Corrigé de la série de TD N°06 :
Rigidités élémentaires et forces nodales équivalentes

Exercice 01 : barre tendue de section variable

Soit une barre rectiligne en acier de sections transversales à aires variables et de longueur L=50cm. La variation de ces aires est linéaire telle que l'aire de la section de l'extrémité 1 d'abscisse x_1=0 est A_1=1 cm^2 tandis que l'autre section d'extrémité 2 d'abscisse x_2=50 cm, possède une aire A_2=2 cm^2. La section 1 d'aire A_1 est bloquée en déplacements. Par contre, la section d'aire A_2 est soumise à une force centrée F de traction portée par l'axe longitudinal x et d'intensité F=50 KN (figure 19). En supposant un comportement élastique linéaire, il est demandé :

1- d'établir la matrice de rigidité de cette barre modélisée en EF par un seul élément unidimensionnel linéaire à deux nœuds de type SEG2 (figure 20).
2- de calculer le déplacement du nœud 2 tout en sachant que le module d'Young de cet acier est E=210000 MPa.

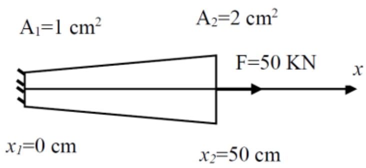

Figure 19 : barre tendue de section variable.

Solution :

On modélise cette barre dans l'espace unidimensionnel 1D par un seul élément linéaire de type SEG2 et on lui associe son élément de référence (figure 20).

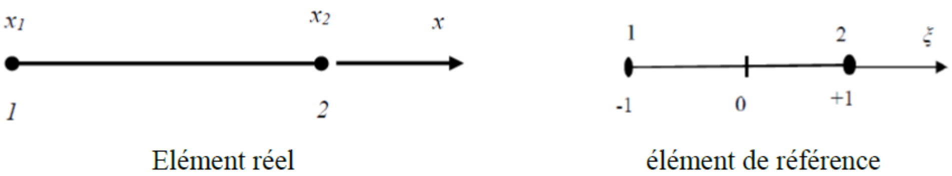

Figure 20 : maillage de la barre par un seul élément SEG2 et son élément de référence associé

1- L'établissement de la matrice de rigidité de cette barre s'effectue selon la formule

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} [B]^T.[H].[B].d\Omega\,.$$

Puisque nous sommes en traction unidimensionnelle1D, les tenseurs des contraintes et des déformations s'écrivent pour tout point d'abscisse x:

$$\langle\sigma\rangle = \langle\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}\rangle = \langle\sigma_x \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\rangle$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 0 \quad 0 \quad 0\rangle$$

En tenant compte des valeurs précédentes des composantes de $\langle\sigma\rangle\ et\ \langle\varepsilon\rangle$, la relation de Hooke contraintes déformation $\{\sigma\} = [H].\{\varepsilon\}$ donne $[H] = E$

Nous avons vu que dans l'exemple 01 du paragraphe 3.1 ci-dessus, que la matrice $[B]$ a comme expression :

$$[B] = \langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \rangle \; et \; [B]^T = \begin{Bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix}$$

Par conséquent, en substituant les matrices $[B]$ et $[H]$par leurs valeurs respectives plus haut dans l'expression de $[K_{(1)}]$, on peut écrire:

$$[K_{(1)}] = \int_{\Omega_{(1)}} \begin{Bmatrix} \frac{-1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} . E . \langle \frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L} \rangle \, d\Omega$$

Or pour tout point d'abscisse *x*, $d\Omega = A(x).dx$ avec A(x) une fonction linéaire en *x* de la forme :

$A(x) = a.x + b$ telle que pour $x = x_1 = 0$, $A(x) = A(0) = 0 + b = b = A_1$

Et pour $x = x_2 =$ L, $A(x) = A(L) = a * L + A_1 = A_2$ ce qui implique que $a = \frac{A_2 - A_1}{L}$

Ainsi, l'expression de A(x) est comme suit : $A(x) = \frac{A_2 - A_1}{L}.x + A_1$ donc $d\Omega = A(x).dx = \left(\frac{A_2 - A_1}{L}.x + A_1\right).dx$

En remplaçant $d\Omega$ par son expression et en faisant sortir tous les termes constants à l'extérieur de l'intégrale, on peut écrire :

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} . \langle -1 \quad 1 \rangle \int_0^L \left(\frac{A_2 - A_1}{L}.x + A_1\right).dx = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} . \left[\left[\frac{(A_2 - A_1)x^2}{2L}\right]_0^L + [A_1 x]_0^L \right]$$

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{(A_2 - A_1)L^2}{2L} + A_1 L \right] = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{(A_2 L - A_1 L)}{2} + \frac{2.A_1.L}{2} \right]$$

Finalement :

$$[K_{(1)}] = \frac{E}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{(A_2 + A_1)L}{2} \right] = \frac{E(A_2 + A_1)}{2L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>A.N :</u>

$$[K_{(1)}] = \frac{21000(2+1)}{2 * 50} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 630. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2- Le déplacement du nœud 2 $u_2 = ?$

Puisque notre maillage est composé d'un seul élément, l'équation d'équilibre global $[K].\{U\} = \{F\}$ est réduite à celle de l'élément telle que $[K] = [K_{(1)}]$, $\{U\} = \{U_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ et $\{F\} = \{F_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$

Donc le système à résoudre consiste :

$$[K_{(1)}].\{U_{(1)}\} = \{F_{(1)}\}$$

Si on remplace chaque terme par son expression respective, on aura :

$$630. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Or le nœud 1 étant bloqué donc $u_1 = 0$ et le nœud 2 étant soumis à une force F orientée positivement selon l'axe x donc $F_2 = F = 50\ KN$. En remplaçant ces valeurs dans le système d'équations précèdent, on aura :

$$630.\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 50 \end{Bmatrix}$$

De la deuxième équation de ce système, on tire :

$$630 * u_2 = 50 \Rightarrow \; u_2 = \frac{50}{630} = 0.079\ cm$$

Par ailleurs, une fois u_2 trouvée, l'inconnue F_1 qui n'est rien d'autre que la réaction à l'appui 1, peut être tirée cette fois de la première équation ci-dessus, telle que :

$$630 * (-u_2) = F_1 = 630 * \left(-\frac{50}{630}\right) = -50\ KN = \ -F$$

Donc $$F_1 = -F = -50\ KN$$

<u>Exercice 02 Forces nodales équivalentes au poids propre d'une barre de sections variables</u>

Reprendre le cas de l'exercice précédent, dans lequel la barre dont le matériau de masse volumique ρ=*7850 Kg/m³* est soumise à une force volumique représentant son propre poids. Maillée par un seul élément unidimensionnel linéaire à deux nœuds de type SEG2, l'axe des *x* est cette fois orienté verticalement vers le bas selon la direction de la pesanteur (figure 21). Il est demandé de :

1- Calculer la résultante de cette force répartie
2- Calculer les forces nodales équivalentes à ce poids volumique.

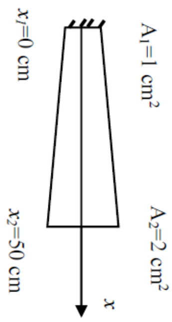

Figure 21 : Barre de section linéairement variable soumise à son poids propre

<u>Solution :</u>

1- La résultante totale des forces de volume dues au poids propre, est :

$$R_T = le\ poids\ spécifique\ \ \gamma * le\ volume\ total$$

$$R_T == \gamma * \int_{\Omega} d\Omega = \gamma * \int_0^L A(x).dx = \rho * \int_0^L \left(\frac{A_2 - A_1}{L}.x + A_1\right).dx$$

$$R_T = \ \gamma * \left[\frac{(A_2 - A_1)x^2}{2L}\right]_0^L + \ [A_1 x]_0^L = \frac{\gamma * (A_2 + A_1) * L}{2}$$

<u>A.N :</u> Les unités utilisées étant le KN et le cm, le poids spécifique γ sera en KN/cm³ comme suit :

γ= 7850*9,81*10⁻³ KN / (100cm)³=7.698*10⁴*10⁻⁹ KN/cm³=7.698 10⁻⁵ KN/cm³

$$R_T = \frac{\gamma * (A_2 + A_1).L}{2} = \frac{7{,}698.10^{-5} * (2+1) * 50}{2} = 5{,}7735.10^{-3}\ KN$$

2- Le Calcul des forces nodales équivalentes se fera selon l'expression (8-12b) telle que :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T . \{F_V\} d\Omega$$

Pour l'élément barre à deux nœuds, la matrice $[N]$ (voir l'exemple 01 ci-dessus) s'écrit :

$$[N] = \langle N_1 \quad N_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle 1-\xi \quad 1+\xi \rangle$$

Pour leur part, les forces par unité de volume $\{F_V\} = \gamma = \rho . g$

En remplaçant $[N]$ et $\{F_V\}$ par leurs expressions respectives, on peut écrire :

$$\{F_{(i)}\} = \int_{\Omega_{(i)}} [N]^T . \{F_V\} d\Omega = \int_{\Omega_{(i)}} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{Bmatrix} . \gamma . d\Omega$$

avec

$$d\Omega = A(x) . dx = A(x(\xi)) . det[J] . d\xi = \mathcal{B}(\xi) . \frac{L}{2} . d\xi$$

$\mathcal{B}(\xi) = ?$

$$A(x) = \frac{(A_2 - A_1)}{L} . x + A_1$$

Or

$$x(\xi) = \frac{1}{2} \langle 1-\xi \quad 1+\xi \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \langle 1-\xi \quad 1+\xi \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ L \end{Bmatrix} = \frac{L}{2}(1+\xi)$$

Donc

$$A\big(x(\xi)\big) = \frac{A_2 - A_1}{L} . x(\xi) + A_1 = \frac{A_2 - A_1}{L} . \left(\frac{L}{2}(1+\xi) \right) + A_1 = \frac{A_2 - A_1}{2} . (1+\xi) + A_1$$

Ainsi

$$\mathcal{B}(\xi) = A\big(x(\xi)\big) = \frac{1}{2} \big((A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1) \big)$$

$$d\Omega = A\big(x(\xi)\big) . \frac{L}{2} . d\xi = \left(\frac{1}{2} \big((A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1) \big) \right) . \frac{L}{2} . d\xi$$

Donc

$$\{F_{(i)}\} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{Bmatrix} . \gamma . A(x) . dx = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{Bmatrix} . \gamma . A\big(x(\xi)\big) . det[J] . d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} 1-\xi \\ 1+\xi \end{Bmatrix} . \gamma . \left(\frac{1}{2} \big((A_2 - A_1)\xi + (A_2 + A_1) \big) \right) . \frac{L}{2} . d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma.L}{8}\int_{-1}^{+1}\begin{Bmatrix}1-\xi\\1+\xi\end{Bmatrix}.\left((A_2-A_1).\xi+(A_2+A_1)\right).d\xi$$

$$= \frac{\gamma.L}{8}\left(\int_{-1}^{+1}\begin{Bmatrix}\xi-\xi^2\\\xi+\xi^2\end{Bmatrix}.(A_2-A_1).d\xi + \int_{-1}^{+1}\begin{Bmatrix}1-\xi\\1+\xi\end{Bmatrix}.(A_2+A_1).d\xi\right)$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma.L.(A_2-A_1)}{8}\int_{-1}^{+1}\begin{Bmatrix}\xi-\xi^2\\\xi+\xi^2\end{Bmatrix}.d\xi + \frac{\gamma.L.(A_2+A_1)}{8}\int_{-1}^{+1}\begin{Bmatrix}1-\xi\\1+\xi\end{Bmatrix}.d\xi$$

$$\{F_{(i)}\} = \frac{\gamma.L.(A_2-A_1)}{8}\begin{bmatrix}\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\\\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}\end{bmatrix}_{-1}^{+1} + \frac{\gamma.L.(A_2+A_1)}{8}.\begin{bmatrix}\xi-\frac{\xi^2}{2}\\\xi+\frac{\xi^2}{2}\end{bmatrix}_{-1}^{+1} = \frac{\gamma.L.(A_2-A_1)}{12}\begin{Bmatrix}-1\\+1\end{Bmatrix} + \frac{3.\gamma.L.(A_2+A_1)}{12}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

Finalement :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix}\gamma.L\left(\frac{A_1}{3}+\frac{A_2}{6}\right)\\\gamma.L\left(\frac{A_1}{6}+\frac{A_2}{3}\right)\end{Bmatrix} = \frac{\gamma.L}{6}\begin{Bmatrix}2.A_1+A_2\\2.A_2+A_1\end{Bmatrix}$$

On peut remarquer que si $A_1 = A_2 = A$ (section constante) alors

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix} = \frac{\gamma.L}{6}\begin{Bmatrix}3.A\\3.A\end{Bmatrix} = \frac{\gamma.L.A}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}$$

On retrouve ainsi le résultat des calculs du paragraphe 5.1 d'une barre de section constante et où le poids propre a été remplacé par deux forces nodales équivalentes appliquées aux nœuds de l'élément et dont l'intensité de chacune de ces forces est égale à la moitié du poids total de la barre.

Exercice 03 Forces nodales équivalentes aux pressions exercées sur un élément TRI6

On considère une paroi métallique mince de forme triangulaire, de faible épaisseur $t=3mm$ et modélisée dans l'espace bidimensionnel 2D muni d'un repère orthonormé (1, x, y), par un maillage composé d'un élément triangulaire quadratique à six nœuds de type TRI6 dont les coordonnées sont affichées en centimètres (figure 22).

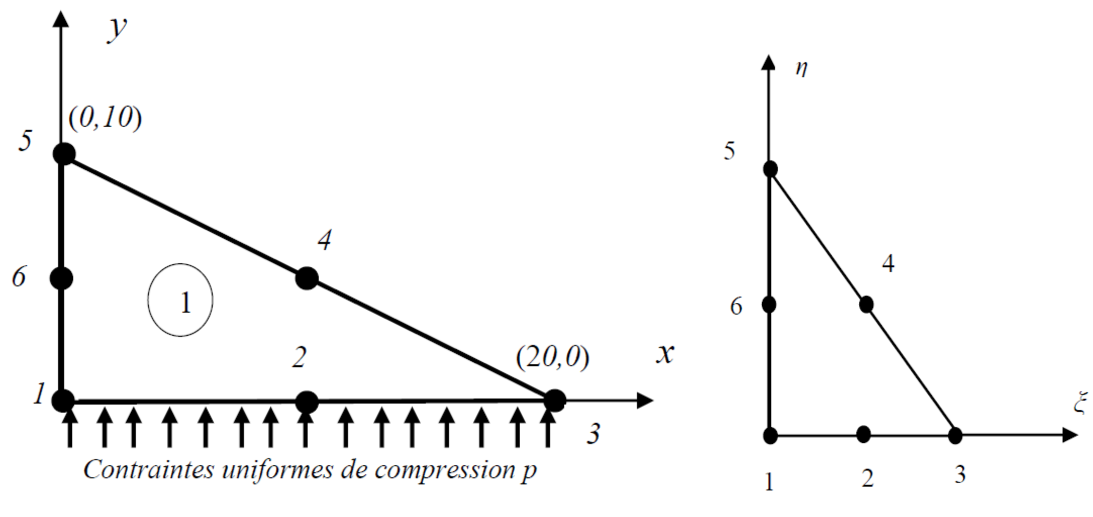

Figure 22 : maillage de la paroi métallique mince avec un élément TRI3 et son élément de référence

Cette paroi subit des pressions uniformes sur le côté 1-2-3 égales à *p*=50 MPa. Calculer les forces nodales équivalentes à cette pression. Le poids propre de cette plaque est considéré comme négligeable.

Solution

La résultante des forces de pression exercées sur le côté 1-2-3 est égale à :

$$R_T = p.L_{1-3}.t = 5 \text{ x } 20 \text{ x } 0.3 = 30 \text{ KN}$$

Le calcul des forces nodales équivalentes consiste à utiliser l'expression (8-12b) :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T.\{f_S\}d\Gamma$$

On associe cet élément réel à son élément de référence (figure 22). La matrice $[N]$ a été introduite grâce à la relation :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = [N].\{U_{n(i)}\}$$

Avec

$$\langle U_{n(i)}\rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad u_5 \quad v_5 \quad u_6 \quad v_6\rangle$$

Telle que:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(\xi,\eta) \\ v(\xi,\eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix}$$

avec

$N_1(\xi,\eta) = (-1+\xi+\eta)(-1+2\xi+2\eta)$	$N_4(\xi,\eta) = 4\xi\eta$
$N_2(\xi,\eta) = 4\xi(1-\xi-\eta)$	$N_5(\xi,\eta) = -\eta(1-2\eta)$
$N_3(\xi,\eta) = -\xi(1-2\xi)$	$N_6(\xi,\eta) = 4\eta(1-\xi-\eta)$

Concernant le vecteur $\{f_S\}$ représentant les forces par unité de surface, on peut écrire :

$$\{f_S\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix}$$

p : étant la pression exercée

Si on remplace la matrice $[N]^T$et le vecteur $\{f_S\}$ par leurs expressions respectives dans celle de $\{F_{(i)}\}$, on aura :

$$\{F_{(i)}\} = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \\ F_{6x} \\ F_{6y} \end{Bmatrix} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T.\{f_S\}d\Gamma \; = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \\ N_5 & 0 \\ 0 & N_5 \\ N_6 & 0 \\ 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p \end{Bmatrix} d\Gamma$$

En développant le produit matriciel, on obtient :

$$\{F_{(i)}\} = \oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} [N]^T.\{f_S\}d\Gamma \; = p.\oint_{\Gamma_{F_{(i)}}} \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1+\xi+\eta)(-1+2\xi+2\eta) \\ 0 \\ 4\xi(1-\xi-\eta) \\ 0 \\ -\xi(1-2\xi) \\ 0 \\ 4\xi\eta \\ 0 \\ -\eta(1-2\eta) \\ 0 \\ 4\eta(1-\xi-\eta) \end{Bmatrix} d\Gamma$$

Or $\Gamma_{F_{(i)}} = t.(L_{1-3})$ car la pression extérieure agit uniquement sur le côté 1-2-3 d'épaisseur *t* . Ce côté 1-2-3 étant porté par l'axe x dans l'élément réel, on peut donc écrire en remplaçant $d\Gamma = t.dx$ dans l'expression précédente :

$$\{F_{(i)}\} = p.t.\oint_{L_{1-2}} \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1+\xi+\eta)(-1+2\xi+2\eta) \\ 0 \\ 4\xi(1-\xi-\eta) \\ 0 \\ -\xi(1-2\xi) \\ 0 \\ 4\xi\eta \\ 0 \\ -\eta(1-2\eta) \\ 0 \\ 4\eta(1-\xi-\eta) \end{Bmatrix} dx$$

Pour pouvoir intégrer dans l'élément de référence, il va falloir retrouver la relation $x(\xi,\eta)$ qui nous permettra par la suite de remplacer dx par $d\xi$ dans l'intégrale ci-dessus.

$$x(\xi,\eta) = \langle N_1(\xi,\eta) \quad N_2(\xi,\eta) \quad N_3(\xi,\eta) \quad N_4(\xi,\eta) \quad N_5(\xi,\eta) \quad N_6(\xi,\eta)\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{Bmatrix}$$

$$x(\xi,\eta) = \langle N_1(\xi,\eta) \quad N_2(\xi,\eta) \quad N_3(\xi,\eta) \quad N_4(\xi,\eta) \quad N_5(\xi,\eta) \quad N_6(\xi,\eta)\rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Après développement :

$$x(\xi,\eta) = 10.N_2(\xi,\eta) + 20.N_3(\xi,\eta) + 10.N_4(\xi,\eta) = 10.4.\xi(1-\xi-\eta) - 20.\xi(1-2\xi) + 10.4.\xi\eta$$

$$x(\xi,\eta) = 10.4.\xi(1-\xi) - 20.\xi(1-2\xi) = 40.\xi - 40.\xi^2 - 20\xi + 40.\xi^2$$

Finalement : $x(\xi,\eta) = 20\xi \quad ce\ qui\ implique\ que\ \ dx = 20.d\xi$

L'intégrale étant calculée sur le côté de l'élément de référence correspondant au côté L_{1-3} de l'élément réel. Sur l'élément de référence, ce côté correspond mathématiquement à $0 \leq \xi \leq 1\ et\ \eta = 0$. D'où l'intégrale :

$$\{F_{(i)}\} = 20.p.t.\int_0^1 \begin{Bmatrix} 0 \\ (-1+\xi)(-1+2\xi) \\ 0 \\ 4\xi(1-\xi) \\ 0 \\ -\xi(1-2\xi) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi \ = 20.p.t. \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\xi^3 - \frac{3}{2}\xi^2 + \xi \\ 0 \\ 2\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3 \\ 0 \\ -\frac{\xi^2}{2} + \frac{2}{3}\xi^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0^1 = R_T. \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, on retrouve la distribution illustrée en figure 12 du paragraphe 5.4 où le nœud du milieu reprend les deux tiers de la résultante tandis que les nœuds d'extrémités reprennent chacun un sixième de cette résultante totale (figure 23 ci-dessous).

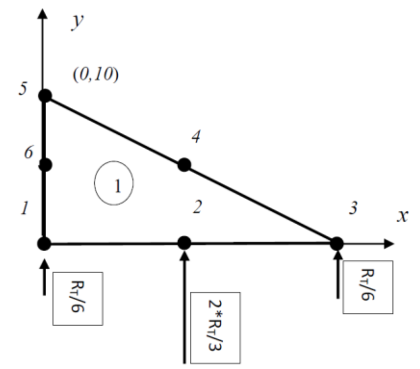

Figure 23 : Résultat de calcul d'extrapolation de forces surfaciques *p* aux nœuds d'un triangle TRI3 d'épaisseur *t*