'hypothèse de Galerkin en posant que :

$$\Psi(x) = \delta u(x)$$

En remplaçant la fonction Ψ par son expression précédente, on aura :

$$W = - \int_0^{100} \frac{d(\delta u(x))}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \delta u(100) = 0$$

Et en utilisant la propriété de l'opérateur variation δ que nous rappelons comme suit :

$$\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d(\delta u)}{dx}$$

On aura finalement :

$$W = - \int_0^{100} \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \delta u(100) = 0$$

4- Forme intégrale faible en utilisant la méthode directe du théorème des travaux virtuels avec prise en compte des forces ponctuelles.

Rappelons ci-dessous la forme intégrale faible avec prise en compte de forces ponctuelles telle qu'écrite en (7-24) de manière générale pour les problèmes d'élasticité tridimensionnels :

$$W = - \int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \langle \sigma \rangle) \cdot d\Omega + \int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \langle F_V \rangle d\Omega + \oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \langle f_S \rangle d\Gamma + \sum_{i=1}^m \delta U_P^i \cdot F_P^i = 0$$

Dans le cas de l'élément barre, les vecteurs $\langle \varepsilon \rangle$ et $\langle \sigma \rangle$ sont comme suit :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

Par conséquent : $\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\} = \delta \varepsilon_x \cdot \sigma_x = E \cdot \delta \varepsilon_x \cdot \varepsilon_x = E \cdot \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx}$

Ce qui implique : $-\int_{\Omega} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\}) \cdot d\Omega = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx$ avec $d\Omega = A \cdot dx$

Par ailleurs, les forces de volume ayant été négligées donc on a : $\{F_V\} = 0$. Ce qui implique :

$$\int_{\Omega} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega = 0$$

Concernant les deux forces ponctuelles F_1 et F_2 , on a : $\sum_{i=1}^2 \delta U_P^i \cdot F_P^i = F_1 \cdot \delta u(x_1) + F_2 \cdot \delta u(x_2)$

Or $u(x_1) = 0 \Rightarrow \Psi(x_1) = 0 \Rightarrow$ puisque $\Psi(x_1) = \delta u(x_1) \Rightarrow \delta u(x_1) = 0$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^2 \delta U_P^i \cdot F_P^i = F_2 \cdot \delta u(x_2) = 100 \cdot \delta u(100)$$

Pour sa part, vu l'absence de forces surfaciques, on a : $\{f_S\} = 0$, ceci conduit à :

$$\oint_{\Gamma_F} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma = 0$$

Finalement, avec cette seconde méthode, on retrouve la même expression de la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin que celle trouvée en (7-33)

$$W = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) = 0$$

$$W = - \int_{x_1}^{x_2} \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} dx + \frac{F_2}{E \cdot A} \cdot \delta u(x_2) = 0$$

On retrouve ainsi le même résultat que la réponse à la question 3 précédente :

$$W = - \int_0^{100} \delta \left(\frac{du(x)}{dx} \right) \cdot \frac{du(x)}{dx} \cdot dx + 4.762 \cdot 10^{-3} \cdot \delta u(100) = 0$$