

## Modélisation et calculs par éléments finis de structures formées de barres

### 1. Introduction

L'objectif de ce chapitre consiste non seulement à introduire l'élément fini à deux nœuds de type barre, mais également à présenter une méthode utilisant cet élément pour le calcul de structures formées de barres. A cet effet, nous commencerons en premier lieu, par rappeler quelques notions de base de la théorie de la résistance des matériaux. Ces notions sont celles relatives à la définition d'une barre, d'une poutre, d'une structure dites unidimensionnelle formées de barres continues portées par un seul axe, et enfin, d'une structure dite en treillis bidimensionnels ou tridimensionnels. Nous rappellerons non seulement les conditions de chargements et d'appuis aux nœuds liées à ces structures, mais également les conditions relatives à la nature articulée de rotation libre des sections d'extrémités de chaque barre.

Par la suite, après avoir procédé à la définition de cet élément fini linéique à deux nœuds, connu sous la désignation «d'élément barre », nous présenterons une méthode simple de construction de modèles E F constitués de ce type d'éléments. En effet, sans utiliser de formulations intégrales telles que nous les avons vues dans le chapitre précédent, nous présenterons une méthode directe et simple de calcul de la matrice de rigidité locale de ce type d'élément. Pour le présent chapitre, il est important de souligner que les calculs se feront directement sur l'élément réel et que nous n'utiliserons pas d'éléments de référence.

Par ailleurs, en suivant le même raisonnement que celui illustré dans le schéma global de résolution du chapitre 07 précédent, le calcul d'une structure formée de plusieurs barres, nécessite également la résolution d'un système global d'équations reliant les forces nodales extérieures aux déplacements nodaux et ce, grâce à la construction d'une matrice largement connue sous le nom de « *matrice de rigidité globale* ». Le premier membre de ce système consiste en le produit matriciel de cette *matrice de rigidité globale* par un *vecteur global de déplacements nodaux*. Le second membre de ce système consiste en un *vecteur global de forces nodales* représentant les forces extérieures appliquées ainsi que les réactions des appuis. La construction de cette *matrice de rigidité globale* est obtenue grâce à la construction et par la suite à l'assemblage de *matrices de rigidités dites locales (ou élémentaires)* de tous les éléments composant la structure. Nous verrons que cette opération d'assemblage peut être effectuée grâce à l'écriture sous *forme expansée* de ces *matrices de rigidités élémentaires*. Il est important de souligner que la résolution de ce système d'équations ne peut se faire sans l'introduction de conditions aux limites en déplacements qui consistent à tenir compte des blocages des degrés de liberté des nœuds situés au niveau des appuis.

### 2. Quelques rappels de la théorie de la résistance des matériaux

#### 2.1. Définition d'une barre

En résistance des matériaux, une barre est définie comme étant un élément rectiligne de structure, dont les sections transversales ne sont soumises qu'à des efforts axiaux (soit de compression, soit de traction) centrés et portés par l'axe passant par les centres de gravité de ces sections. Il y a lieu également de rappeler que les dimensions de ces sections doivent être faibles devant celle de la longueur de cette barre.

## 2.2. Définition d'une poutre

En résistance des matériaux, une poutre est définie comme étant un élément de structure (rectiligne ou courbe), qui peut travailler aussi bien en flexion, en cisaillement, en torsion et en compression-traction. Ainsi, toutes les sections transversales de cet élément peuvent subir des moments fléchissants, des moments de torsion, des efforts tranchants ainsi que des efforts normaux. Les dimensions de ces sections transversales doivent également être faibles devant celles de la longueur de la poutre.

## 2.3. Structures en treillis

Ce type de structure consiste à utiliser des barres (telles que définies dans le paragraphe 2.1 précédent) de sorte à former de façon juxtaposée des triangles successifs dont les nœuds sont des articulations. Ceci donne lieu à une structure nommée "structure en treillis" (figures 01). Il est important de noter que ce système est basé sur le principe dit triangulation. En effet, prenons l'exemple d'une structure constituée de trois barres articulées et formant un triangle (figure 02). Celle-ci est stable et peut équilibrer, uniquement par des efforts internes axiaux dans les barres, tout effort appliqué sur ses trois nœuds et ce, quels que soient le sens et la direction de la force appliquée. Evidemment, il s'agit d'une structure plane (bidimensionnelle) qui ne peut reprendre que des efforts agissant dans son plan. Par contre, si on considère une structure formée de quatre barres articulées, celle-ci est instable. En effet, le mécanisme de ruine peut s'enclencher pour de très faibles intensités d'efforts appliqués sur ses nœuds (figure 03). Quelques exemples de poutres (ou de fermes) en treillis sont illustrés en figure 04.

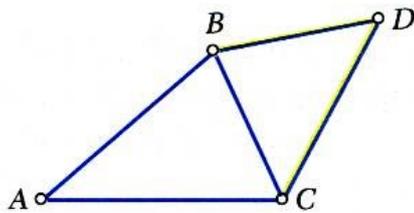


Figure 01: juxtaposition de deux triangles

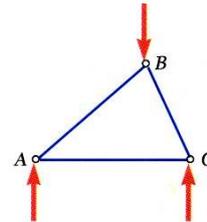


Figure 02 triangle stable formé de trois barres articulées

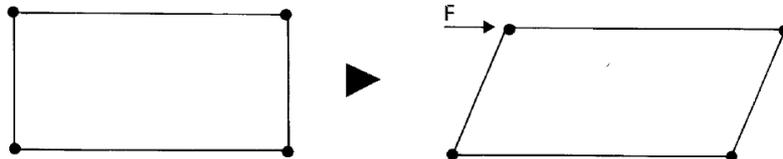


Figure 03 : quadrangle instable formé de quatre barres articulées à leurs extrémités.

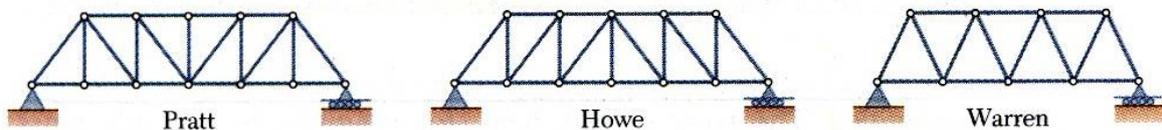


Figure 04 : Quelques exemples de poutres trapézoïdales en treillis

## 3. Element fini de barre

Considérons une barre modélisée par un seul élément fini de type SEG2 à deux nœuds nommés 1 et 2 et de coordonnées respectives  $x_1$  et  $x_2$ . Portées par l'axe (ox), des forces axiales de traction  $F_1$  et  $F_2$  d'intensités égales et opposées sont appliquées respectivement aux niveaux de ces nœuds. Les déplacements causés sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$  (figure 05).

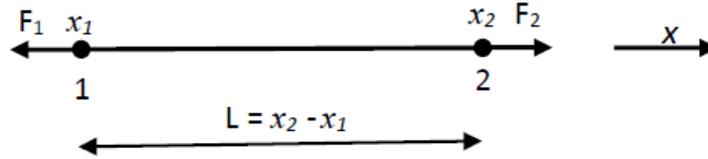


Figure 05 : Element barre à deux nœuds de type SEG2

L'allongement de cette barre est donc :

$$\Delta L = u_2 - u_1$$

La barre étant en équilibre, on peut écrire :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

En supposant que le champ de déformation soit constant à l'intérieur telle que :

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (01)$$

En supposant un comportement élastique et en appliquant la loi de Hooke telle que :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{F_2}{E.A} = -\frac{F_1}{E.A} \quad (02)$$

En égalisant les deux équations (01) et (02) précédentes, on peut déduire :

$$F_1 = \frac{E.A}{L} (u_1 - u_2) \quad (03)$$

$$F_2 = \frac{E.A}{L} (u_2 - u_1) \quad (04)$$

Sous forme matricielle, les deux équations précédentes peuvent être formulées comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (05)$$

Par ailleurs, nous rappelons l'équation reliant les forces nodales élémentaires aux vecteurs déplacements nodaux de l'élément barre telle que nous l'avons vue dans le chapitre 08 précédent :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (06)$$

Avec  $[K_1]$  : la matrice de rigidité élémentaire de cet élément barre.

En comparant les équations (05) et (06), nous retrouvons par identification l'expression de cette matrice de rigidité élémentaire telle qu'elle a été établie au chapitre précédent.

$$[K_1] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (07)$$

#### 4. Element fini de ressort

De la même manière, considérons un ressort modélisé par un seul élément fini de type SEG2 à deux nœuds de coordonnées respectives  $x_1$  et  $x_2$ . Portées par l'axe (ox), des forces axiales de traction  $F_1$  et  $F_2$  d'intensités égales et opposées sont appliquées respectivement aux niveaux de ces nœuds. Les déplacements causés sont respectivement  $u_1$  et  $u_2$  (figure 06).

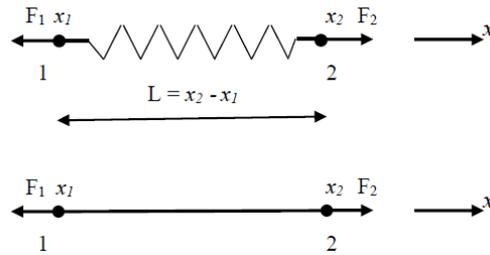


Figure 06 : Ressort modélisé par un élément ressort à deux nœuds de type SEG2

L'allongement de ce ressort est donc :

$$\Delta L = u_2 - u_1$$

L'équilibre en translation permet d'écrire :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

L'équilibre en translation des nœuds 1 et 2 subissant respectivement les forces extérieures  $F_1$  et  $F_2$  ainsi que des forces internes de rappel proportionnelles à la fois à la raideur  $k$  du ressort ainsi qu'à son allongement  $\Delta L$ , permet d'écrire pour chaque nœud :

$$F_1 = k \cdot \Delta L = k (u_1 - u_2) \quad (08)$$

$$F_2 = k \cdot \Delta L = k (u_2 - u_1) \quad (09)$$

Rappelons que la raideur  $k$  est une propriété matérielle qui peut être mesurée expérimentalement.

Sous forme matricielle, les deux équations précédentes peuvent être formulées : :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Par ailleurs, rappelons l'équation reliant les forces nodales élémentaires aux vecteurs déplacements nodaux, telle que nous l'avons vue dans le chapitre précédent :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = [K_1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Avec  $[K_1]$  : la matrice de rigidité élémentaire de cet élément.

En comparant les équations (10) et (11), nous pouvons déduire par analogie l'expression de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément ressort telle que :

$$[K_1] = k \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

**Remarque :** Si l'on compare les expressions (07) et (12), les deux matrices de rigidité élémentaires sont similaires. Il suffit simplement de substituer la raideur  $k$  du ressort par le terme  $(E.A/L)$  pour retrouver la matrice de rigidité de la barre.

## 5. Systèmes formés de barres continues unidimensionnelles

Considérons deux barres de longueur  $L$  chacune, et dont les sections transversales sont constantes avec des aires respectives  $A_1$  et  $A_2$  et constituées d'un même matériau dont le module d'Young est noté  $E$ . Ces barres sont disposées en série et reliées bout à bout. Elles sont portées verticalement le long d'un axe ( $ox$ ) orienté positivement du haut vers le bas (figure 07). Une force  $F$  ponctuelle agissant vers le bas est appliquée au niveau de l'extrémité inférieure de la seconde barre. L'extrémité supérieure de la

première barre étant bloquée en déplacements, elle engendrant une réaction d'appui  $\mathbf{R}$  égale et opposée à la force  $\mathbf{F}$ .

En observant le modèle élément fini adopté et illustré sur les figures 07 et 08 ci-dessous, on constate que la barre 1 correspond au premier élément barre numéro 01 reliant le nœud 1 au nœud 2 tandis que la barre 02 correspond au second élément fini reliant les nœuds 2 et 3. Isolons dans un premier temps chaque élément barre ainsi que chaque nœud (voir la figure 08). On note  $u_1, u_2$  et  $u_3$  les déplacements respectifs de chaque nœud. On note  $F_1^{(1)}$  et  $F_2^{(1)}$  les forces nodales internes transmises respectivement par les nœuds 1 et 2 aux sections d'extrémités de la barre 01. On note également  $F_2^{(2)}$  et  $F_3^{(2)}$  les forces nodales internes transmises respectivement par les nœuds 2 et 3 aux sections d'extrémités de la barre 02. Selon le principe de l'action et de la réaction, les forces internes transmises par les barres vers les nœuds sont égales et opposées aux forces internes  $F_j^{(i)}$  par les nœuds vers les barres (telles citées précédemment) (figure 08).

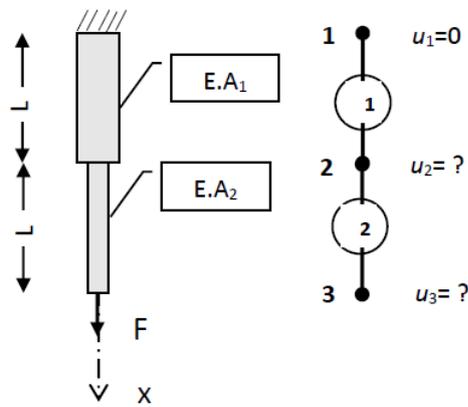


Figure 07 : Système unidimensionnel formé de deux barres continues discrétisé par un modèle EF à deux éléments de type SEG2 à droite

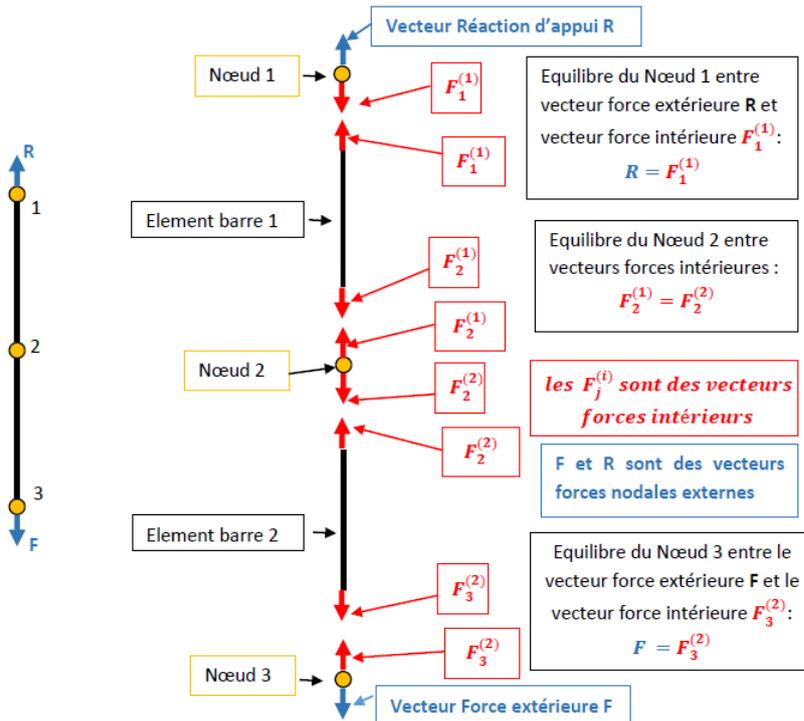


Figure 08 : Représentation des forces nodales externes et des forces internes illustrant les interactions entre les nœuds et les sections d'extrémités des éléments barre

Si on applique l'équation (07) précédente à ce modèle, on peut écrire pour chaque élément, les systèmes d'équations suivant :

$$\begin{Bmatrix} F_1^{(1)} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

En tenant compte des conditions aux limites telles  $F_1^{(1)} = \mathbf{R}$ ,  $F_3^{(2)} = \mathbf{F}$  et  $u_1 = 0$ , on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (13')$$

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (14')$$

Les formes expansées des systèmes d'équations précédents consistent à rajouter, dans chaque système, des équations d'équilibres supplémentaires à coefficients nuls des nœuds qui n'appartiennent pas à la barre considérée. Il s'agit en l'occurrence du nœud 3 et donc de l'équation 3 pour l'expression (13') relative à l'élément 01 et du nœud 1 et de l'équation 01 pour l'expression (14') relative à l'élément 02. Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Le système globale d'équations ainsi que la matrice de rigidité globale peuvent être obtenu en additionnant deux à deux les membres des systèmes d'équations précédents tels que :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \left[ \frac{E.A_1}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{E.A_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Les forces  $F_2^{(1)}$  et  $F_2^{(2)}$  sont des forces internes agissant sur le nœud 2. L'équilibre de ce nœud, numéro 2, impose que ces forces soient égales et de sens opposés. Ainsi, nous avons :

$$F_2^{(1)} + F_2^{(2)} = 0$$

Après développement, obtient le système global suivant :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{Bmatrix} = \frac{E.}{L} \begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & 0 \\ -A_1 & (A_1 + A_2) & -A_2 \\ 0 & -A_2 & A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}] \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (01') \\ (02') \\ (03') \end{matrix} \quad (18)$$

On peut ainsi déduire l'expression de la matrice de rigidité globale du système formé par les deux barres telles que :

$$[\mathbf{K}] = \frac{E.}{L} \begin{bmatrix} A_1 & -A_1 & 0 \\ -A_1 & (A_1 + A_2) & -A_2 \\ 0 & -A_2 & A_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Les équations (02') et (03') du système (18) sont des équations dont les inconnues sont les déplacements  $u_2$  et  $u_3$ . La démarche consiste à trouver, en premier lieu, les valeurs de ces inconnues  $u_2$  et  $u_3$ . En effet, en développant l'équation (02'), on peut déduire  $u_3$  en fonction de  $u_2$  telle que :

$$u_3 = \frac{(A_1+A_2)}{A_2} u_2 \quad (20)$$

Si on remplace l'expression précédente (20) dans l'équation (03') du système (18), on trouvera la valeur de  $u_2$  telle que :

$$u_2 = \frac{F}{E.A_1} \quad (21)$$

La substitution de l'expression (21) de  $u_2$  dans celle de  $u_3$  en (20) donnera :

$$u_3 = \frac{(A_1+A_2)}{A_2} u_2 = \frac{(A_1+A_2)}{A_2} \frac{F}{E.A_1} = \frac{F}{E.A_1} + \frac{F}{E.A_2} \quad (22)$$

Par ailleurs, si on développe l'équation (01') du système (18), et en remplaçant  $u_2$  par son expression on obtient :

$$-E.A_1.u_2 = R \Rightarrow R = -E.A_1 \frac{F}{E.A_1} = -F \quad (23)$$

On retrouve ainsi l'équation d'équilibre globale en translation selon l'axe  $ox$  telle que :  $R = -F$ .

## 6. Systèmes bidimensionnels formés de barres disposées en treillis

### 6.1. Matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre dans l'espace 2d

Soit un élément barre reliant deux nœuds  $i$  et  $j$  et dont le repère local lié à cet élément est le repère  $(\bar{iX}\bar{iY})$  (figure 09). L'axe local  $\bar{iX}$  est un axe longitudinal reliant le nœud  $i$  au nœud  $j$ . Le second axe local  $\bar{iY}$  est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $\bar{iX}$  comme indiqué sur cette figure 09. L'axe local  $\bar{iX}$  est incliné d'un angle  $\varphi$  par rapport à l'axe  $(ox)$  du repère global. Sont également représentées sur cette figure 09, les composantes des vecteurs déplacements définis dans le repère local  $(\bar{iX}\bar{iY})$ . Correspondant respectivement aux nœuds  $i$  et  $j$ , elles sont notées  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  et  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$ . Les composantes des vecteurs déplacements  $(u_i, v_i)$  et  $(u_j, v_j)$  sont définies dans le repère global  $(oxy)$ .

En reprenant le même raisonnement que celui qui a permis d'écrire l'expression (05) du paragraphe 3 précédent, le système d'équations reliant les composantes, écrites en repère local, des vecteurs forces nodales aux déplacements des nœuds  $i$  et  $j$ , peut être écrit comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (24)$$

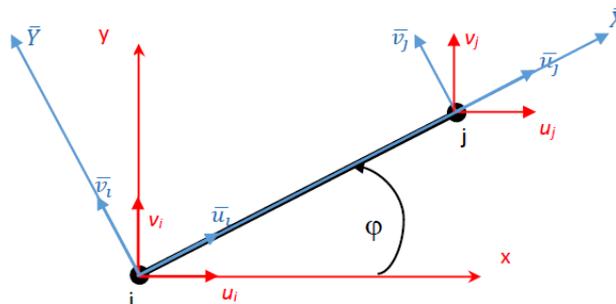


Figure 09 : représentation du repère local, du repère global et des vecteurs composantes associées

On en déduit que la matrice de rigidité de l'élément barre en 2d à deux degrés de liberté par nœud est comme suit :

$$[\bar{K}_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

**Remarque importante** : Il est important de souligner que cette matrice  $[\bar{K}_e]$  est écrite dans le repère local de l'élément considéré.

### 6.2. Matrice de rigidité élémentaire de l'élément ressort dans l'espace 2d

En suivant les mêmes démarches que celle du paragraphe précédent ainsi que celle qui a permis d'obtenir l'expression (10) du paragraphe 04, la matrice de rigidité de l'élément ressort en 2d à deux degrés de liberté par nœud, peut être formulée comme suit :

$$[\bar{K}_e] = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

avec  $k$  la raideur du ressort

### 6.3. Transformations entre repères local et global

La projection des vecteurs déplacements locaux notées  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  et  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$ , illustrés en figure 09 ci-dessus, sur le repère global (oxy) donne pour les nœuds  $i$  et  $j$  les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{u}_i = c \cdot u_i + s \cdot v_i \\ \bar{v}_i = -s \cdot u_i + c \cdot v_i \\ \bar{u}_j = c \cdot u_j + s \cdot v_j \\ \bar{v}_j = -s \cdot u_j + c \cdot v_j \end{cases} \quad (27)$$

Avec  $c = \cos\varphi$  et  $s = \sin\varphi$

Sous Forme matricielle, le système d'équations précédent peut être écrit:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Ainsi, on en déduit que la matrice  $[T]$  n'est rien d'autre que la matrice de transformation ou de passage du repère local lié à l'élément considéré au repère global lié à la structure.

Il en est de même pour les vecteurs forces locaux qui peuvent être formulés en fonction de leurs composantes dans le repère global comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Sous formes condensées, les expressions précédentes (28) et (29) peuvent être formulées:

$$\{\bar{U}\} = [T]\{U\} \quad (30)$$

$$\text{et } \{\bar{F}\} = [T]\{F\} \quad (31)$$

Par ailleurs, les deux repères (local et global) étant orthonormés, ceci implique que la matrice inverse de la matrice  $[T]$  n'est rien d'autre que sa transposée, telle que :

$$[T]^{-1} = [T]^t$$

Réécrivons également l'expression (24) sous forme condensée telle que :

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}_e]\{\bar{U}\} \quad (32)$$

En remplaçant dans (32),  $\{\bar{F}\}$  et  $\{\bar{U}\}$  par leurs expressions respectives écrites en (31) et (30), on obtient :

$$[T]\{F\} = [\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (33)$$

En multipliant les deux membres de l'équation précédente par  $[T]^t$ , on obtient :

$$[T]^t[T]\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\}$$

Or  $[T]^t[T] = [I]$  : la matrice identité telle que :

$$[T]^t[T]\{F\} = \{F\}$$

On en déduit que :

$$\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (34)$$

On sait par ailleurs que, la relation entre les composantes des vecteurs forces et déplacements peuvent s'écrire dans le repère global comme suit :

$$\{F\} = [K_e]\{U\} \quad (35)$$

avec  $[K_e]$  : la matrice de rigidité élémentaire écrite cette fois ci dans le repère global.

En comparant les expressions (34) et (35), on en déduit par identification l'expression de la matrice  $[K_e]$  en fonction de la matrice de passage  $[T]$ , de sa transposée  $[T]^t$  et de la matrice  $[\bar{K}_e]$  telle que :

$$[K_e] = [T]^t[\bar{K}_e][T] \quad (36)$$

Si on remplace dans l'expression précédente (36) la matrice  $[\bar{K}_e]$  par son expression établie en (25) et la matrice  $[T]$  par son expression qu'on peut déduire de (28), et en effectuant le double produit matriciel, on obtient finalement :

$$[K_e] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} c^2 & s.c & -c^2 & -s.c \\ s.c & s^2 & -s.c & -s^2 \\ -c^2 & -s.c & c^2 & s.c \\ -s.c & -s^2 & s.c & s^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Pour les structures en treillis bidimensionnelles 2d, c'est l'expression précédente qui sera directement utilisée dans les calculs tels que nous pouvons le constater dans les exemples suivants.

#### 6.4. Exemple 01 : cas d'une structure en treillis formée de barres

Considérons le cas de trois barres articulées à leurs extrémités et assemblées pour former un treillis plan tel celui représenté sur la figure 10 ci-dessous. La géométrie, les caractéristiques mécaniques, les conditions aux limites et le chargement y sont également donnés.

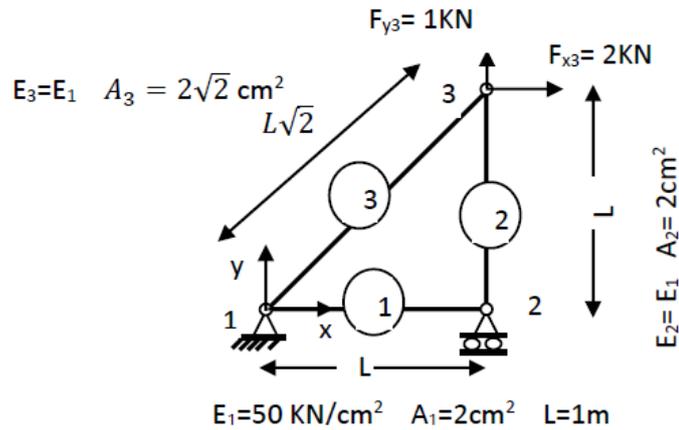


Figure 10 : Système bidimensionnel formé trois barres disposées en treillis pour former une triangulation et soumise aux deux forces indiquées

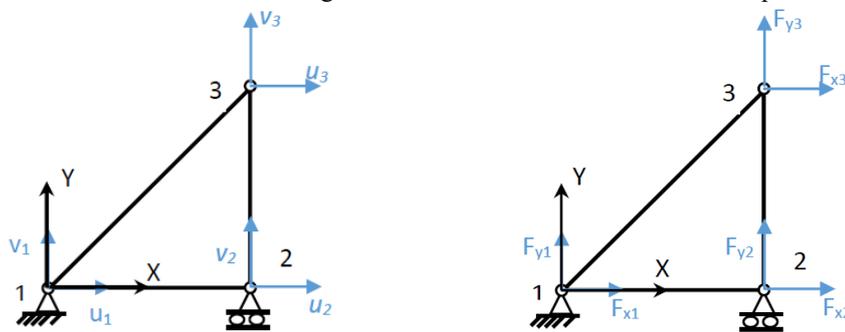


Figure 11 : Vecteurs représentant les composantes dans le repère global OXY des déplacements nodaux (à gauche) et des forces nodales extérieures (à droite)

Notre modèle de structure à étudier est donc à six degrés de liberté. Les vecteurs déplacements nodaux et les vecteurs forces nodales, définis dans le repère global, s'écrivent comme suit :

$$\langle U \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \rangle$$

$$\langle F \rangle = \langle F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{x3} \quad F_{y3} \rangle$$

La relation entre ces deux vecteurs s'écrit grâce à la relation suivante :

$$\{F\} = [K].\{U\}$$

Avec  $[K]$  la matrice de rigidité globale carrée symétrique de dimensions  $(2n * 2n)$  avec  $n$  : le nombre total de nœuds de la structure. Dans le cas du présent exemple, puisque  $n$  est égal à 3, la matrice  $[K]$  est de dimensions  $(6*6)$ . La construction de cette matrice se fait grâce à la construction et à l'assemblage de matrices de rigidité locale de chaque élément. Ces matrices de rigidité élémentaires doivent être écrites dans le repère global. Dans ce qui suit, nous exposons les étapes qui vont permettre de construire cette matrice de rigidité globale.

### Étape 01 : calcul des matrices de rigidités élémentaires en repère global pour chaque élément

En premier lieu, on pose  $E = E_1$ ,  $A = A_1$  et  $L = L_1$

#### Calcul de la matrice de rigidité de l'élément 1 $[K_1]$ :

Selon les figures 09 et 10 ci-dessus, l'angle d'inclinaison  $\varphi_1$  de l'élément 1 est nul :  $\varphi_1 = 0$ , les termes de la matrice  $[K_1]$  calculés en appliquant l'expression (37) sont comme suit :

$$[K_1] = \frac{E_1 \cdot A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ainsi, si on isole l'élément 1, les équations reliant les forces nodales intérieures (exercées par les nœuds 1 et 2 sur la barre 1) aux déplacements de ces nœuds peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{pmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Calcul de la matrice de rigidité de l'élément 2  $[K_2]$  :

L'angle d'inclinaison  $\varphi_2$  de l'élément 2 est :  $\varphi_2 = \pi/2$ , les termes de la matrice  $[K_2]$  calculés en appliquant l'expression (37) sont comme suit :

$$[K_2] = \frac{E_2 \cdot A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les équations reliant les forces nodales intérieures (exercées par les nœuds 2 et 3 sur la barre 2) aux déplacements de ces nœuds peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{pmatrix} F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (39)$$

Calcul de la matrice de rigidité de l'élément 3  $[K_3]$  :

L'angle d'inclinaison  $\varphi_3$  de l'élément 3 est :  $\varphi_3 = \pi/4$ , les termes de la matrice  $[K_3]$  calculés en appliquant l'expression (37) sont comme suit :

$$[K_3] = \frac{E \cdot A \cdot \sqrt{2}}{L \cdot \sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Les équations reliant les forces nodales intérieures (exercées par les nœuds 1 et 3 sur la barre 3) aux déplacements de ces nœuds peuvent être écrites comme suit (figure 10) :

$$\begin{pmatrix} F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(3)} \\ F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(3)} \end{pmatrix} = \frac{E \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (40)$$

## Etape 02 : Ecriture des formes expansées des systèmes d'équations précédents

Les formes expansées des systèmes d'équations précédents (38), (39) et (40) consistent à rajouter, dans chaque système, des équations d'équilibres supplémentaires à coefficients nuls des nœuds qui n'appartiennent pas à la barre considérée. Il s'agit en l'occurrence pour le système (38) du nœud 3 qui n'appartient pas à l'élément 1, pour le système (39) du nœud 1 qui n'appartient pas à l'élément 2, et pour le système (40) du nœud 2 qui n'appartient pas à l'élément 3.

Forme expansée du système (38) et matrice de rigidité expansée de l'élément 1  $[K_{1exp}]$  :

Selon la figure 10 ci-dessus, l'élément 1 relie le nœud 1 au nœud 2. Le nœud 3 est le nœud manquant. Ses degrés de liberté sont  $u_3$  et  $v_3$  qui correspondent aux rangées 5 et 6 et aux colonnes 5 et 6 de la matrice de rigidité globale.

$$\begin{pmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (41)$$

La matrice de rigidité expansée de l'élément 1  $[K_{1exp}]$  avec des rangées et colonnes nulles est donc comme suit :

$$[K_{1exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forme expansée du système (39) et matrice de rigidité expansée de l'élément 2  $[K_{2exp}]$  :

De la même manière que précédemment, l'élément 2 relie le nœud 2 au nœud 3 (figure 10). Le nœud 1 est le nœud manquant. Ses degrés de liberté sont  $u_1$  et  $v_1$  qui correspondent aux rangées 1 et 2 et aux colonnes 1 et 2 de la matrice de rigidité globale.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \end{pmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (42)$$

L'expansion de la matrice  $[K_2]$  est donc comme suit :

$$[K_{2exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Forme expansée du système (40) et matrice de rigidité expansée de l'élément 3  $[K_{3exp}]$  :

L'élément 3 reliant le nœud 1 au nœud 3, le nœud 2 est le nœud manquant. Ses degrés de liberté sont  $u_2$  et  $v_2$  qui correspondent aux rangées 3 et 4 et aux colonnes 3 et 4 de la matrice de rigidité globale.

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (43)$$

L'expansion de la matrice  $[K_3]$  est donc comme suit :

$$[K_{3exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

### Etape 03 : Assemblage des matrices expansées

En plus du principe de la *compatibilité* des déplacements des nœuds où le vecteur déplacement de chaque nœud est considéré comme *unique*, l'assemblage des matrices expansées repose sur un autre principe fondamental qui consiste en *l'équilibre du nœud*. En effet, la somme de toutes les forces internes transmises des éléments vers le nœud ainsi que de celles des charges appliquées (charges extérieures ou réactions d'appuis) est nulle. Ainsi, le vecteur force extérieure appliqué au nœud est égal et opposé à la résultante de toutes les forces intérieures transmises des barres vers le nœud telles celles exprimées dans les équations (41), (42) et (43). Par conséquent, en additionnant les vecteurs forces nodales intérieures expansées écrits dans ces équations (41), (42) et (43), on obtient le vecteur forces nodales extérieures

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1}^{(1)} \\ F_{y1}^{(1)} \\ F_{x2}^{(1)} \\ F_{y2}^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} \\ F_{y3}^{(2)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(3)} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1}^{(1)} + F_{x1}^{(3)} \\ F_{y1}^{(1)} + F_{y1}^{(3)} \\ F_{x2}^{(1)} + F_{x2}^{(2)} \\ F_{y2}^{(1)} + F_{y2}^{(2)} \\ F_{x3}^{(2)} + F_{x3}^{(3)} \\ F_{y3}^{(2)} + F_{y3}^{(3)} \end{Bmatrix}$$

Or les nœuds 1 et 2 ne sont chargés que par les réactions extérieures de l'appui double 1 dont les composantes sont les inconnues  $R_{x1}$  et  $R_{y1}$  et de la réaction de l'appui simple 2 dont l'unique composante inconnue est  $R_{y2}$ . Quant au nœud 3, celui-ci est chargé par une force ponctuelle dont les composantes sont  $F_{x3} = 2KN$  et  $F_{y3} = 1KN$ . Ainsi, le vecteur forces globales extérieures aura finalement pour composantes

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ R_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne, les vecteurs déplacements nodaux, nous avons à l'appui du nœud 1 :  $u_1=0$  et  $v_1=0$ , et à l'appui du nœud 2 :  $v_2=0$ . Ainsi, le vecteur déplacement global aura finalement pour composantes inconnues :  $u_2$ ,  $u_3$  et  $v_3$ .

Ainsi, la somme des membres à gauches des équations (41), (42) et (43) permet finalement d'écrire :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ R_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \left[ [K_{1exp}] + [K_{2exp}] + [K_{3exp}] \right] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Si on remplace ces matrices expansées par leurs expressions respectives, on aura :

$$[K_{exp}] = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

La somme de ces trois matrices expansées donne la matrice de rigidité globale écrite dans le système à résoudre :

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ 0 \\ R_{y2} \\ 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{E.A}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 & -1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ 0 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (01') \\ (02') \\ (03') \\ (04') \\ (05') \\ (06') \end{matrix}$$

Les équations (03') (05') et (06') possèdent les inconnues  $u_2$ ,  $u_3$  et  $v_3$ . Le développement de l'équation (03') permet d'obtenir  $u_2 = 0$ . Réécrivons les équations (05') et (06') tout en remplaçant  $u_2$  par sa valeur nulle. On obtient alors :

$$\begin{cases} 2 = \frac{E.A}{2L}(u_3 + v_3) \\ 1 = \frac{E.A}{2L}(u_3 + 3v_3) \end{cases}$$

La résolution de ce sous-système donne :  $u_3 = \frac{5.L}{E.A} = \frac{5 \cdot 100}{50 \cdot 2} = 5cm$  et  $v_3 = -\frac{L}{E.A} = -\frac{100}{50 \cdot 2} = -1cm$

En ce qui concerne les réactions  $R_{x1}, R_{y1}$  et  $R_{y2}$  ; celles-ci sont obtenues en remplaçant les déplacements obtenus précédemment par leurs valeurs dans les équations (01') (02') et (04'). Ce qui permet d'obtenir :

$$R_{x1} = -\frac{E.A}{2L}(u_3 + v_3) = -\frac{E.A}{2L}\left(\frac{5.L}{E.A} - \frac{L}{E.A}\right) = -\frac{E.A}{2L}\left(\frac{4.L}{E.A}\right) = -2KN$$

$$R_{y1} = -\frac{E.A}{2L}(u_3 + v_3) = -2KN$$

$$R_{y2} = \frac{E.A}{L}(-v_3) = -\frac{E.A}{L}\left(-\frac{L}{E.A}\right) = +1KN$$

Calcul des efforts internes dans les barres 1, 2 et 3 :

Efforts internes dans la barre 1 :

La barre 01 reliant les nœuds 1 et 2, les composantes du vecteur déplacements nodaux en repère global sont comme suit :  $\langle U_1 \rangle = \langle u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \rangle = \langle 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle$

On voit bien que toutes les composantes de ce vecteur sont nulles. Par conséquent, le produit matriciel de ce vecteur par la matrice de passage  $[T]$  donnée par l'expression(29), donnera également un vecteur déplacements à composantes en repère local nulles :

$$\langle \bar{U}_1 \rangle = \langle \bar{u}_1 \ \bar{v}_1 \ \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \rangle = \langle 0 \ 0 \ 0 \ 0 \rangle$$

Or l'allongement  $d_1$  de la barre est toujours calculé en repère local, tel que :

$$d_1 = (\bar{u}_2 - \bar{u}_1) = 0 - 0 = 0$$

Ce qui implique que l'effort interne dans la barre 1 est également nul tel que :

$$N_1 = \frac{E.A}{L}d_1 = 0$$

Efforts internes dans la barre 2 :

La barre 02 reliant les nœuds 2 et 3, les composantes du vecteur déplacements nodaux en repère global sont comme suit :

$$\langle U_2 \rangle = \langle u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \rangle = \langle 0 \ 0 \ 5 \ -1 \rangle$$

Les composantes en repère local de ce vecteur sont obtenues en effectuant le produit matriciel de la matrice de passage  $[T]$  par ce vecteur tel que pour  $\varphi = \pi/2$ ,  $c = \cos\varphi = 0$  et  $s = \sin\varphi = 1$ , on a :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

On obtient donc les composantes locales suivantes

$$\langle \bar{U}_2 \rangle = \langle \bar{u}_2 \ \bar{v}_2 \ \bar{u}_3 \ \bar{v}_3 \rangle = \langle 0 \ 0 \ -1 \ -5 \rangle$$

Or l'allongement  $d_2$  de la barre est toujours calculé en repère local, tel que :

$$d_2 = (\bar{u}_3 - \bar{u}_2) = -1 - 0 = -1$$

L'allongement  $d_2$  étant négatif. Il s'agit donc d'un raccourcissement dû à un effort interne de compression tel que :

$$N_2 = \frac{E.A}{L}d_2 = \frac{50.2}{100} \cdot (-1) = -1KN$$

### Efforts internes dans la barre 3 :

La barre 03 reliant les nœuds 1 et 3, les composantes du vecteur déplacements nodaux en repère global sont comme suit :

$$\langle U_3 \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 5 \quad -1 \rangle$$

Les composantes en repère local de ce vecteur sont obtenues en effectuant le produit matriciel de la matrice de passage  $[T]$  par ce vecteur tel que pour  $\varphi = \pi/4$ ,  $c = \cos\varphi = s = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , on a :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

On obtient donc les composantes locales suivantes

$$\langle \bar{U}_3 \rangle = \langle \bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{u}_3 \quad \bar{v}_3 \rangle = \langle 0 \quad 0 \quad 2\sqrt{2} \quad -3\sqrt{2} \rangle$$

Or l'allongement  $d_3$  de la barre est toujours calculé en repère local, tel que :

$$d_3 = (\bar{u}_3 - \bar{u}_1) = 2\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}$$

L'allongement  $d_3$  étant positif. Il s'agit donc d'un allongement dû à un effort interne de traction tel que :

$$N_3 = \frac{E \cdot A \cdot \sqrt{2}}{L \cdot \sqrt{2}} d_3 = \frac{50 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{100 \cdot \sqrt{2}} \cdot (2\sqrt{2}) = +2,828 \text{ KN}$$

### Exemple 02 :

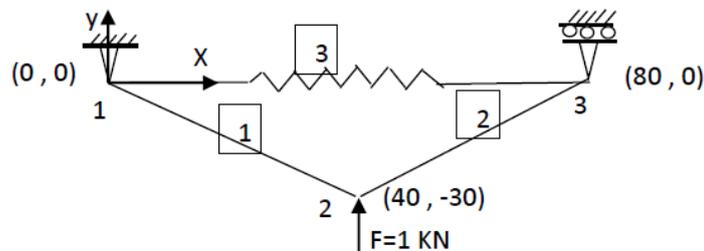
Soit le système formé de deux tiges métalliques (1) et (2) de 50 cm de longueur chacune, et d'un ressort horizontal (3) de longueur  $L=80\text{cm}$  (figure 12). Ce ressort relie les deux extrémités supérieures (ou bien les nœuds 1 et 3) de ces tiges. Ces barres sont en acier dont la section transversale est d'aire  $A = 1 \text{ cm}^2$  et de module d'Young  $E = 210000 \text{ MPa}$ . Ce ressort est de raideur  $k = \left( \frac{80 \cdot E \cdot A}{50 \cdot L} \right)$

Le nœud 1 est un appui double tel que  $u_{x1} = u_{y1} = 0$ . Le nœud 3 est un appui simple tel que  $u_{y3} = 0$ . Les coordonnées des nœuds 1, 2 et 3 sont respectivement en cm  $(0, 0)$ ;  $(40, -30)$  et  $(80, 0)$ . Une force verticale  $F$  d'intensité 1KN, dirigée vers le haut est appliquée au niveau du nœud 2.

- 1) Calculer les composantes  $u_{x2}$  et  $u_{y2}$  du vecteur déplacement du nœud 2 ainsi que la composante horizontale  $u_{x3}$  du vecteur déplacement du nœud 3.
- 2) Déduire de la réponse à la question précédente la valeur de l'allongement du ressort (0,5 points)
- 3) Calculer les réactions au niveau des appuis 1 et 3.
- 4) Calculer la valeur de l'effort normal (avec son signe) dans l'élément (2).

Notas : Pour l'élément (1) Prendre l'angle  $\varphi = -\arctg(30/40) = -36.87$  degrés.

Pour l'élément (2) prendre l'angle  $\varphi = +\arctg(30/40) = +36.87$  degrés.



**Figure 12 :** système de deux tiges de suspension reliées par un ressort horizontal

Solution : Essayez d'abord de faire l'exercice !!!!



Expansion des matrices  $[K^1]$ ,  $[K^2]$  et  $[K^3]$ :

- l'élément ① relie les nœuds 1 et 2, il manque le nœud 3

$$[K^1]_e = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1}{50} \begin{bmatrix} 0,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 0,64 & -0,48 & 0 & 0 \\ 0,48 & -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0,1 \mid 2 \mid 3)$$

- l'élément ② relie les nœuds 2 et 3, il manque le nœud 1

$$[K^2]_e = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1}{50} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,64 & 0,48 & -0,64 & -0,48 \\ 0 & 0 & 0,48 & 0,36 & -0,48 & -0,36 \\ 0 & 0 & -0,64 & -0,48 & 0,64 & 0,48 \\ 0 & 0 & -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \quad (0,1 \mid 2 \mid 3)$$

- l'élément ③ relie les nœuds 1 et 3; il manque le nœud 2

$$[K^3]_e = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 1}{50} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0,1 \mid 2 \mid 3)$$

Faisons la somme  $[K] = [K^1]_e + [K^2]_e + [K^3]_e$

$$\Rightarrow [K] = \frac{21000 \cdot 1}{50} \begin{bmatrix} 1,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 1,28 & 0,00 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & 0,00 & 0,72 & -0,48 & -0,36 \\ -1 & 0 & -0,64 & -0,48 & 1,64 & 0,48 \\ 0 & 0 & -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$\text{or } \begin{Bmatrix} U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \leftarrow u_{x1} \\ 0 \leftarrow u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ 0 \leftarrow u_{y3} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \leftarrow F_{x2} \\ 1 \leftarrow F_{y2} \\ 0 \leftarrow F_{x3} \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{le système } [K] \cdot \begin{Bmatrix} U \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix} \text{ donne :}$$

$$\begin{array}{l} 1) \\ 2) \\ 3) \\ 4) \\ 5) \\ 6) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \frac{21000 \cdot 1}{50} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1,64 & -0,48 & -0,64 & 0,48 & -1 & 0 \\ -0,48 & 0,36 & 0,48 & -0,36 & 0 & 0 \\ -0,64 & 0,48 & 1,28 & 0,00 & -0,64 & -0,48 \\ 0,48 & -0,36 & 0,00 & 0,72 & -0,48 & -0,36 \\ -1 & 0 & -0,64 & -0,48 & 1,64 & 0,48 \\ 0 & 0 & -0,48 & -0,36 & 0,48 & 0,36 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ F_{y3} \end{Bmatrix}$$

$$(3) \Rightarrow \frac{21000 \cdot 1}{50} (1,28 u_{x2} - 0,64 u_{x3}) = 0 \Rightarrow 1,28 u_{x2} = 0,64 u_{x3} \\ \Rightarrow \boxed{u_{x2} = 0,5 u_{x3}} \quad (3') \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$(4) \quad \frac{21000 \cdot 1}{50} (0,72 u_{y2} - 0,48 u_{x3}) = 1 \\ 0,72 u_{y2} - 0,48 u_{x3} = \frac{50}{21000 \cdot 1} \\ \Rightarrow u_{y2} = \frac{1}{0,72} \left[ \frac{50}{21000 \cdot 1} + 0,48 u_{x3} \right] \quad (4) \quad (0,5 \text{ pt})$$

$$(5) \Rightarrow -0,64 u_{x2} - 0,48 u_{y2} + 1,64 u_{x3} = 0 \quad (0,5 \text{ pt}) \\ \text{--- page 3' ---}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{x3} = 1,5873 \cdot 10^{-3} \text{ cm}} \quad (0,5 \text{ pt})$$

D'après (3')  $\Rightarrow u_{x2} = 0,5 u_{x3} = 0,5 \times 1,5873 \cdot 10^{-3} = 7,94 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$   
 $\Rightarrow \boxed{u_{x2} = 7,94 \cdot 10^{-4} \text{ cm}} \quad (0,5 \text{ pt})$

et d'après (4')  $\Rightarrow u_{y2} = \frac{1}{0,72} \left[ \frac{50}{21000 \cdot 1} + 0,48 \cdot 1,587 \cdot 10^{-3} \right]$   
 $\Rightarrow \boxed{u_{y2} = 4,365 \cdot 10^{-3} \text{ cm}} \quad (0,5 \text{ pt})$

2°) Déduire des résultats précédents, la valeur de l'allongement du ressort

$$\Delta \text{ressort} = u_{x3} - u_{x1} = 1,587 \cdot 10^{-3} - 0 = 1,587 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \text{ressort} = 1,587 \cdot 10^{-3} \text{ cm}} \quad (0,5 \text{ pt})$$

3°) Calcul des réactions aux appuis:

1)  $\Rightarrow F_{x1} = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (-0,64 \cdot u_{x2} + 0,48 \cdot u_{y2} - u_{x3}) = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (-0,64 \cdot 7,94 \cdot 10^{-4} + 0,48 \cdot 4,365 \cdot 10^{-3} - 1,587 \cdot 10^{-3})$   
 $\Rightarrow F_{x1} = 1,092 \cdot 10^{-4} \text{ kN} \approx 0 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{F_{x1} = 0 \text{ kN}} \quad (0,5 \text{ pt})$

2)  $\Rightarrow F_{y1} = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (0,48 \cdot u_{x2} - 0,36 \cdot u_{y2}) = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (0,48 \cdot 7,94 \cdot 10^{-4} - 0,36 \cdot 4,365 \cdot 10^{-3})$   
 $F_{y1} = -0,499968 \text{ kN} \approx -0,5 \text{ kN} \Rightarrow \boxed{F_{y1} = -0,5 \text{ kN}} \quad (0,5 \text{ pt})$

5)  $\Rightarrow F_{y3} = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (-0,48 \cdot u_{x2} - 0,36 \cdot u_{y2} + 0,48 \cdot u_{x3})$   
 $F_{y3} = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (-0,48 \cdot 7,94 \cdot 10^{-4} - 0,36 \cdot 4,365 \cdot 10^{-3} + 0,48 \cdot 1,587 \cdot 10^{-3})$   
 $\boxed{F_{y3} = -0,5 \text{ kN}} \quad (0,5 \text{ pt})$

4°) Calcul de la valeur de l'effort Normal dans l'élément (2):

$\Rightarrow \varphi = +36,87^\circ \quad F^{(2)} = \frac{EA}{50} \cdot \delta^{(2)}$  avec  $\delta^{(2)} = \bar{u}_{x3} - \bar{u}_{x2}$

$$\begin{cases} \bar{u}_{x_2} \\ \bar{u}_{y_2} \\ \bar{u}_{x_3} \\ \bar{u}_{y_3} \end{cases} = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{x_3} \\ u_{y_3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \bar{u}_{x_2} \\ \bar{u}_{y_2} \\ \bar{u}_{x_3} \\ \bar{u}_{y_3} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{x_2} \\ u_{y_2} \\ u_{x_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_{x_2} = 0,8 \cdot u_{x_2} + 0,6 u_{y_2} = 0,8 \cdot 7,94 \cdot 10^{-4} + 0,6 \cdot 4,365 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \bar{u}_{x_2} = 3,25 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

$$\bar{u}_{x_3} = 0,8 \cdot u_{x_3} = 0,8 \cdot 1,587 \cdot 10^{-3} = 1,27 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow \text{l'allongement } d^{(2)} = \bar{u}_{x_3} - \bar{u}_{x_2} = 1,27 \cdot 10^{-3} - 3,25 \cdot 10^{-3}$$

$$\Rightarrow d^{(2)} = -1,98 \cdot 10^{-3} \text{ cm} \cdot \begin{matrix} 0,5/10 \\ 1/10 \end{matrix} < 0 \Rightarrow \text{raccourcissement}$$

$$\Rightarrow F^{(2)} = \frac{EA}{l} d^{(2)} = \frac{21000 \cdot 1}{50} \cdot (-1,98 \cdot 10^{-3}) = -0,83 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow \boxed{F^{(2)} = -0,83 \text{ kN}} < 0 \Rightarrow \text{effort de compression}$$

-  -