

## Rigidités élémentaires et forces nodales équivalentes

### Table des matières

1	Forme générale .....	2
1.1	Introduction du maillage dans la forme intégrale faible.....	2
1.2	Introduction de l'interpolation nodale du champ de solution recherché ou Matrice $[N]$ .....	2
1.3	Introduction de la matrice $[B]$ reliant le vecteur-déformations $\{\varepsilon\}$ au vecteur-déplacements nodaux $Un(i)$ .....	5
1.4	Matrice de rigidité élémentaire et vecteur force élémentaire .....	6
2	Matrices de rigidités élémentaires et vecteurs forces élémentaires d'un élément barre.....	6
3	Calcul de la matrice $B$ pour les éléments les plus utilisés :.....	9
3.1	Cas de l'élément unidimensionnel à deux nœuds SEG2 (linéaire):.....	9
3.2	Cas de l'élément unidimensionnel à trois nœuds SEG3 (quadratique) :.....	10
3.3	Cas de l'élément triangulaire à trois nœuds TRI3 (linéaire) :.....	11
4	Matrice de rigidité d'un élément triangulaire en contraintes planes : .....	14
5	Calcul de forces nodales équivalentes à des charges réparties : .....	15
5.1	Charges nodales équivalentes à des forces de volume-cas de l'élément barre 1D :.....	15
5.2	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire TRI3 :	16
5.3	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI3 adjacents :	19
5.4	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire quadratique TRI6 : .....	20
5.5	Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI6 adjacents :	21
6	Calculs en état de déformations planes : cas de la modélisation d'une digue de barrage d'eaux avec un élément triangulaire TRI3 .....	22
7	Calculs en état de contraintes planes : cas de la modélisation d'une plaque rectangulaire avec un élément quadrangulaire QUA4 .....	30
8	Exercices corrigés de la série de TD N°06.....	36
8.1	Exercice 01 : barre tendue de section variable .....	36
8.2	Exercice 02 Forces nodales équivalentes au poids propre d'une barre de sections variables	39
8.3	Exercice 03 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur un élément TRI6.....	41

## 1 Forme générale

Les objectifs de ce chapitre sont comme suit :

- l'introduction du maillage et de l'interpolation nodale dans la formulation faible
- la détermination des matrices de rigidité élémentaires
- le calcul de vecteurs forces locaux

En effet, comme déjà vu dans le schéma global de résolution illustré dans le paragraphe 2 du chapitre précédent, les constructions pour chaque élément fini du maillage, d'une matrice de rigidité dite élémentaire et d'un vecteur force dit local, sont nécessaires. Toutefois, ceci ne peut se réaliser sans la discrétisation de la forme intégrale faible établie dans le chapitre précédent. Cette discrétisation consiste en l'introduction du maillage et de l'interpolation nodale dans cette forme intégrale. Ceci a pour but de faire apparaître les valeurs du champ de solution recherché (les déplacements en mécanique) aux nœuds du maillage.

### 1.1 Introduction du maillage dans la forme intégrale faible

Cette première étape de la discrétisation consiste à écrire que les intégrales sur le domaine  $\Omega$  et sur une partie de la frontière  $\Gamma_F$  sont la sommation d'intégrales sur chaque élément qui est noté ici  $\Omega_{(i)}$  telle que :

$$W = \sum_{i=1}^N W_{(i)} = 0 \quad (8-01)$$

avec

$$W_i = - \int_{\Omega_{(i)}} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot \{ \sigma \}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{ F_V \} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma \quad (8-02)$$

$N$  étant le nombre total d'éléments du maillage.

Par ailleurs, il est à noter que les surfaces élémentaires  $\Gamma_{F(i)}$  sont celles des faces de certains éléments du maillage qui ont une frontière commune avec la surface extérieure  $\Gamma_F$  sur laquelle sont appliquées les forces de surface  $\{ f_S \}$ . Il est clair que pour les éléments qui n'ont aucune face commune avec  $\Gamma_F$ , le terme  $\left( \oint_{\Gamma_{F(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{ f_S \} d\Gamma \right)$  est nul.

### 1.2 Introduction de l'interpolation nodale du champ de solution recherché ou Matrice [N]

Après avoir introduit le maillage, l'étape suivante consiste à introduire l'interpolation nodale du champ solution recherchée (qui est le champ de déplacements dans notre cas), de la manière suivante. En effet, sur l'élément de référence, ce champ de déplacements s'exprime de la manière suivante :

$$u = \langle N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}, \quad v = \langle N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } w = \langle N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$$

Si on définit un vecteur contenant tous les déplacements nodaux de l'élément noté  $\langle U_{n(i)} \rangle$  telle que :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad u_n \quad v_n \quad w_n \rangle \quad (8-03),$$

L'écriture précédente des composantes  $u$ ,  $v$  et  $w$  peut prendre la forme suivante :

$$u = \langle N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad N_n \quad 0 \quad 0 \rangle \cdot \{U_{n(i)}\}$$

$$v = \langle 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad N_n \quad 0 \rangle \cdot \{U_{n(i)}\}$$

$$w = \langle 0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 0 \quad 0 \quad N_n \rangle \cdot \{U_{n(i)}\}$$

Ainsi, la mise sous forme condensée de l'écriture précédente permet d'introduire la matrice  $[N]$  telle que :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-04)$$

Avec

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

Ainsi, en appliquant l'opérateur variation  $\delta$  à l'équation (8-04), on aura :

$$\{\delta U\} = [N] \cdot \{\delta U_{n(i)}\} \quad (8-05)$$

Avec  $\langle \delta U_{n(i)} \rangle = \langle \delta u_1 \quad \delta v_1 \quad \delta w_1 \quad \delta u_2 \quad \delta v_2 \quad \delta w_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \delta u_n \quad \delta v_n \quad \delta w_n \rangle$

Par ailleurs, l'équation (8-05) peut s'écrire sous une autre forme transposée comme suit :

$$\langle \delta U \rangle = \langle \delta U_{n(i)} \rangle [N]^T \quad (8-06)$$

### Exemples de calcul de matrices $[N]$ :

#### Exemple 01 : Cas de l'élément unidimensionnel à deux nœuds SEG2 (linéaire):

Soit un élément numéroté  $(i)$  à deux nœuds dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Puisque dans le cas unidimensionnel,  $\{U\}$  possède une seule composante, et en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle qu'elle a été écrite en (8-04), on a :

$$\{U\} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, on obtient par identification :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle$$

Exemple 02 : Cas de l'élément unidimensionnel à trois nœuds SEG3 (quadratique) :

Soit l'élément ( $i$ ) à trois nœuds dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle que écrite en (8-04), on a :

$$u(\xi) = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Donc par identification, on obtient :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle = \left\langle -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \right\rangle$$

Exemple 03 : Cas de l'élément bidimensionnel triangulaire à trois nœuds TRI3 (linéaire) :

Soit donc l'élément ( $i$ ) à trois nœuds de type TRI3 dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle qu'elle a été écrite en (8-04), on a :

$$\{U\} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Donc par identification, on obtient :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Exemple 04 : Cas de l'élément bidimensionnel quadrangulaire à quatre nœuds QUA4 (linéaire) :

Soit donc l'élément ( $i$ ) à quatre nœuds de type QUA4 dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[N]$  telle que écrite en (8-04), on a :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\} = [N] \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Donc par identification, on obtient :

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

avec

$$N_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), \quad N_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta), \quad N_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \text{ et } N_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

### 1.3 Introduction de la matrice $[B]$ reliant le vecteur-déformations $\{\varepsilon\}$ au vecteur-déplacements nodaux $\{U_{n(i)}\}$

La matrice  $[B]$  est définie en introduisant la relation suivante :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-07)$$

Avec  $\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle$ , le vecteur déformation en un point M de l'élément réel et  $\{U_{n(i)}\}$  le vecteur-déplacements généralisés de l'élément considéré du maillage.

En 3D, cette matrice  $[B]$  est de taille 6 par  $(3.n)$  avec  $n$  le nombre de nœuds que contient l'élément considéré. Cette matrice est globalement formée avec les termes de la matrice  $[j]$  (qui est l'inverse de la matrice Jacobienne) et les dérivées des fonctions d'interpolations sur l'élément de référence  $\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$ ,  $\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$  et  $\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$ . On rappelle que ces dérivées sont fournies par les tables de définition des éléments de référence. Le détail de la composition de la matrice  $[B]$  pour certains éléments 1D et 2D, sera traité au paragraphe 03.

Par ailleurs, en appliquant l'opérateur variation  $\delta$  à l'équation (8-07) ci-dessus, on obtient :

$$\{\delta \varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta U_{n(i)}\} \quad (8-08)$$

Sous une forme transposée, l'équation précédente (8-08) peut s'écrire comme suit :

$$\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta U_{n(i)} \rangle [B]^T \quad (8-09)$$

#### 1.4 Matrice de rigidité élémentaire et vecteur force élémentaire

En introduisant la loi de Hooke qui relie les déformations aux contraintes  $\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\}$ , l'expression (8-02) devient :

$$W_{(i)} = - \int_{\Omega_{(i)}} (\langle \delta \varepsilon \rangle \cdot [H] \cdot \{\varepsilon\}) \cdot d\Omega + \int_{\Omega_{(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} \langle \delta U \rangle \cdot \{f_S\} d\Gamma \quad (8-10)$$

Rappelons les trois relations suivantes :

$$\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta U_{n(i)} \rangle [B]^T, \quad \{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad \text{et} \quad \langle \delta U \rangle = \langle \delta U_{n(i)} \rangle [N]^T$$

En remplaçant ces dernières dans (8-10), on obtient l'expression très importante de  $W_{(i)}$  comme suit :

$$W_{(i)} = \langle \delta U_{n(i)} \rangle \left[ - \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot d\Omega \cdot \{U_{n(i)}\} + \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma \right] \quad (8-11)$$

En posant :

$$[K_{(i)}] = \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (8-12 a)$$

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma \quad (8-12 b)$$

On obtient :

$$W_{(i)} = \langle \delta U_{n(i)} \rangle [-[K_{(i)}] \cdot \{U_{n(i)}\} + \{F_{(i)}\}] \quad (8-12 c)$$

La matrice  $[K_{(i)}]$  est appelée *matrice de rigidité élémentaire* de l'élément  $(i)$ . Pour les éléments à trois degrés de liberté par nœud, cette matrice est de taille  $(3.n)$  par  $(3.n)$ . En élasticité linéaire, cette matrice est toujours symétrique.

Le vecteur  $\{F_{(i)}\}$  est appelé *vecteur force local* pour l'élément  $(i)$ . En présence de forces réparties appliquées entre les nœuds d'un élément (ou sur une face de cet élément), l'expression (8-12b) ci-dessus, permet d'extrapoler ces forces de surfaces en les remplaçant par des forces ponctuelles  $\{F_{(i)}\}$  appliquées au niveau des nœuds. Elles sont également connues sous la nomination de « forces nodales équivalentes ».

## 2 Matrices de rigidités élémentaires et vecteurs forces élémentaires d'un élément barre

Reprenons le cas de l'élément barre tel que traité dans le paragraphe 5 du chapitre précédent, dans lequel la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin avait été établie. Soit le modèle réel de la barre dont le maillage est composé uniquement d'un seul élément à deux nœuds de type SEG2 (voir la figure 01 ci-dessous).

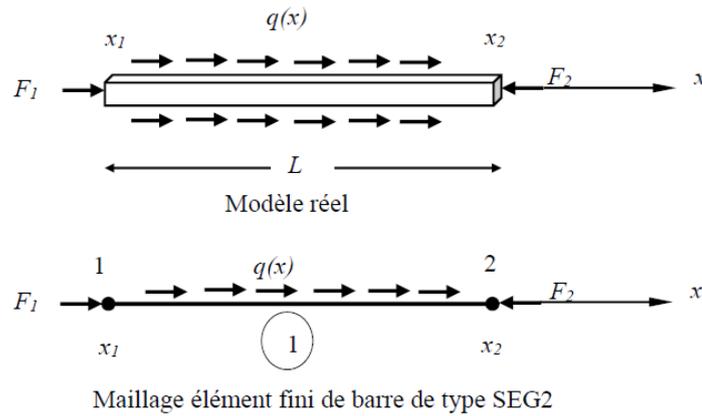


Figure 01 : élément barre à deux nœuds

Puisque le maillage n'est composé que d'un seul élément, l'introduction de celui-ci dans la forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkin se fait comme suit :

$$W = W_{(1)} = -E \cdot A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( \frac{du(x)}{dx} \right) \frac{du(x)}{dx} dx + F_2 \cdot \delta u(x_2) + F_1 \cdot \delta u(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \delta u(x) \cdot q(x) \cdot dx = 0 \quad (8-13)$$

On associe à cet élément réel son élément de référence (figure 02) telle que leur relation s'écrit :

$$x(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

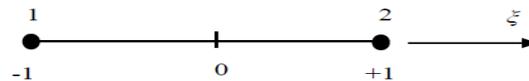


Figure 02 : élément de référence associé

La matrice Jacobienne [J] étant égale à son déterminant  $det[J]$ , telle qu'en dérivant totalement  $x(\xi)$  par rapport à  $\xi$ , on obtient :

$$[J] = det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}$$

On en déduit que la matrice inverse [j] s'écrit comme suit

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{2}{L}$$

Or selon le paragraphe 4 du chapitre 03, on a :

$$\frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi}$$

Ceci permet en remplaçant  $\frac{du(x)}{dx}$  par son expression précédente et en calculant les intégrales dans l'élément de référence moyennant le déterminant de la matrice Jacobienne d'écrire :

$$W = W_{(1)} = -E \cdot A \cdot \int_{-1}^{+1} \left[ \delta \left( \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] \frac{L}{2} d\xi + F_2 \cdot \delta u(1) + F_1 \cdot \delta u(-1) + \int_{-1}^{+1} \delta u(\xi) \cdot q(x(\xi)) \cdot \frac{L}{2} d\xi \quad (8-14)$$

Et d'obtenir après développement :

$$W = W_{(1)} = -\frac{2 \cdot E \cdot A}{L} \cdot \int_{-1}^{+1} \left[ \delta \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) \frac{du(\xi)}{d\xi} \right] d\xi + F_2 \cdot \delta u(1) + F_1 \cdot \delta u(-1) + \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \delta u(\xi) \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi \quad (8-15)$$

On introduit l'interpolation nodale en interpolant  $u$  dans l'élément de référence telle que :

$$u(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8-16)$$

En dérivant  $u(\xi)$  on obtient :

$$\frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial N_1(\xi)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle -1 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Si on introduit l'opérateur variation  $\delta$  dans les expressions précédentes, on obtient :

$$\delta u(\xi) = \langle N_1(\xi) \quad N_2(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle (1 - \xi) \quad (1 + \xi) \rangle \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} (1 - \xi) \\ (1 + \xi) \end{Bmatrix} \quad (8-17)$$

Et

$$\delta \left( \frac{du(\xi)}{d\xi} \right) = \frac{1}{2} \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On remarque également que :

$$\delta u(-1) = \delta u_1 \quad \text{et} \quad \delta u(1) = \delta u_2$$

Ce qui permet d'écrire que :

$$F_1 \delta u(-1) = F_1 \cdot \delta u_1 = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad F_2 \delta u(1) = F_2 \cdot \delta u_2 = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

En remplaçant toutes les expressions précédentes dans (8-15), et en mettant en facteur  $\langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle$ , on obtient :

$$W = W_{(1)} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \left[ -\frac{E \cdot A}{2 \cdot L} \cdot \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \langle -1 \quad 1 \rangle \int_{-1}^{+1} d\xi \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi \right] \quad (8-18)$$

Ainsi, on peut mettre l'expression précédente sous la forme :

$$W = W_{(1)} = \langle \delta u_1 \quad \delta u_2 \rangle \left[ -[K_{(i)}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \{F_{(i)}\} \right] \quad (8-18)$$

Avec

$$[K_{(i)}] = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi$$

Le terme  $\frac{L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot q(x(\xi)) \cdot d\xi$  permet de calculer les forces nodales équivalentes à la charge répartie  $q(x)$  le long de la barre.

Par ailleurs, si  $q(x) = q = \text{cste}$ , on retrouve facilement l'expression :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{qL}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

### 3 Calcul de la matrice $[B]$ pour les éléments les plus utilisés :

#### 3.1 Cas de l'élément unidimensionnel à deux nœuds SEG2 (linéaire):

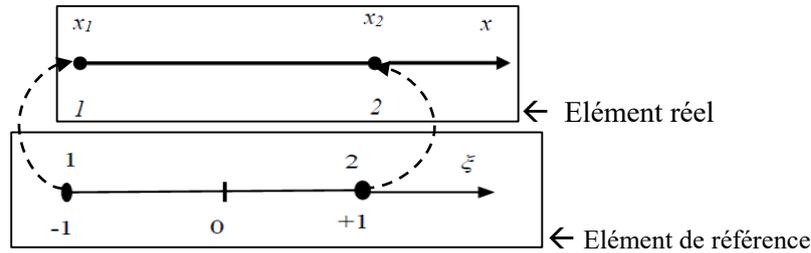


Figure 03 : relation entre élément réel 1D à 2 nœuds (SEG2) et l'élément de référence

Soit l'élément ( $i$ ) à deux nœuds tel que représenté sur la figure 03 ci-dessus et dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \rangle$$

Le champ de déplacements étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Ce qui implique que dans l'élément de référence, le champ de déformations s'écrira comme suit :

$$\varepsilon_\xi = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \left\langle \frac{dN_1}{d\xi} \quad \frac{dN_2}{d\xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Par ailleurs, on rappelle que dans l'élément réel, le champ de déformation  $\varepsilon_x$  est comme suit :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi}$$

On rappelle que la matrice Jacobienne  $[J]$  est égale à son déterminant  $\det[J]$ , telle que:

$$[J] = \det[J] = \frac{L}{2}$$

La matrice inverse  $[j]$  s'écrivant comme suit

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{2}{L}$$

Donc on déduit que :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi}$$

Si on remplace  $\frac{du(\xi)}{d\xi}$  par son expression ci-dessus, on déduit :

$$\varepsilon_x = \frac{2}{L} \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \left\langle \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8-19)$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été définie en (8-04), on a :

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \tag{8-20}$$

Ainsi, en comparant les deux dernières expressions (8-19) et (8-20) ci-dessus, la matrice  $[B]$  peut être déduite par identification comme suit :

$$[B] = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \tag{8-21}$$

**3.2 Cas de l'élément unidimensionnel à trois nœuds SEG3 (quadratique) :**

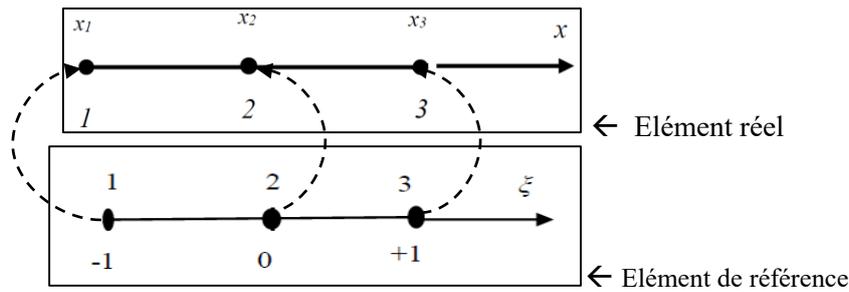


Figure 04 : élément quadratique réel 1D à 3 nœuds (SEG3) et son élément de référence

Soit l'élément  $(i)$  à trois nœuds représenté sur la figure 04 ci-dessus et dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad u_2 \quad u_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à une seule composante, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$u(\xi) = \langle N_1 \quad N_2 \quad N_3 \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left\langle -\frac{\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Ce qui implique que dans l'élément de référence, le champ de déformations s'écrira comme suit :

$$\varepsilon_\xi = \frac{du(\xi)}{d\xi} = \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \tag{8-22}$$

Par ailleurs, rappelons la relation entre l'élément réel et l'élément de référence :

$$x(\xi) = \langle \bar{N}_1(\xi) \quad \bar{N}_2(\xi) \quad \bar{N}_3(\xi) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \left\langle \frac{-\xi}{2}(1-\xi) \quad (1-\xi^2) \quad \frac{\xi}{2}(1+\xi) \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement, cette relation s'écrit :

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi^2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_1)\xi + x_2$$

La matrice Jacobienne  $[J]$  étant égale à son déterminant  $det[J]$ , telle que:

$$[J] = \det[J] = \frac{dx(\xi)}{d\xi} = (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) = (x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{L}{2}$$

La matrice inverse  $[j]$  s'écrira comme suit

$$[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]}$$

Donc on déduit que :

$$\varepsilon_x = \frac{du(x)}{dx} = [j] \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\det[J]} \frac{du(\xi)}{d\xi} \tag{8-23}$$

Si on remplace  $\frac{du(\xi)}{d\xi}$  par son expression (8-22) dans l'expression (8-23) ci-dessus, on déduit :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\det[J]} \left\langle \frac{\partial N_1}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Or en tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été écrite en (8-04), on a :

$$\{\varepsilon\} = \varepsilon_x = [B] \cdot \{U_{n(i)}\}$$

Et en comparant les deux dernières expressions ci-dessus, la matrice  $[B]$  peut être obtenue par identification comme suit :

$$[B] = \frac{1}{\det[J]} \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle = \left( \frac{1}{(x_1 - 2x_2 + x_3)\xi + \frac{L}{2}} \right) \left\langle -\frac{1}{2} + \xi \quad -2\xi \quad \frac{1}{2} + \xi \right\rangle \tag{8-24}$$

### 3.3 Cas de l'élément triangulaire à trois nœuds TRI3 (linéaire) :

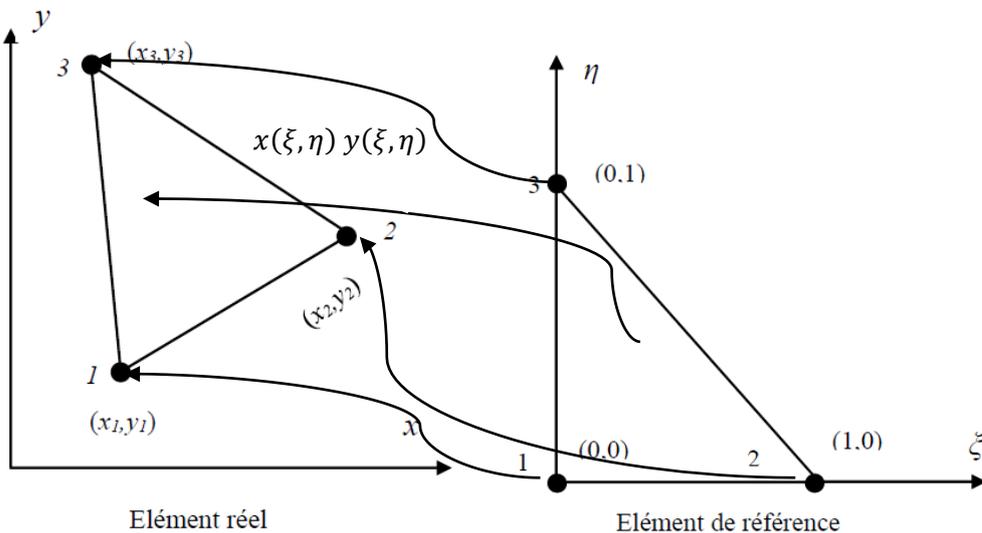


Figure 05 : élément triangulaire réel 2D à 3 nœuds (TRI3) et son élément de référence

Soit l'élément  $(i)$  triangulaire à trois nœuds tel que représenté sur la figure 05 ci-dessus et dont le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  est défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

On définit dans l'élément de référence, le champ de déformations comme suit :

$$\{\varepsilon_{(\xi, \eta)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-25)$$

Or les fonctions d'interpolations et leurs dérivées partielles sont comme suit :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta, & N_2(\xi, \eta) &= \xi & \text{et} & & N_3(\xi, \eta) &= \eta \\ \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= -1 & \frac{\partial N_1(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= -1 \\ \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 1 & \frac{\partial N_2(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \xi} &= 0 & \frac{\partial N_3(\xi, \eta)}{\partial \eta} &= 1 \end{aligned}$$

En les remplaçant dans l'expression (8-25) précédente, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-26)$$

Par ailleurs, la matrice Jacobienne  $[J]$  de l'élément triangulaire TRI3 étant connue (voir chapitre 05) telle que:

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad \text{et} \quad y_{ij} = y_i - y_j$$

Avec  $\det[J] = x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21} = 2A$  où A est l'aire du triangle

La matrice inverse  $[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix}$

peut être utilisée comme suit (voir paragraphe 4 chapitre 03) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } \begin{Bmatrix} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

En développant cette écriture matricielle, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( y_{31} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + y_{12} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( x_{13} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} + x_{21} \cdot \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2A} \left( y_{31} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} + y_{12} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( x_{13} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} + x_{21} \cdot \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right) \end{cases} \quad (8-27)$$

Par ailleurs, le vecteur-déformations  $\langle \varepsilon \rangle$  dans l'élément réel est connu par ses composantes suivantes :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle = \left\langle \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \right\rangle$$

Si on remplace ces composantes par leurs expressions établies en (8-27), on aura :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \\ x_{13} & x_{21} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (8-27)$$

D'autre part, en remplaçant le vecteur  $\left\langle \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right\rangle$  par son expression établie en (8-26) dans (8-27), on aura :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{13} & x_{21} \\ x_{13} & x_{21} & y_{31} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-28)$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (8-29)$$

En tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été introduite en (8-04), dans laquelle on a :

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{U_{n(i)}\} \quad (8-30)$$

En comparant les deux dernières expressions ci-dessus (8-29) et (8-30), la matrice  $[B]$  peut être déduite par identification comme suit :

$$[B] = \frac{1}{(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21})} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \quad (8-31)$$

On remarque dans (8-31) que les termes de la matrice  $[B]$  sont constants et ne dépendent que des coordonnées des nœuds. Ce qui permet de constater que le champ de déformations (et donc de contraintes) est constant à l'intérieur de l'élément triangulaire TRI3.

#### 4 Matrice de rigidité d'un élément triangulaire en contraintes planes :

Reprenons l'élément triangulaire TRI3 de la figure 05 ci-dessus d'épaisseur  $t$ , de module de Young  $E$ , de coefficient de Poisson  $\nu$  et d'aire  $A$ . Cet élément se trouvant dans un état de contraintes planes en comportement élastique, la relation de Hooke contraintes-déformations est comme suit :

$$\{\sigma\} = [H_{CP}] \cdot \{\varepsilon\}$$

Avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad (8-32)$$

Comme déjà vu dans le paragraphe (1-4) plus haut, le calcul de la matrice de rigidité de cet élément fini se fera en appliquant la formule de l'expression (8-12a) en 2D sous un état de contraintes planes :

$$[K_{(i)}] = \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T \cdot [H_{CP}] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (8-33)$$

En effet, la matrice  $[B]$  ayant déjà été calculée dans l'exemple 03 précédent, la matrice  $[H_{CP}]$  étant rappelée dans (8-32), il suffit donc de remplacer ces deux matrices par leurs expressions respectives dans (8-33) pour obtenir :

$$[K_{(i)}] = \frac{E}{(1-\nu^2)(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21})^2} \int_{\Omega_{(i)}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} d\Omega$$

En faisant sortir tous les termes constants de l'intégrale, on obtient :

$$[K_{(i)}] = \frac{E}{(1-\nu^2)(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21})^2} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \int_{\Omega_{(i)}} d\Omega$$

Puisque  $\int_{\Omega_{(i)}} d\Omega = A \cdot t = \text{volume total de l'élément}$ , et  $(x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}) = 2A$ , on aura finalement :

$$[K_{(i)}] = \frac{t \cdot E}{4 \cdot A \cdot (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Après calculs, on obtient finalement la matrice de rigidité élémentaire suivante :

$$[K_{(i)}] = M \cdot \begin{bmatrix} (y_{23}^2 + C \cdot x_{32}^2) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{32} + C \cdot x_{32} \cdot x_{13}) & (y_{23} \cdot y_{31} + C \cdot x_{32} \cdot x_{13}) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{13} + C \cdot x_{32} \cdot y_{31}) & (y_{23} \cdot y_{12} + C \cdot x_{32} \cdot x_{21}) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{21} + C \cdot x_{32} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & x_{32}^2 + C \cdot y_{23}^2 & (v \cdot x_{32} \cdot y_{31} + C \cdot y_{23} \cdot x_{13}) & (x_{32} \cdot x_{13} + C \cdot y_{23} \cdot y_{31}) & (v \cdot x_{32} \cdot y_{12} + C \cdot y_{23} \cdot x_{21}) & (x_{32} \cdot x_{21} + C \cdot y_{23} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & y_{31}^2 + C \cdot x_{13}^2 & (v \cdot y_{31} \cdot x_{13} + C \cdot x_{13} \cdot y_{31}) & (y_{31} \cdot y_{12} + C \cdot x_{13} \cdot x_{21}) & (v \cdot y_{31} \cdot x_{21} + C \cdot x_{13} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & x_{13}^2 + C \cdot y_{13}^2 & (v \cdot x_{13} \cdot y_{12} + C \cdot y_{31} \cdot x_{21}) & (x_{13} \cdot x_{21} + C \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & y_{12}^2 + C \cdot x_{21}^2 & (v \cdot y_{12} \cdot x_{21} + C \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & \text{Sym} & x_{21}^2 + C \cdot y_{12}^2 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$M = \frac{t \cdot E}{4 \cdot A \cdot (1 - \nu^2)} \quad A = \frac{x_{21} \cdot y_{31} - x_{31} \cdot y_{21}}{2} \quad \text{et} \quad C = \frac{1 - \nu}{2}$$

## 5 Calcul de forces nodales équivalentes à des charges réparties :

L'expression (8-12b) permettant de calculer les forces nodales équivalentes à des charges réparties est rappelée ci-dessous :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega + \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

Dans ce qui suit, nous allons voir quelques cas d'applications pratiques de cette expression.

### 5.1 Charges nodales équivalentes à des forces de volume-cas de l'élément barre 1D :

On considère une barre de longueur L et de section transversale d'aire A et de poids spécifique  $\gamma (= \rho \cdot g)$  ( $\rho$  et  $g$  étant respectivement la masse volumique et l'accélération de la pesanteur). Cette barre est définie le long de l'axe  $x$ . Elle est située entre les points d'abscisses  $x_1$  et  $x_2$  et maillée avec un seul élément de barre de type SEG2 (linéaire à deux nœuds). Disposée verticalement, cette barre est soumise à des forces de volume dues à son poids propre dont la résultante est égale à son poids total

$$P_T = \gamma \cdot A \cdot L$$

Vu l'absence de forces de surfaces  $\{f_S\} = \{0\}$ , l'expression (8-12b) se trouve réduite à :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega$$

Pour l'élément barre à deux nœuds, la matrice  $[N]$  (voir exemple 01 paragraphe 1.2 ci-dessus) s'écrit :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle$$

Pour leur part, les forces par unité de volume  $\{F_V\} = \gamma = \rho \cdot g$

En remplaçant  $[N]$  et  $\{F_V\}$  par leurs expressions respectives, on peut écrire :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot d\Omega$$

Or

$$d\Omega = A \cdot dx$$

Donc

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = A \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot dx$$

Moyennant le déterminant du Jacobien, on peut écrire :

$$dx = \det[J] \cdot d\xi = \frac{L}{2} \cdot d\xi$$

Ainsi, le calcul de cette intégrale dans l'élément de référence sera comme suit :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot A}{2} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{4} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot d\xi = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{4} \begin{Bmatrix} \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \xi + \frac{\xi^2}{2} \end{Bmatrix}_{-1}^{+1} = \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{2} \\ \frac{\gamma \cdot A \cdot L}{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P_T}{2} \\ \frac{P_T}{2} \end{Bmatrix}$$

L'interprétation physique de ce résultat consiste à remplacer le poids propre uniformément répartie dans la barre par deux forces nodales équivalentes dont l'intensité de chacune est égale à la moitié du poids total de la barre  $P_T$ .

## 5.2 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire TRI3 :

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t=3mm$  et modélisée dans l'espace  $(x,y)$  en 2D par un maillage composé d'un seul élément triangulaire à trois nœuds de type TRI3 dont les coordonnées sont affichées en centimètres (figure 06).

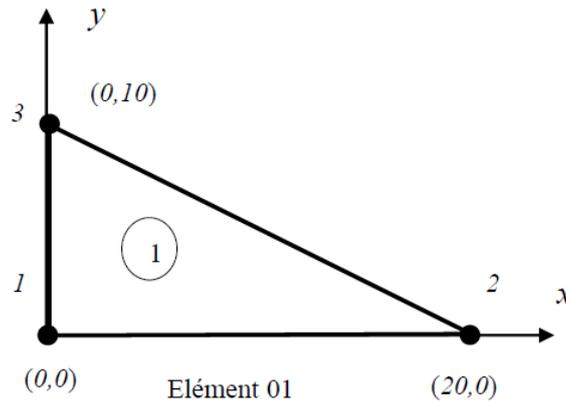


Figure 06 : paroi métallique mince de forme triangulaire

Cette paroi subit des pressions uniformes sur le côté 1-2 égales à  $p=50$  MPa. Calculer les forces nodales équivalentes à cette pression. Le poids propre de cette plaque est considéré comme négligeable.

**Solution**

Notre plaque étant modélisée en état bidimensionnel de contraintes planes avec un maillage composé d'un seul élément. Les coordonnées des nœuds étant mentionnées en cm sur la figure 06 ci-dessus, la résultante des forces de pression exercées sur le côté 1-2 est égale à :

$$R_T = p \cdot L_{1-2} \cdot t = 5 \times 20 \times 0.3 = 30 \text{ KN}$$

Vu l'absence de forces de volume  $\{F_V\} = \{0\}$ , le calcul des forces nodales équivalentes consiste à utiliser l'expression (8-12b) qui se trouve réduite à :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma \quad \text{avec} \quad \langle F_{(i)} \rangle = \langle F_{1x} \ F_{1y} \ F_{2x} \ F_{2y} \ F_{3x} \ F_{3y} \rangle$$

On associe cet élément réel à son élément de référence (figure 07). On rappelle que la matrice  $[N]$  a été introduite grâce à la relation :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\}$$

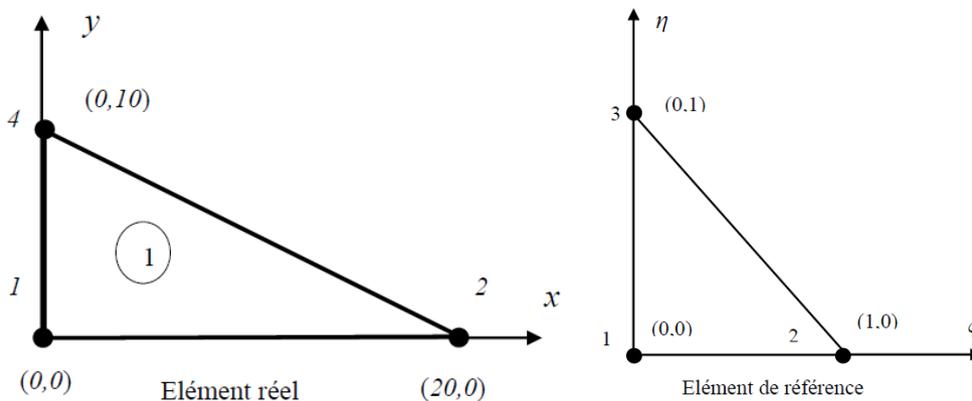


Figure 07 : Représentation de l'élément triangulaire réel 1 et de son élément de référence associé

Avec

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \rangle$$

Telle que :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Et

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Concernant le vecteur  $\{f_S\}$  représentant les forces par unité de surface, on peut écrire :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

$p$  : étant la pression exercée

Si on remplace la matrice  $[N]^T$  et le vecteur  $\{f_S\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{F(i)}} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = p \cdot \oint_{\Gamma_{F(i)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi - \eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} d\Gamma$$

Or  $\Gamma_{F(i)} = t \cdot (L_{1-2})$  car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-2 d'épaisseur  $t$ . Ce côté 1-2 est porté par l'axe  $x$  dans l'élément réel donc  $d\Gamma = t \cdot dx$

On peut donc écrire :

$$\{F_{(i)}\} = p \cdot t \cdot \oint_{L_{1-2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi - \eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} dx$$

Pour pouvoir intégrer dans l'élément de référence, il va falloir retrouver la relation  $x(\xi, \eta)$  qui nous permettra par la suite de remplacer  $dx$  par  $d\xi$  dans l'intégrale ci-dessus.

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \langle (1 - \xi - \eta) \quad \xi \quad \eta \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

Après développement :

$$x(\xi, \eta) = (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + x_1 = (20 - 0)\xi + (0 - 0)\eta + 0 = 20\xi$$

Finalement :

$$x(\xi, \eta) = 20\xi \text{ ce qui implique que } dx = 20. d\xi$$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté  $L_{1-2}$  de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $\eta = 0$ . D'où l'intégrale :

$$\{F_{(i)}\} = 20. p. t. \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi \\ \xi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi = 20. p. t. \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \frac{\xi^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_0^1 = 20. p. t. \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{1^2}{2} \\ \frac{1^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 20. p. t. \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10. p. t \\ 0 \\ 10. p. t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

L'interprétation de ce résultat consiste en l'égale répartition de la résultante totale  $R_T$  sur les deux nœuds du bord chargé de la plaque. Ces deux forces sont donc les forces nodales équivalentes aux forces par unité de surface (ou pressions) appliquées sur un coté de cette plaque (figure 08 ci-dessous).

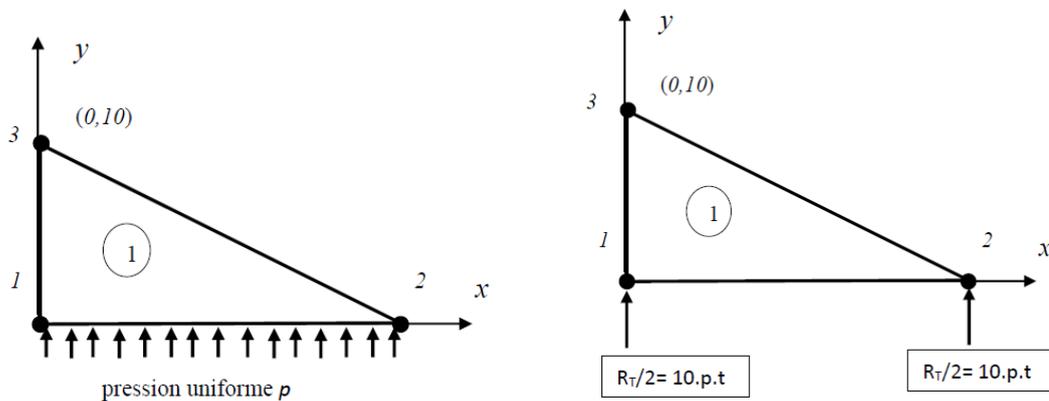


Figure 08 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds d'un triangle TRI3 d'épaisseur  $t$

### 5.3 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI3 adjacents :

En général, les maillages sont souvent composés de plusieurs éléments. En particulier, les zones situées aux frontières du maillage et soumises aux forces surfaciques extérieures sont également composées de plusieurs éléments adjacents. Il serait donc intéressant d'analyser la distribution sur ces frontières de ces forces nodales équivalentes à ces forces surfaciques et, par la suite, de les comparer.

A cet effet, considérons une plaque rectangulaire de longueur  $L$  et de faible épaisseur  $t$ . Cette plaque est modélisée en état bidimensionnel de contraintes planes avec un maillage composé d'éléments triangulaires linéaires de type TRI3. Cette plaque est soumise à des contraintes uniformes de compression  $p$  sur son côté longitudinal (figure 09 ci-dessous). De longueur constante et égale à  $(L/4)$ , chaque côté des quatre éléments est soumis à cette compression uniforme. Ainsi, la résultante des contraintes agissant sur chaque triangle est égale à  $(p.t.L/4)$ . L'extrapolation donne pour chaque triangle une égale répartition de cette résultante sur ses deux nœuds tel que chaque nœud du triangle recevra la moitié c'est-à-dire une force nodale égale à  $(p.t.L/8)$  (figure 10). Lorsqu'on additionne ces forces nodales lors de l'assemblage du vecteur force global, on obtient le résultat illustré sur le maillage de la figure 11 ci-dessous.

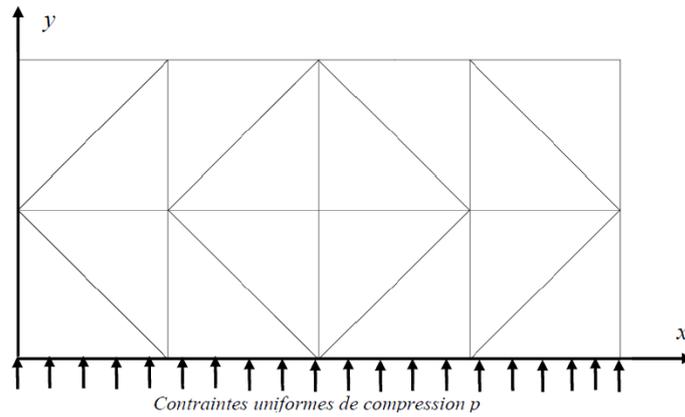


Figure 09 : plaque maillée avec des éléments TRI3, de longueur L et d'épaisseur t et soumise à des contraintes de compression uniformes

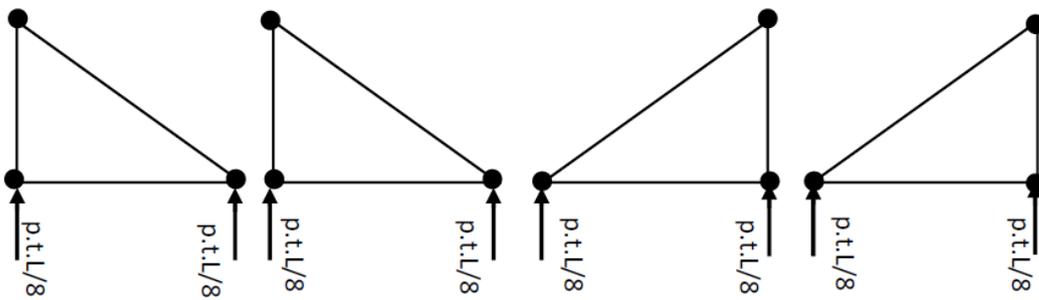


Figure 10 : Résultat de la première étape de calcul d'extrapolation de forces surfaciques p aux nœuds à l'intérieur de chaque triangle TRI3

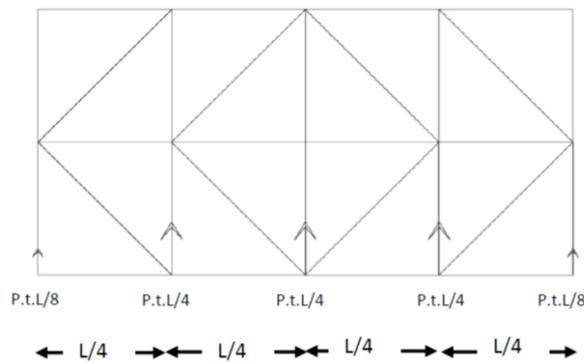


Figure 11 : Résultat de calcul après l'assemblage du vecteur forces globales

Ainsi, en observant les figures précédentes, on constate que la pression répartie de manière uniforme, se transforme en un ensemble de forces égales uniquement au niveau des nœuds intermédiaires. Les nœuds extrêmes reprennent la moitié des forces nodales appliquées au niveau des nœuds intermédiaires. Ce résultat concerne les éléments linéaires de degré 1. Qu'en est-il de la distribution des forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur les frontières des éléments de degré 2 (quadratiques) ? C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

#### 5.4 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur le côté d'un élément triangulaire quadratique TRI6 :

Reprenons l'exemple du paragraphe 5.2 de la paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t=3mm$  et modélisée cette fois par un maillage composé d'un élément triangulaire quadratique à six nœuds de type TRI6 (figure 12). Si on applique la formule d'extrapolation des efforts répartis que

nous rappelons ci-dessous, on trouve (figure 12 à droite) comme résultat que la résultante  $R_T$  ne se partage pas entre les nœuds de manière uniforme (voir exercice 03 ci-dessous). En effet, on constate que le nœud intermédiaire reprend les deux tiers de cette résultante  $R_T$  alors que les deux nœuds extrêmes reprennent chacun un sixième de  $R_T$ .

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

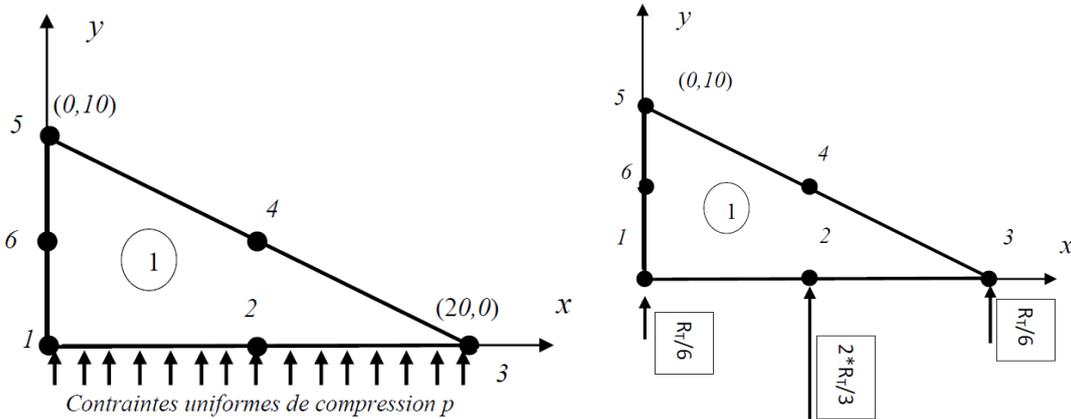


Figure 12 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds d'un triangle TRI6 d'épaisseur  $t$

**5.5 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur plusieurs triangles TRI6 adjacents :**

Concernant le cas de plusieurs éléments quadratiques (dans notre cas triangulaires de type TRI6) adjacents et soumis à une pression uniforme, reprenons le cas de la plaque rectangulaire du paragraphe 5.3. Cette plaque est cette fois modélisée en état bidimensionnel de contraintes planes avec un maillage composé d'éléments triangulaires quadratiques de type TRI6. Soumise à des contraintes uniformes de compression  $p$  sur son côté longitudinal (figure 09 ci-dessus), chaque côté des quatre triangles est donc soumis à cette compression uniforme dont la résultante (agissant sur chaque triangle) est égale à  $(R_T=p.t.L/4)$ . Comme déjà vu dans le paragraphe précédent 5.4, Les calculs d'extrapolation ont donné pour chaque triangle une répartition non uniforme de cette résultante telle que les deux nœuds extrêmes reçoivent chacun  $(R_T /6)$  alors que le nœud intermédiaire reçoit une force nodale égale à  $(2 \cdot R_T /3)$  (figure 13). Lorsqu'on additionne ces forces nodales lors de l'assemblage du vecteur force global, on obtient le résultat illustré sur le maillage de la figure 14 ci-dessous. Ainsi, on constate que plus on augmente le degré d'interpolation de nos éléments, plus l'allure de la distribution des forces nodales s'éloigne de l'allure réelle et uniforme de la distribution de la pression surfacique. Ce qui constitue un inconvénient.

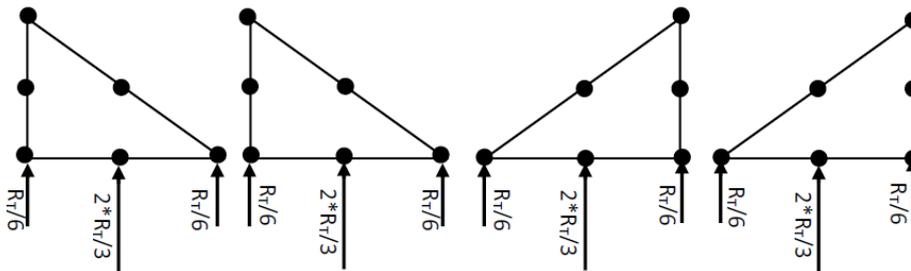


Figure 13 : Résultat de la première étape de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds à l'intérieur de chaque triangle TRI6

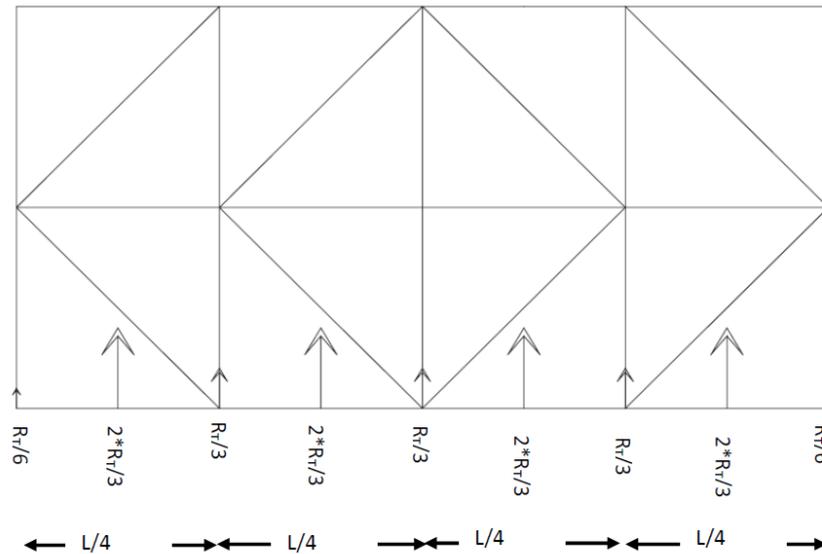


Figure 14 : Résultat des calculs après l'assemblage du vecteur forces globales

### 6 Calculs en état bidimensionnel de déformations planes : cas de la modélisation d'une digue de barrage d'eaux avec un élément triangulaire TRI3

Soit la digue en béton du barrage poids d'Oued-Fodda (wilaya de Chlef Algérie) de 190 m de longueur. La coupe transversale de cette digue présente une forme triangulaire avec une hauteur  $h=101\text{m}$  et une base en fondations  $b=68\text{ m}$  (figure 15). Dans le cadre d'un calcul préliminaire en état bidimensionnel 2D de déformations planes, on désire modéliser cette digue en comportement élastique avec un maillage composé d'un seul élément fini linéaire de type TRI3. Il est demandé de :

- 1- Calculer les forces nodales équivalentes au poids propre de cette digue
- 2- Calculer les forces nodales équivalentes aux pressions hydrostatiques exercées par les eaux retenues par cette digue.
- 3- Calculer la matrice de rigidité de cette digue
- 4- Le nœud 1 (appelé « talon ») étant bloqué uniquement en déplacement vertical ( $u_{y1}=0$ ) et le nœud 2 étant bloqué suivant les deux directions ( $u_{x2}=u_{y2}=0$ ), calculer le vecteur déplacement en crête du nœud 3 ( $u_{x3}= ?$  et  $u_{y3}= ?$ ) ainsi que le déplacement horizontal ( $u_{x1}= ?$ )

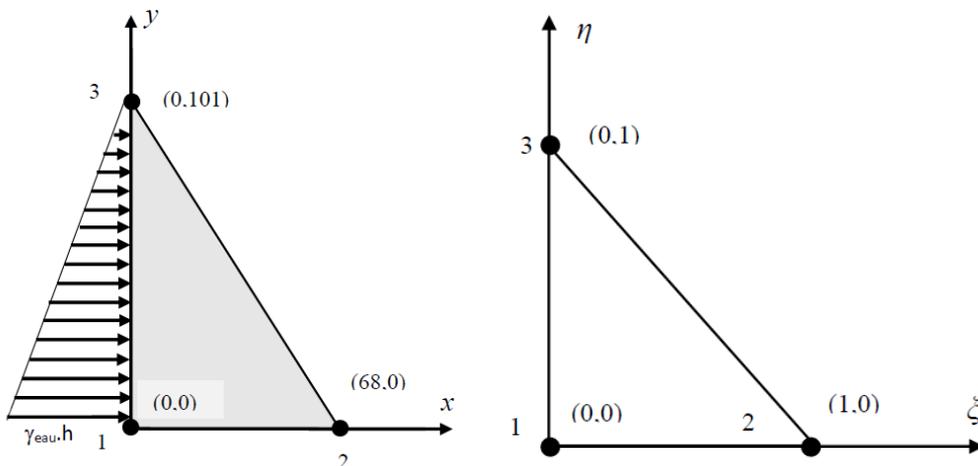


Figure 15 : Modélisation de la digue du barrage de Oued-Fodda soumise à une pression hydrostatique par un élément TRI3 (à gauche) associé à son élément de référence (à droite)

**Solution :**

1- Le Calcul des forces nodales équivalentes  $\{F_{(i)}\}$  au poids propre de la digue se fera selon l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega$$

Avec  $\langle F_{(i)} \rangle = \langle F_{1x} \ F_{1y} \ F_{2x} \ F_{2y} \ F_{3x} \ F_{3y} \rangle$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$

Concernant le vecteur  $\{F_V\}$  représentant le poids volumique (ou spécifique) de la digue, celui-ci possède deux composantes :

- Une composante nulle selon la direction horizontale ou bien l'axe x
- Une composante verticale portée par l'axe y égale à  $\gamma_b = 25 \text{ KN/m}^3$  mais dirigée vers le bas en sens contraire de l'orientation positive de l'axe y

Par conséquent :

$$\{F_V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -25 \end{Bmatrix}$$

Dans l'élément de référence, le calcul de  $\{F_{(i)}\}$  est donc comme suit :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{A_{réf}} [N]^T \cdot \{F_V\} \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta$$

Les composantes de  $\{F_V\}$  étant constantes, l'écriture du vecteur  $\{F_V\}$  reste inchangée aussi bien dans l'élément réel que de référence.

La matrice Jacobienne  $[J]$  et son déterminant sont comme suit :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

$$\det[J] = b \cdot h = 101 * 68 = 6868 \text{ m}^2$$

Si on remplace la matrice  $[N]^T$ ,  $\det[J]$  et le vecteur  $\{f_v\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

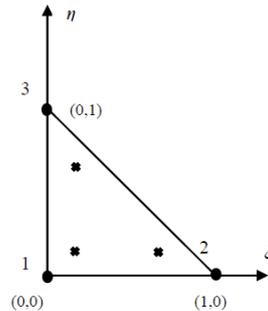
$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = \int_{A_{réf}} [N]^T \cdot \{F_V\} \cdot \det[J] \cdot d\xi \cdot d\eta = b \cdot h \int_{A_{réf}} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\gamma_b \end{Bmatrix} d\xi \cdot d\eta$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = -\gamma_b \cdot b \cdot h \int_{A_{réf}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 - \xi - \eta \\ 0 \\ \xi \\ 0 \\ \eta \end{Bmatrix} d\xi \cdot d\eta$$

Pour calculer l'intégrale ci-dessus dans l'élément de référence, on applique la méthode de quadrature de Gauss-Legendre. Les polynômes à intégrer  $(1 - \xi - \eta)$ ,  $\xi$  et  $\eta$  étant tous de degré 1, le choix d'un schéma d'intégration à trois points de Gauss  $r=3$  correspondant à la figure 3-c du tableau 02 du chapitre 06 (et qui est reproduit dans la figure ci-dessous) et dont l'ordre  $m=2$  vérifie la condition  $m \geq i+j$  donc  $m \geq 1$ . On rappelle que :

le premier point de Gauss est de coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = \frac{1}{6}$  avec un coefficient poids  $w_1 = \frac{1}{6}$   
 le second point de Gauss est de coordonnées  $\xi_2 = \frac{2}{3}$  et  $\eta_2 = \frac{1}{6}$  avec un coefficient poids  $w_2 = \frac{1}{6}$   
 le troisième point de Gauss est de coordonnées  $\xi_3 = \frac{1}{6}$  et  $\eta_3 = \frac{2}{3}$  avec un coefficient poids  $w_3 = \frac{1}{6}$



Ainsi, on peut calculer les intégrales ci-dessus comme suit :

$$\iint_{A_{réf}} (1 - \xi - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot (1 - \xi_1 - \eta_1) + w_2 \cdot (1 - \xi_2 - \eta_2) + w_3 \cdot (1 - \xi_3 - \eta_3)$$

$$\iint_{A_{réf}} (1 - \xi - \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\iint_{A_{réf}} \xi \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \xi_1 + w_2 \cdot \xi_2 + w_3 \cdot \xi_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\iint_{A_{réf}} \eta \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \eta_1 + w_2 \cdot \eta_2 + w_3 \cdot \eta_3 = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

Finalement

$$\{F_{(i)}\} = -\gamma_b \cdot b \cdot h \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, sachant que le poids total résultat d'un tronçon de digue de longueur unité est égal à

$$P_T = \frac{1}{2} \cdot \gamma_b \cdot b \cdot h \cdot 1$$

On constate que les calculs ont donné une égale répartition du poids total sur les trois nœuds. L'explication de ce résultat, qui semble irréaliste, réside dans le fait d'avoir utilisé un maillage très grossier composé uniquement d'un seul élément fini de type TRI3 et de degré 1.

2- Le calcul des forces nodales équivalentes aux pressions hydrostatiques exercées par les eaux en amont de la digue, consiste à utiliser l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

La matrice  $[N]$  ayant déjà été introduite dans la question précédente, quant au vecteur  $\{f_S\}$ , celui-ci possède deux composantes :

- Une première composante horizontale (selon l'axe  $x$ ) non nulle et dépendant de  $y$  telle que :  
 $f_{sx} = \gamma_{eau} \cdot (h - y)$  avec  $\gamma_{eau} = 10 \text{ KN/m}^3$
- Une seconde composante verticale (selon l'axe  $y$ ) nulle telle que :  $f_{sy} = 0$

Ainsi

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} f_{sx} \\ f_{sy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{eau} \cdot (h - y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \cdot (101 - y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, pour calculer  $\{F_{(i)}\}$  dans l'élément de référence, on doit trouver l'expression de la relation suivante :

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi, \eta) \cdot y_i = (1 - \xi - \eta) \cdot y_1 + \xi \cdot y_2 + \eta \cdot y_3 = 0 + 0 + \eta \cdot h$$

Donc

$$y(\xi, \eta) = h \cdot \eta \Rightarrow dy = h \cdot d\eta$$

Ainsi  $\{f_S\}$  s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{eau} \cdot (h - h \cdot \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \begin{Bmatrix} (1 - \eta) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si on remplace la matrice  $[N]^T$  et le vecteur  $\{f_S\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta \\ \xi & 0 \\ 0 & \xi \\ \eta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (1 - \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} \begin{Bmatrix} (1 - \xi - \eta)(1 - \eta) \\ 0 \\ \xi(1 - \eta) \\ 0 \\ \eta(1 - \eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\Gamma$$

Or  $\Gamma_{F_{(i)}} = e \cdot (L_{1-3}) = 1 \cdot (L_{1-3})$  car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-3 d'épaisseur *unité* ( $e=1m$ ). Ce côté 1-3 est porté par l'axe  $y$  dans l'élément réel. On peut donc intégrer dans l'élément de référence en remplaçant  $dy$  par  $(h \cdot d\eta)$  tel que :

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \oint_{L_{1-3}} \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} dy = \gamma_{eau} \cdot h \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} h \cdot d\eta$$

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\xi-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ \xi(1-\eta) \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta$$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté  $L_{1-3}$  de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à  $0 \leq \eta \leq 1$  et  $\xi = 0$ . D'où en remplaçant  $\xi$  par sa valeur, cette intégrale devient :

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} (1-\eta)(1-\eta) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta(1-\eta) \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \int_0^1 \begin{Bmatrix} 1-2\eta+\eta^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \eta-\eta^2 \\ 0 \end{Bmatrix} d\eta$$

$$\{F_{(i)}\} = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \begin{bmatrix} \eta - \eta^2 + \frac{\eta^3}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta^3}{3} \\ 0 \end{bmatrix}_0^1 = \gamma_{eau} \cdot h^2 \cdot \begin{bmatrix} 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce résultat montre qu'en utilisant l'élément linéaire TRI3 que le nœud 1 (dit talon de la digue) reprend une force nodale équivalente d'intensité égale à  $F_1 = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{3}$ , tandis que le nœud 3 (sommet ou crete de la digue) reprend une force nodale équivalente d'intensité égale à  $F_3 = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{6}$  (figure 16 ci-dessous).

On voit bien que la somme des deux forces nodales  $F_1$  et  $F_3$  est égale à la résultante des pressions hydrostatiques  $R_T = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{2}$

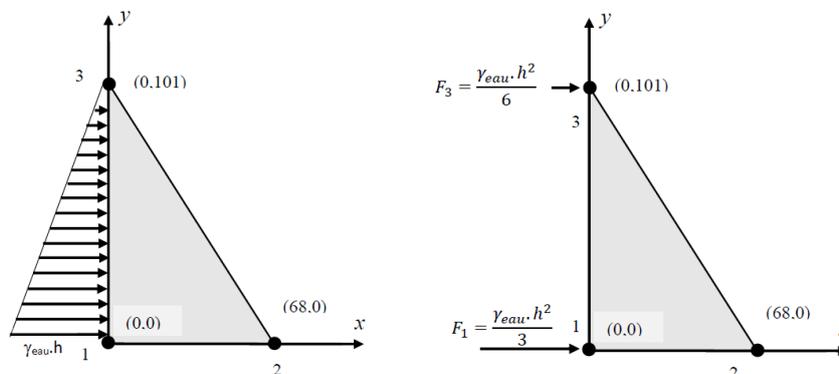


Figure 16-a : Forces nodales équivalentes (à droite) à une pression hydrostatique exercées sur la paroi verticale de la digue (à gauche).

3- La Matrice de rigidité de cette digue se calcule en état bidimensionnel de déformations planes selon la formule de l'expression (8-12a) telle que :

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(i)}} [B]^T \cdot [H_{DP}] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad (8-34)$$

La matrice de raideur reliant les contraintes aux déformations est issue de la relation en état de déformations planes :

$$\{\sigma\} = [H_{DP}] \cdot \{\varepsilon\}$$

Avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{DP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8-35)$$

et  $\sigma_z = \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\nu \cdot E}{(1-2\nu)(1+\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$

Sachant que le module d'élasticité transversale

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et en posant } a = 1-\nu \text{ et } b = \frac{(1-2\nu)}{2}, \text{ la matrice } [H_{DP}] \text{ s'écrit :}$$

$$[H_{DP}] = \frac{G}{b} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

En effet, la matrice  $[B]$  ayant déjà été calculée dans l'exemple 03 du paragraphe 03 ci-dessus, la matrice  $[H_{DP}]$  étant rappelée dans (8-35), il suffit donc de remplacer ces deux matrices par leurs expressions respectives dans (8-34) pour obtenir :

$$[K_{(1)}] = \frac{G}{bA^2} \int_{\Omega_{(1)}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} d\Omega$$

En faisant sortir tous les termes constants de l'intégrale, on obtient :

$$[K_{(i)}] = \frac{G}{b \cdot A^2} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \int_{\Omega_{(i)}} d\Omega$$

Puisque  $\int_{\Omega_{(i)}} d\Omega = A \cdot e = \text{volume de l'élément considéré}$ , et puisque on considère uniquement un tronçon de longueur unité tel que  $e = 1m$ , on aura la matrice de rigidité de la digue par unité de longueur :

$$[K_{(i)}] = \frac{G \cdot 1}{b \cdot A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & x_{32} \\ 0 & x_{32} & y_{23} \\ y_{31} & 0 & x_{13} \\ 0 & x_{13} & y_{31} \\ y_{12} & 0 & x_{21} \\ 0 & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \nu & 0 \\ \nu & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix}$$

Après calculs, on obtient finalement la matrice de rigidité élémentaire symétrique suivante :

$$[K_{(i)}] = \frac{G}{b \cdot A} \begin{bmatrix} (ay_{23}^2 + bx_{32}^2) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{32} + b \cdot x_{32} \cdot y_{23}) & (a \cdot y_{23} \cdot y_{31} + b \cdot x_{32} \cdot x_{13}) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{13} + b \cdot x_{32} \cdot y_{31}) & (a \cdot y_{23} \cdot y_{12} + b \cdot x_{32} \cdot x_{21}) & (v \cdot y_{23} \cdot x_{21} + b \cdot x_{32} \cdot y_{12}) \\ sym & (a \cdot x_{32}^2 + b \cdot y_{23}^2) & (v \cdot x_{32} \cdot y_{31} + b \cdot y_{23} \cdot x_{13}) & (a \cdot x_{32} \cdot x_{13} + b \cdot y_{23} \cdot y_{31}) & (v \cdot x_{32} \cdot y_{12} + b \cdot y_{23} \cdot x_{21}) & (a \cdot x_{32} \cdot x_{21} + b \cdot y_{23} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & (a \cdot y_{31}^2 + b \cdot x_{13}^2) & (v \cdot y_{31} \cdot x_{13} + b \cdot x_{13} \cdot y_{31}) & (a \cdot y_{31} \cdot y_{12} + b \cdot x_{13} \cdot x_{21}) & (v \cdot y_{31} \cdot x_{21} + b \cdot x_{13} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & sym & (a \cdot x_{13}^2 + b \cdot y_{31}^2) & (v \cdot x_{13} \cdot y_{12} + b \cdot y_{31} \cdot x_{21}) & (a \cdot x_{13} \cdot x_{21} + b \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & sym & sym & (a \cdot y_{12}^2 + b \cdot x_{21}^2) & (v \cdot y_{12} \cdot x_{21} + b \cdot x_{21} \cdot y_{12}) \\ sym & sym & sym & sym & sym & (a \cdot x_{21}^2 + b \cdot y_{12}^2) \end{bmatrix}$$

AN :

Si on adopte comme valeurs de propriétés matérielles du béton  $E= 30 \text{ GPa}$  et  $\nu=0.2$ , on aura

$$G = 12.5 \text{ GPa} = \frac{12.5 \cdot 10^9 \text{ N}}{\text{m}^2} = 12.5 \cdot 10^6 \text{ KN/m}^2, \quad a = 1 - 0.2 = 0.8 \text{ et } b = \frac{(1 - 2 \cdot 0.2)}{2} = 0.3$$

L'aire de la coupe transversale de la digue étant  $A = 68 \cdot \frac{101}{2} = 3434 \text{ m}^2$

Ainsi, la matrice symétrique de rigidité  $[K_{(1)}]$  s'écrit dans le système d'équations à résoudre comme suit:

$$\frac{12,5 \cdot 10^6 \cdot 10^3}{0.3 \cdot 3434} \cdot \begin{bmatrix} 9,548 & 3,434 & -8,1608 & -2,0604 & -1,3872 & -1,3736 \\ sym & 6,7595 & -1,3736 & -3,0603 & -2,0604 & -3,6992 \\ sym & sym & 8,1608 & 0,00 & 0,00 & 1,3736 \\ sym & sym & sym & 3,0603 & 2,0604 & 0,00 \\ sym & sym & sym & sym & 1,3872 & 0,00 \\ sym & sym & sym & sym & sym & 3,6992 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

4- Le nœud 1(ou bien le talon) étant bloqué uniquement en déplacement vertical ( $v_1 = 0$ ) et le nœud 2 étant bloqué selon les deux directions ( $u_2 = v_2 = 0$ ), calculer les composantes du vecteur-déplacements en crête du nœud 3 ( $u_3 = ?$  et  $v_3 = ?$ ) ainsi que le déplacement horizontal ( $u_1 = ?$ ) du nœud 1 (enfouissement horizontal du talon sous l'effet de la pression hydrostatique)

La détermination de ces déplacements exige la résolution du système d'équations précédent :

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}$$

Avec  $[K] = [K_{(1)}]$  car notre digue est maillée avec un seul élément TRI3

et  $\{U\} = \langle u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \rangle$  et  $\{F\} = \langle F_{x1} \ F_{y1} \ F_{x2} \ F_{y2} \ F_{x3} \ F_{y3} \rangle$

En tenant compte des conditions de blocage des nœuds citées ci-dessus telles que :  $v_1 = u_2 = v_2 = 0$ , donc les valeurs non nulles qui restent inconnues à déterminer sont  $u_1, u_3$  et  $v_3$ .

Ainsi le vecteur  $\{U\}$  s'écrit :  $\{U\} = \langle u_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ u_3 \ v_3 \rangle$ .

Par ailleurs, aux degrés de liberté des nœuds bloqués, correspondent des réactions d'appuis non nulles qui sont également des inconnues à déterminer  $F_{y1}, F_{x2}$  et  $F_{y2}$ .

Pour leur part,  $F_{x1}$  et  $F_{x3}$  représentent les forces nodales équivalentes à la poussée hydrostatique des eaux qui a été calculée (en prenant  $\gamma_{eau} = 9.81 \text{ KN/m}^3$ ) dans la question 02 ci-dessus et dont les valeurs sont :

$$F_{x1} = F_{tal} = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{3} = \frac{9.81 \cdot 101^2}{3} = 3,336 \cdot 10^4 \text{ KN} = 33360 \text{ KN}$$

$$F_{x3} = F_{cre} = \frac{\gamma_{eau} \cdot h^2}{6} = \frac{9.81 \cdot 101^2}{6} = 1,6679 \cdot 10^4 \text{ KN} = 16679 \text{ KN}$$

On applique également les forces nodales équivalentes verticale notées ici  $F_{NV}$  vers le bas (avec un signe négatif) dues au poids propres répartis de la digue telle qu'elles ont été déterminées dans la question 01 ci-dessus avec (en prenant comme poids spécifique du béton  $\gamma_b = 25 \text{ KN/m}^3$ ) :

$$F_{NV} = \frac{1}{6} * \gamma_b * base * hauteur = \frac{1}{6} * 25 * 68 * 101 = 2,8617 \cdot 10^4 \text{ KN} = 28617 \text{ KN}$$

Finalement le vecteur  $\langle F \rangle$  s'écrit :

$$\langle F \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \rangle = \langle F_{tal} \quad (F_{y1} - F_{NV}) \quad F_{x2} \quad (F_{y2} - F_{NV}) \quad F_{cre} \quad -F_{NV} \rangle$$

AN :

$$\langle F \rangle = 10^4 \langle 3,336 \quad (F_{y1} - 2,8617) \quad F_{x2} \quad (F_{y2} - 2,8617) \quad 1,6679 \quad -2,8617 \rangle$$

Ainsi, en remplaçant les composantes des vecteurs  $\{U\}$  et  $\{F\}$  par leurs valeurs respectives dans le système d'équations précédent, on obtient finalement le système suivant :

$$10^6 * \begin{bmatrix} 7.2407 & 2.6042 & -6.1887 & -1.5625 & -1.052 & -1.0417 \\ 2.6042 & 5.1261 & -1.0417 & -2.3208 & -1.5625 & -2.8053 \\ -6.1887 & -1.0417 & 6.1887 & 0.00 & 0.00 & 1.0417 \\ -1.5625 & -2.3208 & 0.00 & 2.3208 & 1.5625 & 0.00 \\ -1.052 & -1.5625 & 0.00 & 1.5625 & 1.0520 & 0.00 \\ -1.0417 & -2.8053 & 1.0417 & 0.00 & 0.00 & 2.8053 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 \\ 0 \\ v_3 \end{bmatrix} = 10^4 * \begin{cases} 3,336 & (01) \\ F_{y1} - 2,8617 & (02) \\ F_{x2} & (03) \\ F_{y2} - 2,8617 & (04) \\ 1,6679 & (05) \\ -2,8617 & (06) \end{cases}$$

Après résolution du sous-système formé par les équations (01), (05) et (06), on trouve sous les effets combinés du poids propre de la digue et de la poussée hydrostatique les résultats suivants :

- Le glissement horizontal du talon est égal à  $u_1 = 1,7 \text{ mm}$
- Le déplacement horizontal du sommet de la digue (de la crête) :  $u_3 = 5,66 \text{ mm}$
- Le déplacement vertical du sommet de la digue (de la crête) :  $v_3 = -1,92 \text{ mm}$

On constate que ces déplacements sont assez faibles. On peut retrouver ces valeurs en utilisant le logiciel CAST3M pour un modèle composé d'un maillage à seul un élément TRI3. Les résultats obtenus sont illustrés en figure 16-b ci-dessous. Toutefois, ce maillage étant très grossier, un maillage plus raffiné utilisant un grand nombre d'éléments donnera des résultats plus précis.

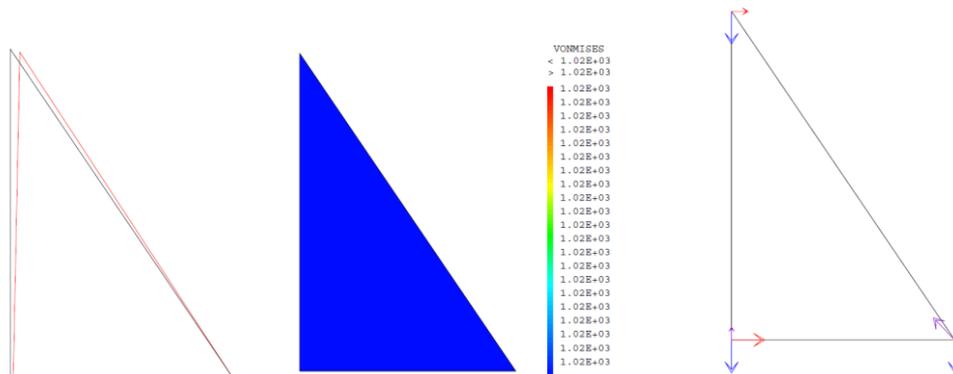


Figure 16-b : Forme déformée ( en rouge) et non déformée (en bleu), champ de contraintes (au milieu), et forces nodales équivalentes ainsi que les réactions aux appuis (à droite)

En ce qui concerne les réactions nodales, si on remplace les composantes trouvées précédemment par leurs valeurs dans les équations (02), (03) et (04), on trouve :

- Comme réaction verticale du sol au niveau du talon une force  $F_{y1}$  positive (dirigée vers le haut) et d'intensité  $F_{y1} = 3.2461 \cdot 10^4 \text{ KN}$  .
- Comme réaction horizontale du sol au niveau du nœud 2 une force  $F_{x2}$  négative (dirigée dans le sens contraire de la poussée des eaux) et d'intensité  $F_{x2} = -5.0039 \cdot 10^4 \text{ KN}$  .
- Comme réaction verticale du sol au niveau du nœud 2 une force  $F_{y2}$  positive (dirigée vers le haut) et d'intensité  $F_{y2} = 5.3392 \cdot 10^4 \text{ KN}$  .

## 7 Calculs en état bidimensionnel 2D de contraintes planes : cas de la modélisation d'une plaque rectangulaire avec un élément quadrangulaire QUA4

Reprendre le cas de la plaque étudiée dans les exemples 08 et 11 du chapitre 05. On rappelle qu'il s'agit d'une plaque rectangulaire en acier de 20 cm de longueur et de 10 cm de largeur et modélisée en état bidimensionnel 2D de contraintes planes avec un maillage composé d'un seul élément fini quadrangulaire de type QUA4 (figure 17). Le poids propre de cette plaque de faible épaisseur  $t=3\text{mm}$  est considéré comme négligeable.

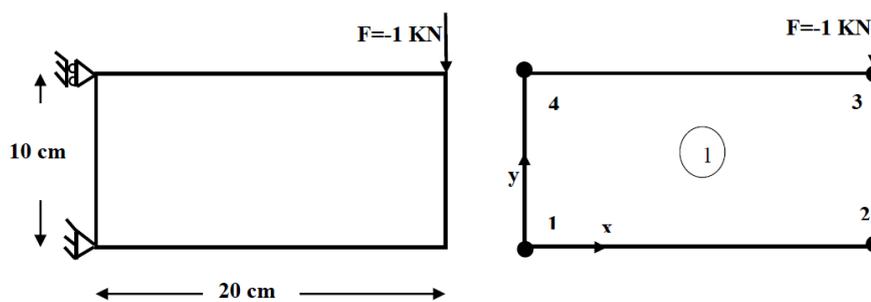


Figure 17 : Schéma de la plaque (à gauche) et son maillage EF avec un seul élément de type QUA4 (à droite).

Il est demandé de :

- 1- Calculer la matrice de rigidité de cette plaque en prenant  $E=210000\text{MPa}$  et  $\nu = 0.3$
- 2- Les nœuds 1 et 4 étant bloqués tels que  $u_1 = v_1 = u_4 = 0$ , calculer les vecteurs déplacements du nœud 2 ( $u_2 = ?$   $v_2 = ?$ ), du nœud 3 ( $u_3 = ?$   $v_3 = ?$ ) et du nœud 4  $v_4 = ?$
- 3- Calculer les composantes des vecteurs réactions nodales au niveau des nœuds bloqués ( $F_{x1} = ?$   $F_{y1} = ?$  et  $F_{x4} = ?$ )

### Solution :

- 1- Calcul de la matrice de rigidité

Cette plaque se trouvant sous un état bidimensionnel de contraintes planes en comportement élastique, on rappelle que la relation de Hooke contraintes-déformations est comme suit :

$$\{\sigma\} = [H_{CP}] \cdot \{\varepsilon\}$$

avec

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [H_{CP}] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

Par ailleurs, maillée avec un seul élément, la matrice de rigidité de cette plaque est égale à celle de l'élément QUA4 et son calcul se fera en appliquant la formule de l'expression (8-12a) :

$$[K] = [K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} [B]^T \cdot [H_{CP}] \cdot [B] \cdot d\Omega.$$

La matrice  $[H_{CP}]$  est donc donnée par la relation de Hooke ci-dessus. Pour sa part, la matrice  $[B]$  de cet élément QUA4 peut être obtenue comme suit :

Tout d'abord, on commence par associer l'élément réel à son élément de référence (figure 18) dont les relations et la matrice Jacobienne ont déjà été obtenues les exemples 08 et 11 du chapitre 05 sus cités, et que nous rappelons les expressions,.

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = 10(1 + \xi) \\ y(\xi, \eta) = 5(1 + \eta) \end{cases}$$

ainsi que celle de la matrice Jacobienne :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et de son déterminant  $det[J] = 50$

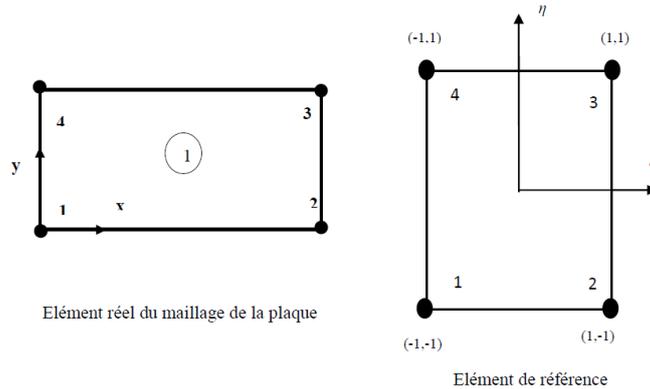


Figure 18 : élément réel du la plaque (à gauche) et son élément de référence associé (à droite)

Le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  étant défini comme suit :

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rangle$$

Le champ de déplacement étant à deux composantes, il s'écrit dans l'élément de référence comme suit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

On définit dans l'élément de référence, le champ de déformations comme suit :

$$\{\varepsilon(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (8-25)$$

Or les fonctions d'interpolations et leurs dérivées partielles sont comme suit :

$i$	$N_i(\xi, \eta)$	$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta}$
1	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 + \xi)$
2	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \xi)$
3	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$
4	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$

En les remplaçant dans l'expression (8-25) précédente, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1 + \eta) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (1 + \eta) & 0 & (-1 - \eta) & 0 \\ (-1 + \xi) & 0 & (-1 - \xi) & 0 & (1 + \xi) & 0 & (1 - \xi) & 0 \\ 0 & (-1 + \eta) & 0 & (1 - \eta) & 0 & (1 + \eta) & 0 & (-1 - \eta) \\ 0 & (-1 + \xi) & 0 & (-1 - \xi) & 0 & (1 + \xi) & 0 & (1 - \xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

Par ailleurs, la matrice Jacobienne  $[J]$  étant connue :

$$[J] = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

et son déterminant  $\det[J] = 50$

La matrice inverse  $[j] = [J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$

peut être utilisée comme suit (voir paragraphe 4 chapitre 03) :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$\text{et } \begin{Bmatrix} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [j] \begin{Bmatrix} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

En développant cette écriture matricielle, on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0.1 \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0.2 \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0.1 \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0.2 \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases} \quad (8-27)$$

Par ailleurs, le vecteur-déformations  $\langle \varepsilon \rangle$  dans l'élément réel est connu par ses composantes suivantes :

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy} \rangle = \left\langle \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \quad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \left( \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \right) \right\rangle$$

Si on remplace ces composantes par leurs expressions établies en (8-27), on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \end{cases} \quad (8-27)$$

D'autre part, en remplaçant le vecteur  $\left\langle \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta} \right\rangle$  par son expression établie en (8-26) dans (8-27), on aura :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0.2 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) & 0 \\ 0 & (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) \\ 0 & (-1+\xi) & 0 & (-1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{cases}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \end{cases} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & 2(-1+\xi) & 0 & 2(-1-\xi) & 0 & 2(1+\xi) & 0 & 2(1-\xi) \\ 2(-1+\xi) & (-1+\eta) & 2(-1-\xi) & (1-\eta) & 2(1+\xi) & 0 & (1+\eta) & 2(1-\xi) \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{cases}$$

En tenant compte de la définition de la matrice  $[B]$  telle qu'elle a été introduite en (8-04), dans laquelle on a :

$$\{\varepsilon\} = [B].\{U_{n(i)}\} \quad (8-30)$$

En comparant les deux dernières expressions ci-dessus (8-29) et (8-30), la matrice  $[B]$  peut être déduite par identification comme suit :

$$[B] = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & 2(-1+\xi) & 0 & 2(-1-\xi) & 0 & 2(1+\xi) & 0 & 2(1-\xi) \\ 2(-1+\xi) & (-1+\eta) & 2(-1-\xi) & (1-\eta) & 2(1+\xi) & (1+\eta) & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix}$$

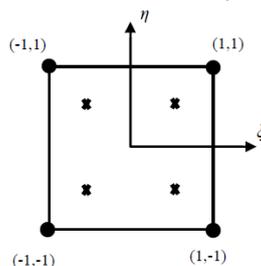
On constate cette fois dans (8-31) que les termes de la matrice  $[B]$  ne sont pas constants et dépendent linéairement soit de  $\xi$  soit de  $\eta$ . Ce qui permet de déduire que le champ de déformations (et donc de contraintes) évolue également manière linéaire à l'intérieur de l'élément quadrangulaire QUA4.

$$[K_{(i)}] = \frac{E}{40^2(1-\nu^2)} \int_{\Omega_{(i)}} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & 2(-1+\xi) \\ 0 & 2(-1+\xi) & (-1+\eta) \\ (1-\eta) & 0 & 2(-1-\xi) \\ 0 & 2(-1-\xi) & (1-\eta) \\ (1+\eta) & 0 & 2(1+\xi) \\ 0 & 2(1+\xi) & (1+\eta) \\ (-1-\eta) & 0 & 2(1-\xi) \\ 0 & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1+\eta) & 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) & 0 & (-1-\eta) & 0 \\ 0 & 2(-1+\xi) & 0 & 2(-1-\xi) & 0 & 2(1+\xi) & 0 & 2(1-\xi) \\ 2(-1+\xi) & (-1+\eta) & 2(-1-\xi) & (1-\eta) & 2(1+\xi) & (1+\eta) & 2(1-\xi) & (-1-\eta) \end{bmatrix} \det[J] d\xi d\eta$$

Après développements, on obtient la matrice de rigidité élémentaire symétrique en page suivante. Pour calculer les intégrales des termes de la matrice de rigidité ci-dessous, on applique la méthode de Gauss-Legendre à ces fonctions polynomiales qui sont toutes de degré 02 tel que le monôme le plus élevé est de la forme  $\xi^i \cdot \eta^j$  avec  $i + j = 2$ . Ainsi, pour avoir une intégration exacte, on doit adopter un schéma d'intégration dont l'ordre  $m$  vérifie la condition  $m \geq i+j$  donc  $m \geq 2$ . En adoptant une valeur pour  $m$  vérifiant la condition précédente et telle que  $m=3$ , on choisit le schéma d'intégration à  $r=4$  points de Gauss de la figure 04-c qui est reproduite ci-dessous. Ce qui nous permet de calculer ces intégrales telles que la lecture du tableau 03 du chapitre 06, pour ce schéma d'intégration permette d'écrire :

$$\iint_{A_{réf}} \varphi(\xi, \eta) \cdot d\xi \cdot d\eta = \sum_{i=1}^4 w_i \cdot \varphi(\xi_i, \eta_i) = w_1 \cdot \varphi(\xi_1, \eta_1) + w_2 \cdot \varphi(\xi_2, \eta_2) + w_3 \cdot \varphi(\xi_3, \eta_3) + w_4 \cdot \varphi(\xi_4, \eta_4)$$

- Le premier point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_1 = \eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_1 = 1$
- Le second point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $\eta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_2 = 1$
- Le troisième point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_3 = \eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_3 = 1$
- Le quatrième point de Gauss a pour coordonnées  $\xi_4 = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \eta_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  et un coefficient poids  $w_4 = 1$



$$\begin{aligned}
& [K_{(1)}] \\
& = \frac{50.E}{40^2.(1-\nu^2)} \int_{\Omega_{REF}} \left[ \begin{array}{cccccccc}
\frac{(\eta-1)^2 + 2(\xi-1)^2(1-\nu)}{2} & (\eta-1)(\xi-1)(1+\nu) & \frac{-(1-\eta)^2}{-2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{\xi(1-\eta)(1+\nu) + (1-\eta)(3\nu-1)}{(1-\eta)(3\nu-1)} & \frac{(\eta^2-1) + 2(\xi^2-1)(1-\nu)}{2} & \frac{2\nu(\eta-1)(1+\xi) + (\xi-1)(1+\eta)(1-\nu)}{(\xi-1)(1+\eta)(1-\nu)} & \frac{(1-\eta^2) - 2(1-\xi)^2(1-\nu)}{2(1-\xi)^2(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1-\xi) + (1+\nu)\eta(1-\xi)}{(1+\nu)\eta(1-\xi)} \\
(\eta-1)(\xi-1)(1+\nu) & 4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu) & \frac{(1+\nu)(1-\eta)\xi + (1-\eta)(1-3\nu)}{(1-\eta)(1-3\nu)} & \frac{4(1-\xi^2) - \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)}{2} & \frac{2\nu(\xi-1)(1+\eta) + (1-\nu)(\eta-1)(1+\xi)}{(\xi-1)(1+\eta)(1-\nu)} & \frac{4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(\eta^2-1)(1-\nu)}{2} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{(1-\xi)(3\nu-1)} & -4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\nu) \\
\frac{-(1-\eta)^2}{-2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)(1-\eta)\xi + (1-\eta)(1-3\nu)}{(1-\eta)(1-3\nu)} & \frac{(\eta-1)^2 + 2(\xi+1)^2(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & (\eta-1)(\xi+1)(1+\nu) & \frac{(1-\eta)^2}{-2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{-(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{(3\nu-1)(1+\xi)} & \frac{(\eta^2-1) + 2(\xi^2-1)(1-\nu)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{2\nu(1-\eta)(1-\xi) + (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)}{(1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)} \\
\xi(1-\eta)(1+\nu) + (1-\eta)(3\nu-1) & \frac{4(1-\xi^2) - \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)}{2} & \frac{(\eta-1)(\xi+1)(1+\nu)}{(1-\eta)(\xi+1)(1+\nu)} & \frac{4(\xi+1)^2 + \frac{1}{2}(\eta-1)^2(1-\nu)}{2} & \frac{(1-3\nu)(1+\xi) - (1+\nu)\eta(1+\xi)}{-(1+\nu)\eta(1+\xi)} & \frac{-4(\xi+1)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\nu)}{2} & \frac{2\nu(\xi+1)(1+\eta) + (1-\nu)(1-\eta)(1-\xi)}{(1-\nu)(1-\eta)(1-\xi)} & \frac{4(\xi^2-1) + \frac{1}{2}(\eta^2-1)(1-\nu)}{2} \\
\frac{(\eta^2-1) + 2(\xi^2-1)(1-\nu)}{2} & \frac{2\nu(\xi-1)(1+\eta) + (1-\nu)(\eta-1)(1+\xi)}{(1-\nu)(\eta-1)(1+\xi)} & \frac{(1-\eta)^2}{-2(\xi+1)^2(1-\nu)} & \frac{(1-3\nu)(1+\xi) - (1+\nu)\eta(1+\xi)}{-(1+\nu)\eta(1+\xi)} & \frac{(\eta+1)^2 + 2(\xi+1)^2(1-\nu)}{2(\xi+1)^2(1-\nu)} & (\eta+1)(\xi+1)(1+\nu) & \frac{-(1+\eta)^2}{+2(1-\xi^2)(1-\nu)} & \frac{(3\nu-1)(1+\eta) - (1+\nu)\xi(1+\eta)}{-(1+\nu)\xi(1+\eta)} \\
\frac{2\nu(\eta-1)(1+\xi) + (\xi-1)(1+\eta)(1-\nu)}{(\xi-1)(1+\eta)(1-\nu)} & 4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(\eta^2-1)(1-\nu) & \frac{-(1+\nu)\eta(1+\xi) + (3\nu-1)(1+\xi)}{+(3\nu-1)(1+\xi)} & \frac{-4(\xi+1)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\nu)}{2} & \frac{(\eta+1)(\xi+1)(1+\nu)}{+(\eta+1)(\xi+1)(1+\nu)} & \frac{4(1+\xi^2) + \frac{1}{2}(\eta+1)^2(1-\nu)}{2} & \frac{(1+\eta)(1-3\nu) - (1+\nu)\xi(1+\eta)}{-(1+\nu)\xi(1+\eta)} & \frac{4(1-\xi^2) - \frac{1}{2}(\eta+1)^2(1-\nu)}{2} \\
\frac{(1-\eta^2) - 2(1-\xi)^2(1-\nu)}{2(1-\xi)^2(1-\nu)} & \frac{(1+\nu)\eta(1-\xi) + (1-\xi)(3\nu-1)}{+(1-\xi)(3\nu-1)} & \frac{(\eta^2-1) + 2(\xi^2-1)(1-\nu)}{2(\xi^2-1)(1-\nu)} & \frac{2\nu(\xi+1)(1+\eta) + (1-\nu)(1-\eta)(1-\xi)}{+(1-\nu)(1-\eta)(1-\xi)} & \frac{-(1+\eta)^2}{+2(1-\xi^2)(1-\nu)} & \frac{(1+\eta)(1-3\nu) - (1+\nu)\xi(1+\eta)}{-(1+\nu)\xi(1+\eta)} & \frac{(\eta+1)^2 + 2(\xi-1)^2(1-\nu)}{2(\xi-1)^2(1-\nu)} & (\eta+1)(\xi-1)(1+\nu) \\
\frac{(1-3\nu)(1-\xi) + (1+\nu)\eta(1-\xi)}{+(1+\nu)\eta(1-\xi)} & -4(\xi-1)^2 + \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\nu) & \frac{2\nu(1-\eta)(1-\xi) + (1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)}{(1+\xi)(1+\eta)(1-\nu)} & \frac{4(\xi^2-1) + \frac{1}{2}(\eta^2-1)(1-\nu)}{2} & \frac{(3\nu-1)(1+\eta) - (1+\nu)\xi(1+\eta)}{-(1+\nu)\xi(1+\eta)} & \frac{4(1-\xi^2) - \frac{1}{2}(\eta+1)^2(1-\nu)}{2} & \frac{(\eta+1)(\xi-1)(1+\nu) + \nu}{+(\eta+1)(\xi-1)(1+\nu)} & \frac{4(1-\xi^2) + \frac{1}{2}(\eta+1)^2(1-\nu)}{2}
\end{array} \right] d\xi.d\eta
\end{aligned}$$

Après intégration numérique et en adoptant comme valeurs des propriétés matérielles de l'acier  $E=210000\text{MPa}=21000\text{ KN/cm}^2$  et  $\nu=0.3$ , la matrice symétrique de rigidité  $[K_{(i)}]$  s'écrit finalement :

$$[K_{(1)}] = (721.154)^* \begin{bmatrix} 20.267 & 5.20 & 9.067 & -0.4 & -6.4 & -5.2 & -7.787 & -2.4 \\ 5.20 & 87.2 & 0.4 & 8.8 & -5.2 & -11.6 & -0.4 & 86.267 \\ 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 & -2.133 & -0.4 & -6.4 & 5.2 \\ -0.4 & 8.8 & -5.2 & 23.2 & 0.4 & -20.4 & 5.2 & -11.6 \\ -6.4 & -5.2 & -2.133 & 0.4 & 12.8 & 5.2 & 9.067 & -0.4 \\ -5.2 & -11.6 & -0.4 & -20.4 & 5.2 & 23.2 & 0.4 & 8.8 \\ -7.787 & -0.4 & -6.4 & 5.2 & 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 \\ -2.4 & 86.267 & 5.2 & -11.6 & -0.4 & 8.8 & -5.2 & 87.2 \end{bmatrix} \text{KN/cm}^2$$

En tenant compte des conditions aux limites, le vecteur déplacement  $\langle U_{n(i)} \rangle$  s'écrit comme suit :

$$\langle U_{(1)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad 0 \quad v_4 \rangle$$

Le vecteur force nodales est comme suit :

$$\langle F_{(1)} \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \quad F_{x4} \quad F_{y4} \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad F_{x4} \quad F_{y4} \rangle$$

Le système d'équations à résoudre :

$$[K_{(1)}]\{U_{(1)}\} = \{F_{(1)}\}$$

s'écrit finalement comme suit :

$$(721.154)^* \begin{bmatrix} 20.267 & 5.20 & 9.067 & -0.4 & -6.4 & -5.2 & -7.787 & -2.4 \\ 5.20 & 87.2 & 0.4 & 8.8 & -5.2 & -11.6 & -0.4 & 86.267 \\ 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 & -2.133 & -0.4 & -6.4 & 5.2 \\ -0.4 & 8.8 & -5.2 & 23.2 & 0.4 & -20.4 & 5.2 & -11.6 \\ -6.4 & -5.2 & -2.133 & 0.4 & 12.8 & 5.2 & 9.067 & -0.4 \\ -5.2 & -11.6 & -0.4 & -20.4 & 5.2 & 23.2 & 0.4 & 8.8 \\ -7.787 & -0.4 & -6.4 & 5.2 & 9.067 & 0.4 & 12.8 & -5.2 \\ -2.4 & 86.267 & 5.2 & -11.6 & -0.4 & 8.8 & -5.2 & 87.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ F_{x4} \\ F_{y4} \end{Bmatrix} \begin{matrix} (01) \\ (02) \\ (03) \\ (04) \\ (05) \\ (06) \\ (07) \\ (08) \end{matrix}$$

La résolution de ce système d'équations consiste à trouver d'abord les valeurs des déplacements  $u_2, v_2, u_3$  et  $v_3$  et ce, en résolvant le sous-système formé par les équations (03), (04), (05) et (06) dont la solution est comme suit :

$$u_2 = -2.024 \cdot 10^{-04} \text{ cm}, \quad v_2 = -6.81 \cdot 10^{-04} \text{ cm}, \quad u_3 = 2.31 \cdot 10^{-04} \text{ cm}, \quad v_3 = -7.048 \cdot 10^{-04} \text{ cm} \text{ et } v_4 = -2.38 \cdot 10^{-04} \text{ cm}$$

En remplaçant ces valeurs trouvées dans les équations (01), (02), (07) et (08), on trouve directement les valeurs des réactions suivantes :

$$F_{x1} = 2 \text{ KN}, \quad F_{y1} = 1 \text{ KN}, \quad F_{x4} = -2 \text{ KN} \text{ et } F_{y4} = 0 \text{ KN}$$

## 8 Exercices corrigés de la série de TD N°06

### 8.1 Exercice 01 : barre tendue de section variable

Soit une barre rectiligne en acier de sections transversales à aires variables et de longueur  $L=50\text{cm}$ . La variation de ces aires est linéaire telle que l'aire de la section de l'extrémité 1 d'abscisse  $x_1=0$  est  $A_1=1\text{ cm}^2$  tandis que l'autre section d'extrémité 2 d'abscisse  $x_2=50\text{ cm}$ , possède une aire  $A_2=2\text{ cm}^2$ . La section 1 d'aire  $A_1$  est bloquée en déplacements. Par contre, la section d'aire  $A_2$  est soumise à une force centrée  $F$  de traction portée par l'axe longitudinal  $x$  et d'intensité  $F=50\text{ KN}$  (figure 19). En supposant un comportement élastique linéaire, il est demandé :

- 1- d'établir la matrice de rigidité de cette barre modélisée en EF par un seul élément unidimensionnel linéaire à deux nœuds de type SEG2 (figure 20).
- 2- de calculer le déplacement du nœud 2 tout en sachant que le module d'Young de cet acier est  $E=210000$  MPa.

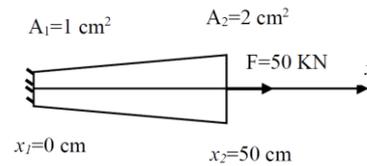


Figure 19 : barre tendue de section variable.

**Solution :**

On modélise cette barre dans l'espace unidimensionnel 1D par un seul élément linéaire de type SEG2 et on lui associe son élément de référence (figure 20).

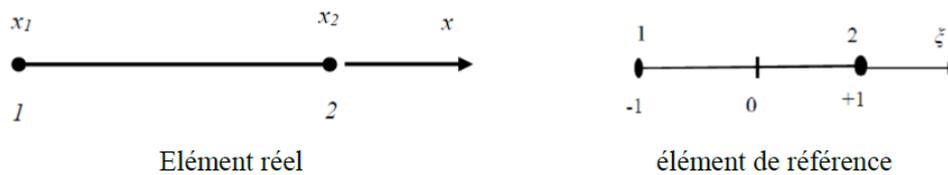


Figure 20 : maillage de la barre par un seul élément SEG2 et son élément de référence associé

- 1- L'établissement de la matrice de rigidité de cette barre s'effectue selon la formule

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot d\Omega.$$

Puisque nous sommes en traction unidimensionnelle 1D, les tenseurs des contraintes et des déformations s'écrivent pour tout point d'abscisse  $x$ :

$$\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle = \langle \sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle$$

En tenant compte des valeurs précédentes des composantes de  $\langle \sigma \rangle$  et  $\langle \varepsilon \rangle$ , la relation de Hooke contraintes déformation  $\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\}$  donne  $[H] = E$

Nous avons vu que dans l'exemple 01 du paragraphe 3.1 ci-dessus, que la matrice  $[B]$  a comme expression :

$$[B] = \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle \text{ et } [B]^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{array} \right\}$$

Par conséquent, en substituant les matrices  $[B]$  et  $[H]$  par leurs valeurs respectives plus haut dans l'expression de  $[K_{(1)}]$ , on peut écrire:

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} \left\{ \begin{array}{c} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{array} \right\} \cdot E \cdot \left\langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \right\rangle d\Omega$$

Or pour tout point d'abscisse  $x$ ,  $d\Omega = A(x) \cdot dx$  avec  $A(x)$  une fonction linéaire en  $x$  de la forme :

$$A(x) = a \cdot x + b \quad \text{telle que pour } x=x_1=0, \quad A(x) = A(0) = 0 + b = b = A_1$$

Et pour  $x=x_2=L$ ,  $A(x) = A(L) = a \cdot L + A_1 = A_2$  ce qui implique que  $a = \frac{A_2 - A_1}{L}$

Ainsi, l'expression de  $A(x)$  est comme suit :  $A(x) = \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1$  donc  $d\Omega = A(x) \cdot dx = \left( \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1 \right) \cdot dx$

En remplaçant  $d\Omega$  par son expression et en faisant sortir tous les termes constants à l'extérieur de l'intégrale, on peut écrire :

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -1 & 1 \end{Bmatrix} \int_0^L \left( \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1 \right) \cdot dx = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left[ \left[ \frac{(A_2 - A_1)x^2}{2L} \right]_0^L + [A_1 x]_0^L \right]$$

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{(A_2 - A_1)L^2}{2L} + A_1 L \right] = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{(A_2 L - A_1 L)}{2} + \frac{2 \cdot A_1 \cdot L}{2} \right]$$

Finalement :

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[ \frac{(A_2 + A_1)L}{2} \right] = \frac{E(A_2 + A_1)}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A.N :

$$[K_{(1)}] = \frac{21000(2+1)}{2 \cdot 50} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 630 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Le déplacement du nœud 2  $u_2 = ?$

Puisque notre maillage est composé d'un seul élément, l'équation d'équilibre global  $[K] \cdot \{U\} = \{F\}$  est réduite à celle de l'élément telle que  $[K] = [K_{(1)}]$ ,  $\{U\} = \{U_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$  et  $\{F\} = \{F_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Donc le système à résoudre consiste :

$$[K_{(1)}] \cdot \{U_{(1)}\} = \{F_{(1)}\}$$

Si on remplace chaque terme par son expression respective, on aura :

$$630 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Or le nœud 1 étant bloqué donc  $u_1 = 0$  et le nœud 2 étant soumis à une force  $F$  orientée positivement selon l'axe  $x$  donc  $F_2 = F = 50 \text{ KN}$ . En remplaçant ces valeurs dans le système d'équations précédent, on aura :

$$630 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

De la deuxième équation de ce système, on tire :

$$630 \cdot u_2 = 50 \Rightarrow u_2 = \frac{50}{630} = 0.079 \text{ cm}$$

Par ailleurs, une fois  $u_2$  trouvée, l'inconnue  $F_1$  qui n'est rien d'autre que la réaction à l'appui 1, peut être tirée cette fois de la première équation ci-dessus, telle que :

$$630 \cdot (-u_2) = F_1 = 630 \cdot \left( -\frac{50}{630} \right) = -50 \text{ KN} = -F$$

Donc

$$F_1 = -F = -50 \text{ KN}$$

## 8.2 Exercice 02 Forces nodales équivalentes au poids propre d'une barre de sections variables

Reprendre le cas de l'exercice précédent, dans lequel la barre dont le matériau de masse volumique  $\rho=7850 \text{ Kg/m}^3$  est soumise à une force volumique représentant son propre poids. Maillée par un seul élément unidimensionnel linéaire à deux nœuds de type SEG2, l'axe des  $x$  est cette fois orienté verticalement vers le bas selon la direction de la pesanteur (figure 21). Il est demandé de :

- 1- Calculer la résultante de cette force répartie
- 2- Calculer les forces nodales équivalentes à ce poids volumique.

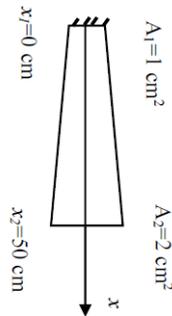


Figure 21 : Barre de section linéairement variable soumise à son poids propre

### Solution :

- 1- La résultante totale des forces de volume dues au poids propre, est :

$$R_T = \text{le poids spécifique } \gamma * \text{le volume total}$$

$$R_T = \gamma * \int_{\Omega} d\Omega = \gamma * \int_0^L A(x) \cdot dx = \rho * \int_0^L \left( \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x + A_1 \right) \cdot dx$$

$$R_T = \gamma * \left[ \frac{(A_2 - A_1)x^2}{2L} \right]_0^L + [A_1 x]_0^L = \frac{\gamma * (A_2 + A_1) * L}{2}$$

A.N : Les unités utilisées étant le KN et le cm, le poids spécifique  $\gamma$  sera en KN/cm<sup>3</sup> comme suit :

$$\gamma = 7850 * 9,81 * 10^{-3} \text{ KN} / (100\text{cm})^3 = 7.698 * 10^4 * 10^{-9} \text{ KN/cm}^3 = 7.698 * 10^{-5} \text{ KN/cm}^3$$

$$R_T = \frac{\gamma * (A_2 + A_1) \cdot L}{2} = \frac{7,698 \cdot 10^{-5} * (2 + 1) * 50}{2} = 5,7735 \cdot 10^{-3} \text{ KN}$$

- 2- Le Calcul des forces nodales équivalentes se fera selon l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega(i)} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega$$

Pour l'élément barre à deux nœuds, la matrice  $[N]$  (voir l'exemple 01 ci-dessus) s'écrit :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1 - \xi \quad 1 + \xi \rangle$$

Pour leur part, les forces par unité de volume  $\{F_V\} = \gamma = \rho \cdot g$

En remplaçant  $[N]$  et  $\{F_V\}$  par leurs expressions respectives, on peut écrire :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T \cdot \{F_V\} d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot d\Omega$$

avec

$$d\Omega = A(x) \cdot dx = A(x(\xi)) \cdot \det[J] \cdot d\xi = B(\xi) \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi$$

$B(\xi) = ?$

$$A(x) = \frac{(A_2 - A_1)}{L} \cdot x + A_1$$

Or

$$x(\xi) = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi & 1 + \xi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi & 1 + \xi \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2} (1 + \xi)$$

Donc

$$A(x(\xi)) = \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot x(\xi) + A_1 = \frac{A_2 - A_1}{L} \cdot \left( \frac{L}{2} (1 + \xi) \right) + A_1 = \frac{A_2 - A_1}{2} \cdot (1 + \xi) + A_1$$

Ainsi

$$B(\xi) = A(x(\xi)) = \frac{1}{2} \left( (A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1) \right)$$

$$d\Omega = A(x(\xi)) \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi = \left( \frac{1}{2} \left( (A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1) \right) \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi$$

Donc

$$\{F_{(i)}\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot A(x) \cdot dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot A(x(\xi)) \cdot \det[J] \cdot d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \gamma \cdot \left( \frac{1}{2} \left( (A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1) \right) \right) \cdot \frac{L}{2} \cdot d\xi$$

$$\begin{aligned} \{F_{(i)}\} &= \frac{\gamma \cdot L}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot \left( (A_2 - A_1) \cdot \xi + (A_2 + A_1) \right) \cdot d\xi \\ &= \frac{\gamma \cdot L}{8} \left( \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \xi - \xi^2 \\ \xi + \xi^2 \end{Bmatrix} \cdot (A_2 - A_1) \cdot d\xi + \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot (A_2 + A_1) \cdot d\xi \right) \end{aligned}$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma \cdot L \cdot (A_2 - A_1)}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \xi - \xi^2 \\ \xi + \xi^2 \end{Bmatrix} \cdot d\xi + \frac{\gamma \cdot L \cdot (A_2 + A_1)}{8} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 - \xi \\ 1 + \xi \end{Bmatrix} \cdot d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma \cdot L \cdot (A_2 - A_1)}{8} \left[ \begin{array}{c} \xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \\ \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3} \end{array} \right]_{-1}^{+1} + \frac{\gamma \cdot L \cdot (A_2 + A_1)}{8} \cdot \left[ \begin{array}{c} \xi - \frac{\xi^2}{2} \\ \xi + \frac{\xi^2}{2} \end{array} \right]_{-1}^{+1} = \frac{\gamma \cdot L \cdot (A_2 - A_1)}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ +1 \end{Bmatrix} + \frac{3 \cdot \gamma \cdot L \cdot (A_2 + A_1)}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} \gamma \cdot L \left( \frac{A_1}{3} + \frac{A_2}{6} \right) \\ \gamma \cdot L \left( \frac{A_1}{6} + \frac{A_2}{3} \right) \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot L}{6} \begin{Bmatrix} 2 \cdot A_1 + A_2 \\ 2 \cdot A_2 + A_1 \end{Bmatrix}$$

On peut remarquer que si  $A_1 = A_2 = A$  (section constante) alors

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot L}{6} \begin{Bmatrix} 3 \cdot A \\ 3 \cdot A \end{Bmatrix} = \frac{\gamma \cdot L \cdot A}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

On retrouve ainsi le résultat des calculs du paragraphe 5.1 d'une barre de section constante et où le poids propre a été remplacé par deux forces nodales équivalentes appliquées aux nœuds de l'élément et dont l'intensité de chacune de ces forces est égale à la moitié du poids total de la barre.

**8.3 Exercice 03 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur un élément TRI6**

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur  $t=3mm$  et modélisée dans l'espace bidimensionnel 2D muni d'un repère orthonormé  $(1, x, y)$ , par un maillage composé d'un élément triangulaire quadratique à six nœuds de type TRI6 dont les coordonnées sont affichées en centimètres (figure 22).

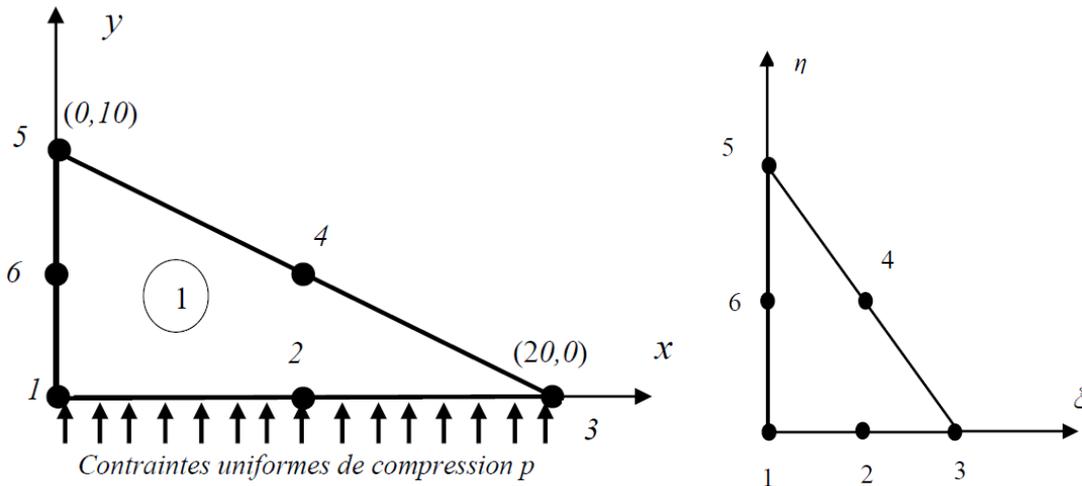


Figure 22 : maillage de la paroi métallique mince avec un élément TRI3 et son élément de référence

Cette paroi subit des pressions uniformes sur le côté 1-2-3 égales à  $p=50$  MPa. Calculer les forces nodales équivalentes à cette pression. Le poids propre de cette plaque est considéré comme négligeable.

**Solution**

La résultante des forces de pression exercées sur le côté 1-2-3 est égale à :

$$R_T = p \cdot L_{1-3} \cdot t = 5 \times 20 \times 0.3 = 30 \text{ KN}$$

Le calcul des forces nodales équivalentes consiste à utiliser l'expression (8-12b) :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma$$

On associe cet élément réel à son élément de référence (figure 22). La matrice  $[N]$  a été introduite grâce à la relation :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{U_{n(i)}\}$$

Avec

$$\{U_{n(i)}\} = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6 \rangle$$

Telle que:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi, \eta) \\ v(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

avec

$N_1(\xi, \eta) = (-1 + \xi + \eta)(-1 + 2\xi + 2\eta)$	$N_4(\xi, \eta) = 4\xi\eta$
$N_2(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$	$N_5(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta)$
$N_3(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi)$	$N_6(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$

Concernant le vecteur  $\{f_S\}$  représentant les forces par unité de surface, on peut écrire :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

$p$  : étant la pression exercée

Si on remplace la matrice  $[N]^T$  et le vecteur  $\{f_S\}$  par leurs expressions respectives dans celle de  $\{F_{(i)}\}$ , on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \end{Bmatrix} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = \oint_{\Gamma_{F(i)}} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_5 \\ N_6 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F(i)}} [N]^T \cdot \{f_S\} d\Gamma = p \cdot \oint_{\Gamma_{F(i)}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ (-1 + \xi + \eta)(-1 + 2\xi + 2\eta) \\ 0 \\ 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ 0 \\ -\xi(1 - 2\xi) \\ 0 \\ 4\xi\eta \\ 0 \\ -\eta(1 - 2\eta) \\ 0 \\ 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{array} \right\} d\Gamma$$

Or  $\Gamma_{F(i)} = t \cdot (L_{1-3})$  car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-2-3 d'épaisseur  $t$ . Ce côté 1-2-3 étant porté par l'axe  $x$  dans l'élément réel, on peut donc écrire en remplaçant  $d\Gamma = t \cdot dx$  dans l'expression précédente :

$$\{F_{(i)}\} = p \cdot t \cdot \int_{L_{1-2}} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ (-1 + \xi + \eta)(-1 + 2\xi + 2\eta) \\ 0 \\ 4\xi(1 - \xi - \eta) \\ 0 \\ -\xi(1 - 2\xi) \\ 0 \\ 4\xi\eta \\ 0 \\ -\eta(1 - 2\eta) \\ 0 \\ 4\eta(1 - \xi - \eta) \end{array} \right\} dx$$

Pour pouvoir intégrer dans l'élément de référence, il va falloir retrouver la relation  $x(\xi, \eta)$  qui nous permettra par la suite de remplacer  $dx$  par  $d\xi$  dans l'intégrale ci-dessus.

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \quad N_5(\xi, \eta) \quad N_6(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix}$$

$$x(\xi, \eta) = \langle N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \quad N_5(\xi, \eta) \quad N_6(\xi, \eta) \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après développement :

$$x(\xi, \eta) = 10 \cdot N_2(\xi, \eta) + 20 \cdot N_3(\xi, \eta) + 10 \cdot N_4(\xi, \eta) = 10 \cdot 4 \cdot \xi(1 - \xi - \eta) - 20 \cdot \xi(1 - 2\xi) + 10 \cdot 4 \cdot \xi\eta$$

$$x(\xi, \eta) = 10 \cdot 4 \cdot \xi(1 - \xi) - 20 \cdot \xi(1 - 2\xi) = 40 \cdot \xi - 40 \cdot \xi^2 - 20\xi + 40 \cdot \xi^2$$

Finalement :

$$x(\xi, \eta) = 20\xi \quad \text{ce qui implique que } dx = 20 \cdot d\xi$$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté  $L_{1-3}$  de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à  $0 \leq \xi \leq 1$  et  $\eta = 0$ . D'où l'intégrale :

$$\{F_{(i)}\} = 20.p.t. \int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1 + \xi)(-1 + 2\xi) \\ 0 \\ 4\xi(1 - \xi) \\ 0 \\ -\xi(1 - 2\xi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi = 20.p.t. \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3 \\ 0 \\ -\frac{\xi^2}{2} + \frac{2}{3}\xi^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = R_T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ainsi, on retrouve la distribution illustrée en figure 12 du paragraphe 5.4 où le nœud du milieu reprend les deux tiers de la résultante tandis que les nœuds d'extrémités reprennent chacun un sixième de cette résultante totale (figure 23 ci-dessous).

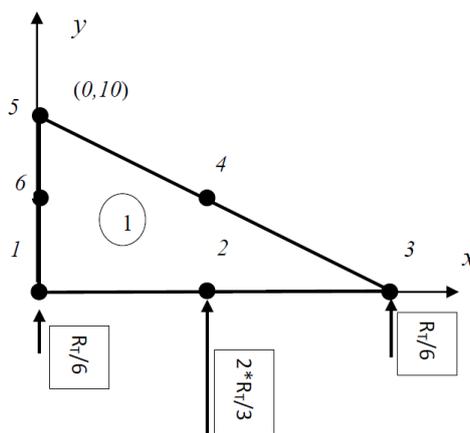


Figure 23 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques  $p$  aux nœuds d'un triangle TRI3 d'épaisseur  $t$