

## Modélisation et calculs de structures formées de poutres

### 1. Introduction

Rappelons que du point de vue de la théorie de la résistance des matériaux, une poutre peut être définie comme étant un élément de structure (rectiligne ou courbe), qui peut travailler aussi bien en flexion, en cisaillement, en torsion qu'en compression-traction. Ainsi, toutes les sections transversales de cet élément peuvent être soumises à des moments fléchissants, des moments de torsion, des efforts tranchants ainsi qu'à des efforts normaux. Toutefois, les dimensions de ces sections transversales doivent être faibles devant la longueur de la poutre.

L'objectif de ce chapitre consiste non seulement à introduire l'élément fini linéique à deux nœuds SEG2 de type poutre, mais également à présenter une méthode utilisant ce type d'élément pour le calcul de structures. Sans utiliser de formulations intégrales, les calculs se feront directement sur l'élément réel. Ainsi, nous présenterons une méthode directe et simple de calcul de *la matrice de rigidité élémentaire* écrite en repère local. Après l'opération de transformation ou bien d'écriture de ces matrices de rigidités élémentaires dans le repère global, les matrices obtenues seront assemblées pour former «une matrice de rigidité dite globale» notée  $[K]$  et représentant la rigidité de toute la structure formée par ces éléments. Cette matrice sera ensuite utilisée pour la résolution d'un système global d'équations reliant le vecteur déplacements nodaux  $\{U\}$  au vecteur forces nodales extérieures  $\{F\}$  au telle que :

$$[K].\{U\} = \{F\} \quad (01)$$

Ce dernier (le *vecteur global de forces nodales*  $\{F\}$ ) représente les forces extérieures appliquées ainsi que les réactions des appuis. La résolution de ce système d'équations doit se faire avec l'introduction de conditions aux limites en déplacements qui consistent à tenir compte des blocages des degrés de liberté des nœuds situés au niveau des appuis.

Par ailleurs, considérons une poutre isostatique, de longueur  $l$ , (figure 01) reposant sur deux appuis et située dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$ . L'axe  $ox$  est porté par l'axe longitudinal (figure 01). Soit une section transversale quelconque située en un point d'abscisse  $x$ .

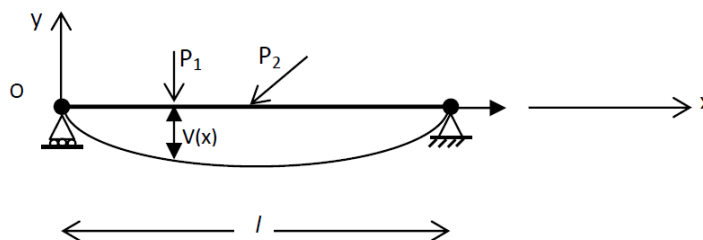


Figure 01 : poutre isostatique sur deux appuis

Les mouvements possibles de ce point ou bien les degrés de liberté (notés par *ddl*) associés à ce point, sont :

- deux translations  $u(x)$  et  $v(x)$  respectivement selon les axes  $ox$  et  $oy$
- une rotation  $\theta(x)$  autour de l'axe  $oz$  perpendiculaire au plan lié au repère  $(o,x,y)$ .

La translation  $u(x)$  de ce point est due à la composante parallèle à l'axe longitudinal  $ox$  (cas de la force inclinée  $P_2$  de la figure 01). La translation  $v(x)$  de ce point est due à la composante parallèle à

l'axe  $oy$ . Dans le cas où les charges sont perpendiculaires à l'axe  $ox$  (cas de la force  $P_i$  de la figure 01), les translations  $u(x)$  deviennent nulles. Dans ce cas, nous ne considérerons que les translations  $v(x)$  ainsi que les rotations  $\theta(x)$  telle que :

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx}$$

## 2. L'élément poutre

De manière générale, on définit l'élément poutre comme un élément unidimensionnel 1D, à deux nœuds  $i$  et  $j$  tel qu'illustré dans la figure 2 ci-dessous :

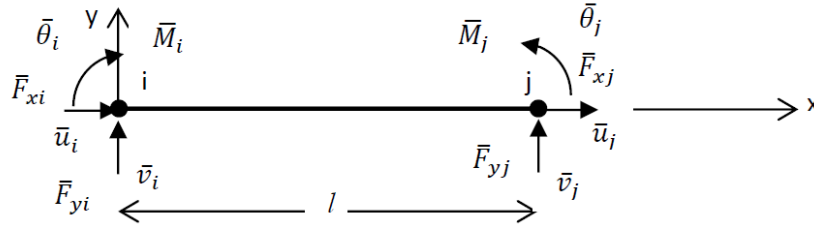


Figure 02 : Elément poutre avec les degrés de liberté associés aux nœuds  $i$  et  $j$  ainsi que les forces nodales correspondantes

Dans un premier temps, considérons uniquement le cas de deux degrés de libertés par nœud :

- la translation  $v(x)$  selon l'axe  $oy$
- la rotation  $\theta(x)$  autour de l'axe  $oz$  perpendiculaire au plan lié au repère  $(o,x,y)$ .

La prise en compte du déplacement axial  $u(x)$  sera considérée plus loin. Ainsi, les quatre  $ddl$  de notre élément sont :  $v_i$ ,  $\theta_i$ ,  $v_j$  et  $\theta_j$ . Ainsi, puisqu'il existe quatre valeurs nodales, la valeur de  $v(x)$  en un point quelconque d'abscisse  $x$  doit être interpolée avec un polynôme de degré 03 :

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 \quad (02)$$

$\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  sont des constantes inconnues que nous pouvons déterminer en utilisant les conditions aux limites telles que :

$$v(0) = \alpha_0 = \bar{v}_i, \rightarrow \bar{v}_i = \alpha_0 = \langle 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{dv(0)}{dx} = \bar{\theta}_i = \alpha_1 + 0, \rightarrow \bar{\theta}_i = \alpha_1 = \langle 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$v(l) = \bar{v}_j = \alpha_0 + \alpha_1 l + \alpha_2 l^2 + \alpha_3 l^3 = \langle 1 \quad l \quad l^2 \quad l^3 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{dv(l)}{dx} = \bar{\theta}_j = \alpha_1 + 2\alpha_2 l + 3\alpha_3 l^2 = \langle 0 \quad 1 \quad 2l \quad 3l^2 \rangle \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Sous forme matricielle, le système formé par les quatre équations précédentes s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (03)$$

La résolution du système précédent (03) donne :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \bar{v}_i, \\ \alpha_1 &= \bar{\theta}_i, \\ \alpha_2 &= \frac{3}{2}(-\bar{v}_i + \bar{v}_j) - \frac{1}{l}(2\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j) \\ \alpha_3 &= \frac{2}{l^3}(\bar{v}_i - \bar{v}_j) + \frac{1}{l^2}(\bar{\theta}_i + \bar{\theta}_j) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (04)$$

En remplaçant les expressions précédentes de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  dans l'expression (02) de  $v(x)$ , on aura :

$$v(x) = \langle 1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (05)$$

Ou bien

$$v(x) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right) \bar{v}_i + \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \bar{\theta}_i + \left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right) \bar{v}_j + \left(-\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \bar{\theta}_j \quad (06)$$

Par ailleurs, en introduisant les fonctions d'interpolations  $N_i(x)$ ,  $i=1,4$  sur l'élément poutre  $ij$ , on peut écrire sous forme matricielle ;

$$v(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (07)$$

En comparant les deux expressions précédentes (06) et (07), on peut déduire par identification les expressions de ces fonctions d'interpolations telles que :

$$\begin{cases} N_1(x) = \left(1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3\right) \\ N_2(x) = \left(x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \\ N_3(x) = \left(\frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3\right) \\ N_4(x) = \left(-\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3\right) \end{cases} \quad (08)$$

### 3. Matrice de rigidité élémentaire

Rappelons également un résultat important tiré de la théorie des poutres en RDM qui consiste en la proportionnalité de la déformation en flexion vis-à-vis de la courbure de l'élément autrement dit à la dérivée seconde du déplacement  $v(x)$  tel que :

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \quad (09)$$

En remplaçant  $v(x)$  écrit précédemment dans (09) par son expression tirée de (07), on aura :

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2}{dx^2} \langle N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x) \rangle \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\text{avec } \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \text{vecteur constant}$$

Ainsi, nous retrouvons la même expression que celle définissant la matrice  $[B]$  définie au chapitre 08 reliant la déformation en point quelconque à l'intérieur de l'élément vecteur déplacements nodaux telle que :

$$\varepsilon_x = [B] \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (11)$$

En comparant les deux expressions précédentes (10) et (11), et en remplaçant les fonctions  $N_i(x)$ ,  $i=1,4$  par leurs expressions écrites en (08), on peut tirer :

$$[B] = -y \frac{d^2}{dx^2} \langle \left(1 - \frac{3}{l^2} x^2 + \frac{2}{l^3} x^3\right) \quad \left(x - \frac{2}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3\right) \quad \left(\frac{3}{l^2} x^2 - \frac{2}{l^3} x^3\right) \quad \left(-\frac{1}{l} x^2 + \frac{1}{l^2} x^3\right) \rangle \quad (12)$$

La matrice  $[B]$  est connue pour son rôle de matrice de dérivées de fonctions d'interpolation reliant les déformations aux déplacements nodaux.

Par ailleurs, la loi de Hooke, pour un élément fini unidimensionnel, s'écrit :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

avec  $E$  : le module de Young

On rappelle l'expression (8-12a) établie au chapitre 08 :

$$[\bar{K}^e] = \int_{\Omega^{(e)}} [B]^T \cdot [H] \cdot [B] \cdot d\Omega \quad \text{avec } [H] = E \text{ et } d\Omega = dx \cdot dS$$

Ceci implique que :

$$[\bar{K}^e] = E \int_0^l dx \int_S [B]^T [B] dS$$

avec  $dS = dy \cdot dz$

Après développement, la matrice de rigidité  $[\bar{K}^e]$  dans le repère local sera égale à :

$$[\bar{K}^e] = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Avec  $I_z$  : le moment d'inertie de la section transversale par rapport à l'axe z

Finalement, au niveau local ou du repère local lié à l'élément considéré  $ij$ , la relation entre le vecteur forces nodales et le vecteur déplacements nodaux s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Si on tient compte des déplacements axiaux (ou bien du troisième degré de liberté  $u_i$ ), on aura :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{ii}] & [\bar{K}_{ij}] \\ [\bar{K}_{ji}] & [\bar{K}_{jj}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (15)$$

Les sous matrices exposées ci-dessus s'écrivent :

$$[\bar{K}_{ii}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{jj}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{-E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$[\bar{K}_{ij}] = [\bar{K}_{ji}]^T$  car la matrice de rigidité est symétrique.

#### 4. Matrice de rigidité dans le repère global

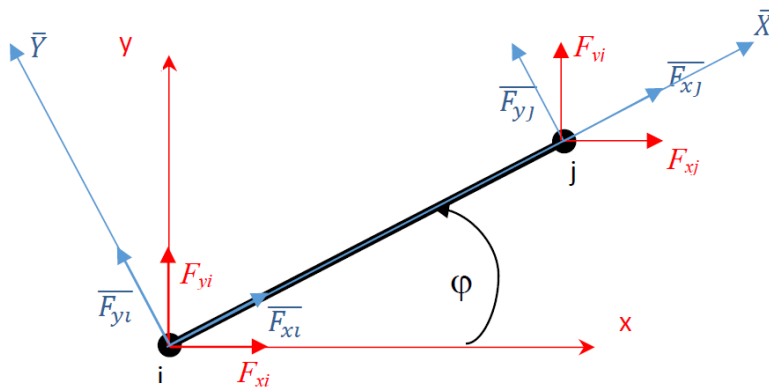


Figure 03 : représentation du repère local, du repère global et des vecteurs composantes associées

Les vecteurs forces locaux peuvent être exprimés en fonction de leurs composantes dans le repère global comme suit :

$$\begin{cases} \bar{F}_{xi} = c.F_{xi} + s.F_{yi} \\ \bar{F}_{yi} = -s.F_{xi} + c.F_{yi} \\ \bar{M}_{zi} = M_{zi} \\ \bar{F}_{xj} = c.F_{xj} + s.F_{yj} \\ \bar{F}_{yj} = -s.F_{xj} + c.F_{yj} \\ \bar{M}_{zj} = M_{zj} \end{cases} \quad (17)$$

Avec  $c = \cos\varphi$  et  $s = \sin\varphi$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_{zi} \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ M_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Les composantes des vecteurs déplacements locaux notés  $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$  et  $(\bar{u}_j, \bar{v}_j)$  sont illustrés en figure 09 du chapitre 08. Leur projection sur le repère global (oxy) donne pour les nœuds  $i$  et  $j$  les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{u}_i = c.u_i + s.v_i \\ \bar{v}_i = -s.u_i + c.v_i \\ \bar{\theta}_i = \theta_i \\ \bar{u}_j = c.u_j + s.v_j \\ \bar{v}_j = -s.u_j + c.v_j \\ \bar{\theta}_j = \theta_j \end{cases} \quad (18)$$

Sous Forme matricielle, le système précédent peut être écrit:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Sous formes condensées, les expressions précédentes (17) et (19) peuvent être formulées:

$$\{\bar{U}\} = [T]\{U\} \quad (20)$$

$$\text{et } \{\bar{F}\} = [T]\{F\} \quad (21)$$

Ainsi, on voit bien que la matrice  $[T]$  est la matrice de transformation ou de passage du repère local lié à l'élément considéré au repère global lié à la structure.

Par ailleurs, rappelons que si les deux repères (local et global) sont orthonormés, ceci implique que la matrice inverse de la matrice  $[T]$  ne sera rien d'autre que sa transposée, telle que :

$$[T]^{-1} = [T]^t$$

Réécrivons également l'expression (15) sous forme condensée telle que :

$$\{\bar{F}\} = [\bar{K}_e]\{\bar{U}\} \quad (22)$$

En remplaçant dans (22),  $\{\bar{F}\}$  et  $\{\bar{U}\}$  par leurs expressions respectives écrites en (20) et (21), on obtient :

$$[T]\{F\} = [\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (23)$$

En multipliant les deux membres de l'équation précédente par  $[T]^t$ , on obtient :

$$[T]^t[T]\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\}$$

Or  $[T]^t[T] = [I]$  : la matrice identité telle que :

$$[T]^t[T]\{F\} = \{F\}$$

On en déduit que :

$$\{F\} = [T]^t[\bar{K}_e][T]\{U\} \quad (24)$$

On sait par ailleurs que, la relation entre les composantes des vecteurs forces et déplacements peuvent s'écrire dans le repère global comme suit :

$$\{F\} = [K_e]\{U\} \quad (25)$$

avec  $[K_e]$  : la matrice de rigidité élémentaire écrite cette fois ci dans le repère global.

En comparant les expressions (24) et (25), on en déduit par identification l'expression de la matrice

$[K_e]$  en fonction de la matrice de passage  $[T]$ , de sa transposée  $[T]^t$  et de la matrice  $[\bar{K}_e]$  telle que :

$$[K_e] = [T]^t[\bar{K}_e][T] \quad (26)$$

Ainsi, les termes de la matrice  $[K_e]$  peuvent être obtenus en remplaçant dans l'expression précédente (26) la matrice  $[\bar{K}_e]$  par son expression établie en (15) et la matrice  $[T]$  par son expression qu'on peut déduire de (17), et en effectuant le double produit matriciel.

## 5. Exemples

### 5.1. Exemple 01 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge ponctuelle en son milieu

Soit la poutre représentée dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$  tel qu'illustré en figure 04 ci-dessous. Cette poutre est soumise en son milieu à une charge verticale  $P$  perpendiculaire à son axe longitudinal  $ox$ . Elle est donc modélisée par un maillage composé de deux éléments finis connectés entre eux au niveau du nœud 2 correspondant au point d'application de la charge  $P$ . Il est demandé de calculer:

- 1- la flèche de cette poutre (ou bien la valeur du déplacement vertical  $v_2$  du nœud 2).
- 2- les valeurs des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  des sections d'extrémités
- 3- les valeurs des réactions aux appuis  $F_{y1}$  et  $F_{y2}$ .
- 4- La valeur du moment fléchissant  $M_{z2}$  en repère global ainsi que le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local.

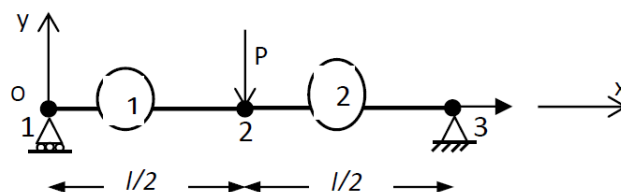


Figure 04: modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et chargée au milieu

**Solution :**

Puisque la charge P est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $ox$ , il n'y a donc pas d'efforts normaux. Ceci implique que

$$u(x) = 0 \quad \forall x$$

Ainsi, nous ne considérerons que deux degrés de libertés par nœud à savoir : le déplacement vertical  $v$  et la rotation  $\theta$ . Le système global d'équations à résoudre sera donc comme suit :

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

Avec

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \text{ la matrice de rigidité globale } [K] \text{ sera de dimension } (6,6)$$

Par ailleurs, les repères locaux liés aux éléments sont tous parallèles au repère global

$$\Rightarrow [T] = [T]^t = [I]$$

$$\Rightarrow [K_1] = [T]^t [\bar{K}_1] [T] = [\bar{K}_1] \quad \text{et} \quad [K_2] = [T]^t [\bar{K}_2] [T] = [\bar{K}_2]$$

Si on applique l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 1 reliant les nœuds 1 et 2 (à 2 ddl par nœud sans déplacements axiaux) est comme suit :

$$\Rightarrow [K_1] = \frac{EI}{(l/2)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(\frac{l}{2}) & -12 & 6(\frac{l}{2}) \\ 6(\frac{l}{2}) & 4(\frac{l}{2})^2 & -6(\frac{l}{2}) & 2(\frac{l}{2})^2 \\ -12 & -6(\frac{l}{2}) & 12 & -6(\frac{l}{2}) \\ 6(\frac{l}{2}) & 2(\frac{l}{2})^2 & -6(\frac{l}{2}) & 4(\frac{l}{2})^2 \end{bmatrix}$$
$$[K^1] = [K^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{11}^1] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l \\ 3l & l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{22}^1] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -3l \\ -3l & l^2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [K_{12}^1] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 3l \\ -3l & l^2/2 \end{bmatrix}$$

$$[K_{21}^1] = [K_{12}^1]^T \quad \text{car la matrice de rigidité } [K_1] \text{ est symétrique.}$$

De la même manière, en appliquant l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 2 reliant les nœuds 2 et 3 est comme suit :

$$[K^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

avec



$$[K_{22}^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l \\ 3l & l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{33}^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -3l \\ -3l & l^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K_{23}^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 3l \\ -3l & \frac{l^2}{2} \end{bmatrix}$$

$[K_{32}^2] = [K_{23}^2]^T$  car la matrice de rigidité  $[K_2]$  est également symétrique.

Assemblage des deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [K_{21}^1] & [[K_{22}^1] + [K_{22}^2]] & [K_{23}^2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

En remplaçant les différentes sous matrices par leurs valeurs, on obtient :

$$[K] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3l & 24 & 0 & -12 & 3l \\ 3l & l^2/2 & 0 & 2l^2 & -3l & l^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3l & 12 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites :

$$v_1 = v_3 = 0; \quad \theta_2 = 0; \quad M_{z1} = M_{z3} = 0 \quad \text{et} \quad F_{y2} = -P$$

$$\Rightarrow [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $v_2$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (2), (3) et (6), telles que :

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow & l^2\theta_1 - 3lv_2 = 0 \\ (3) \Rightarrow & \frac{8EI}{l^3}(-3l\theta_1 + 24v_2 + 3l\theta_3) = -P \\ (6) \Rightarrow & 3lv_2 + l^2\theta_3 = 0 \end{cases}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $\theta_1 = -\theta_3$  : on peut facilement vérifier ce résultat en faisant la somme des équations (2) et (6).

$$\text{Par ailleurs, (2)} \Rightarrow \theta_1 = \frac{3v_2}{l} = -\theta_3$$

$$\text{D'autre part (3)} \Rightarrow -2.3.l.\theta_1 + 24.v_2 = -\frac{Pl^3}{8EI}$$

En remplaçant  $\theta_1$  par  $\frac{3v_2}{l}$  dans l'expression précédente, on aura :

$$-6.l.\frac{3v_2}{l} + 24.v_2 = -18v_2 + 24.v_2 = 6v_2 = -\frac{Pl^3}{8EI}$$

$$\begin{aligned} \implies v_2 &= -\frac{Pl^3}{48EI} \\ \implies \theta_1 = -\theta_3 = \frac{3v_2}{l} &= -\frac{3}{l} \cdot \frac{Pl^3}{48EI} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{Pl^2}{16EI} \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{Pl^2}{16EI} \end{aligned}$$

En résolvant le sous-système formé par les équations (1), (4) et (5), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}, F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 tels que :

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (-3l\theta_1 - 12v_2) &= F_{y1} \\ \implies F_{y1} &= \frac{8EI}{l^3} \left( -3l \left( -\frac{Pl^2}{16EI} \right) - 12 \left( -\frac{Pl^3}{48EI} \right) \right) = 1.5P + 2P = 0.5P \end{aligned}$$

$$\text{Donc } F_{y1} = 0.5P$$

De la même manière, le développement de l'équation (5) donnera le même résultat :

$$F_{y3} = 0.5P$$

Quant à l'équation (4), son développement donnera :

$$M_{z2} = \left( \frac{l^2}{2} \theta_1 + \frac{l^2}{2} \theta_3 \right) \frac{8EI}{l^3}$$

$$\text{or } \theta_1 = -\theta_3 \quad \Rightarrow \quad M_{z2} = 0$$

Par contre, si on considère l'élément (1) dans son repère local tel que

$$\frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 (= 0) \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 (= 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} = 0 \\ -P + T_d \\ M_{z2} + M_d \end{Bmatrix}$$

De la dernière équation de ce système, nous pouvons tirer la valeur du moment fléchissant  $M_d$ , considéré ici comme l'action interne de la partie de la poutre située à droite du nœud 2. Donc l'équation (4) de ce système s'écrit :

$$\frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \theta_1 - 3l \cdot v_2 \right) = M_{z2} + M_d$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $M_{z2}$  par leurs valeurs respectives, on aura :

$$\begin{aligned} \frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \left( -\frac{Pl^2}{16EI} \right) - 3l \cdot \left( -\frac{Pl^3}{48EI} \right) \right) &= 0 + M_d \\ \implies M_d &= \frac{8EI}{l^3} \left( -\frac{Pl^4}{32EI} + \frac{Pl^4}{16EI} \right) = \frac{8EI}{l^3} \frac{Pl^4}{32EI} = \frac{Pl}{4} \end{aligned}$$

Finalement, le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local :

$$\bar{M}_{z2} = M_d = \frac{Pl}{4}$$

## 5.2. Exemple 02 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge uniformément répartie

Soit la poutre représentée dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$  tel qu'illustré en figure 05 ci-dessous. Cette poutre est soumise sur toute sa longueur à une charge uniformément répartie  $q$  agissant perpendiculairement à son axe longitudinal  $ox$ . Cette poutre est modélisée par un maillage composé de

deux éléments finis connectés entre eux au niveau du nœud 2 situé au milieu de cette poutre. Il est demandé de calculer:

- 1- la flèche de cette poutre (ou bien la valeur du déplacement vertical  $v_2$  du nœud 2).
- 2- les valeurs des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  des sections d'extrémités
- 3- les valeurs des réactions aux appuis  $F_{y1}$  et  $F_{y2}$ .
- 4- La valeur du moment fléchissant  $M_{z2}$  en repère global ainsi que le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local.

Nota :  $E=2100000$  MPa,  $I_z = 8356$  cm<sup>4</sup>  $q=5$  KN/ml

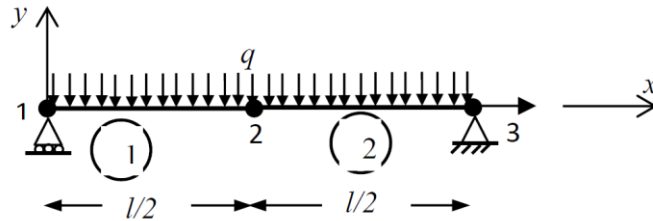


Figure 05: modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et uniformément chargée

### Solution

$$[K^1] = [K^2] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

Les matrices de rigidité élémentaires sont les mêmes que celles de l'exemple précédent. Il en est de même pour la matrice de rigidité globale :

$$[K] = \frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3l & 24 & 0 & -12 & 3l \\ 3l & l^2/2 & 0 & 2l^2 & -3l & l^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3l & 12 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne la détermination des composantes du vecteur forces nodales équivalentes, la démarche consiste à isoler en premier chaque élément et à représenter les charges appliquées en travée. Par la suite, on remplace, ces charges en travée par les réactions des nœuds supposés comme étant des appuis encastrés et ce, avec changement de signe (figures 06 et 07).

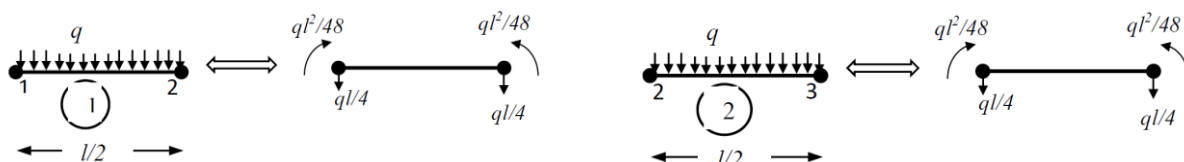


Figure 06: Moments et Forces nodales équivalents aux charges uniformément réparties sur les éléments 1 et 2

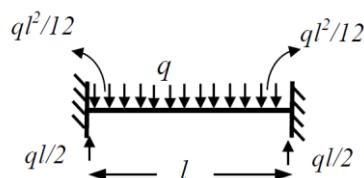


Figure 07: Rappel sur les valeurs des moments et Forces nodales dues aux réactions des appuis et aux charges uniformément réparties  $q$  appliquées sur une poutre de longueur  $l$

Ainsi, en adoptant un sens positif contraire à celui du sens horaire, le vecteur forces nodales équivalentes peut s'écrire :

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\left(\frac{ql}{4} + \frac{ql}{4}\right) \\ \left(-\frac{ql^2}{48} + \frac{ql^2}{48}\right) \\ F_{y3} - \frac{ql}{4} \\ +\frac{ql^2}{48} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\frac{ql}{2} \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{ql}{4} \\ +\frac{ql^2}{48} \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système global à résoudre devient :

$$\frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 & 0 & 0 \\ -12 & -3l & 24 & 0 & -12 & 3l \\ 3l & l^2/2 & 0 & 2l^2 & -3l & l^2/2 \\ 0 & 0 & -12 & -3l & 12 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\frac{ql}{2} \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{ql}{4} \\ +\frac{ql^2}{48} \end{pmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $v_2$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (2), (3) et (6), telles que :

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (l^2\theta_1 - 3lv_2) = -\frac{ql^2}{48} \\ (3) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (-3l\theta_1 + 24v_2 + 3l\theta_3) = -\frac{ql}{2} \\ (6) \Rightarrow \frac{8EI}{l^3} (3lv_2 + l^2\theta_3) = \frac{ql^2}{48} \end{cases}$$

Or pour des raisons de symétrie,  $\theta_1 = -\theta_3$ : on peut facilement vérifier ce résultat en faisant la somme des équations (2) et (6).

La résolution de ce sous-système donne :

$$\theta_1 = -\frac{ql^3}{24EI} = -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^3}{24 \cdot 21000 \cdot 8356} = -1,48 \cdot 10^{-3} \text{ radians}$$

$$v_2 = -\frac{5ql^4}{384EI} = -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^4}{384 \cdot 21000 \cdot 8356} = -0,23 \text{ cm}$$

$$\theta_3 = -\theta_1 = 1,48 \cdot 10^{-3}$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $\theta_3$  et  $v_2$  dans les équations (1), (4) et (5), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}$ ,  $F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 et on obtient:

$$(1) \implies F_{y1} = \frac{ql}{2},$$

$$(5) \implies F_{y3} = \frac{ql}{2}$$

De la même manière que l'exemple précédent, le développement de l'équation (4) donnera :

$$M_{z2} = \left( \frac{l^2}{2} \theta_1 + \frac{l^2}{2} \theta_3 \right) \frac{8EI}{l^3}$$

$$\text{or } \theta_1 = -\theta_3 \quad \Rightarrow \quad M_{z2} = 0$$

Par contre, si on considère l'équilibre de l'élément (1) dans son repère local tel que

$$\frac{8EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 3l & -12 & 3l \\ 3l & l^2 & -3l & l^2/2 \\ -12 & -3l & 12 & -3l \\ 3l & l^2/2 & -3l & l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 (= 0) \\ \theta_1 (= -\frac{ql^3}{24EI}) \\ v_2 (= -\frac{5ql^4}{384EI}) \\ \theta_2 (= 0) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} - \frac{ql}{4} \\ -\frac{ql^2}{48} \\ -\frac{ql}{4} + T_d \\ \frac{ql^2}{48} + M_d \end{Bmatrix}$$

De la dernière équation de ce système, nous pouvons tirer la valeur du moment fléchissant  $M_d$ , considéré ici comme l'action interne de la partie de la poutre située à droite du nœud 2. Donc l'équation (4) de ce système s'écrit :

$$\frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \theta_1 - 3l \cdot v_2 \right) = \frac{ql^2}{48} + M_d$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $M_d$  par leurs valeurs respectives, on aura :

$$\frac{8EI}{l^3} \left( \frac{l^2}{2} \cdot \left( -\frac{ql^3}{24EI} \right) - 3l \cdot \left( -\frac{5ql^4}{384EI} \right) \right) = \frac{ql^2}{48} + M_d$$

$$\implies M_d = \frac{8ql^5}{l^3} \left( -\frac{1}{48} + \frac{15}{384} \right) = \frac{ql^5}{l^3} \left( -\frac{8}{6 \cdot 8} + \frac{15}{6 \cdot 8} \right) - \frac{ql^2}{48} = \frac{7ql^2}{48} - \frac{ql^2}{48} = \frac{6ql^2}{48}$$

Finalement, le moment  $\bar{M}_{z2}$  en repère local

$$\bar{M}_{z2} = M_d = \frac{ql^2}{8}$$

### 5.3. Exemple 03 : cas d'une poutre isostatique soumise à une charge ponctuelle non centrée

Soit la poutre représentée dans le plan lié au repère  $(o,x,y)$  tel qu'illustré en figure 08 ci-dessous. Cette poutre est soumise aux deux tiers de sa longueur (voir figure 07) à une charge verticale  $P$  perpendiculaire à son axe longitudinal  $ox$ . Elle est donc modélisée par un maillage composé de deux éléments finis connectés entre eux au niveau du nœud 2 correspondant au point d'application de la charge  $P$ . Il est demandé de calculer:

- 1- la flèche de cette poutre (ou bien la valeur du déplacement vertical  $v_2$  du nœud 2) ainsi que les valeurs des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_3$  des sections d'extrémités et  $\theta_2$  au droit du point d'application de la force  $P$
- 2- les valeurs des réactions aux appuis 1 et 3 :  $F_{y1}$  et  $F_{y3}$ .
- 3- La valeur du moment fléchissant  $\bar{M}_{z2}$  en repère local.

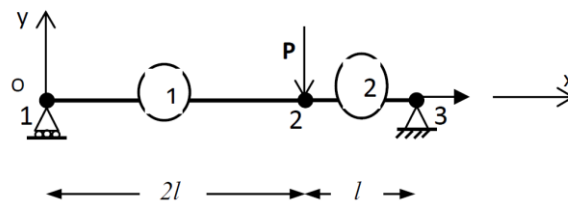


Figure 07: modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et chargée au milieu

#### Solution :

On adopte la même démarche que celle des deux exemples précédents, à savoir : puisque la charge  $P$  est perpendiculaire à l'axe longitudinal  $ox$ , il n'y a donc pas d'efforts normaux. Ceci implique que nous ne considérerons que deux degrés de libertés par nœud à savoir : le déplacement vertical  $v$  et la rotation  $\theta$ . Le système global d'équations à résoudre sera donc:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

Avec

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \text{ la matrice de rigidité globale } [K] \text{ sera de dimension } (6,6)$$

Les repères locaux liés aux éléments sont tous parallèles au repère global

$$\Rightarrow [T] = [T]^t = [I]$$

$$\Rightarrow [K_1] = [T]^t [\bar{K}_1] [T] = [\bar{K}_1] \quad \text{et} \quad [K_2] = [T]^t [\bar{K}_2] [T] = [\bar{K}_2]$$

Si on applique l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 1 reliant les nœuds 1 et 2 (à 2 ddl par nœud sans déplacements axiaux) est comme suit :

$$\Rightarrow [K_1] = \frac{EI_z}{(2l)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6(2l) & -12 & 6(2l) \\ 6(2l) & 4(2l)^2 & -6(2l) & 2(2l)^2 \\ -12 & -6(2l) & 12 & -6(2l) \\ 6(2l) & 2(2l)^2 & -6(2l) & 4(2l)^2 \end{bmatrix} = \frac{EI_z}{8l^3} \begin{bmatrix} 12 & 12l & -12 & 12l \\ 12l & 16l^2 & -12l & 8l^2 \\ -12 & -12l & 12 & -12l \\ 12l & 8l^2 & -12l & 16l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{11}^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3l/2 \\ 3l/2 & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{22}^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3/2 & -3l/2 \\ -3l/2 & 2l^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K_{12}^1] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -3/2 & 3l/2 \\ -3l/2 & l^2 \end{bmatrix}$$

$[K_{21}^1] = [K_{12}^1]^T$  car la matrice de rigidité  $[K_1]$  est symétrique.

De la même manière, en appliquant l'équation (13) ci-dessus, la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre numero 2 reliant les nœuds 2 et 3 est comme suit :

$$[K^2] = \frac{EI_z}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

avec

$$[K_{22}^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l \\ 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad [K_{33}^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \text{ et } [K_{23}^2] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -12 & 6l \\ -6l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

$[K_{32}^2] = [K_{23}^2]^T$  car la matrice de rigidité  $[K_2]$  est également symétrique.

Assemblage des deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [K_{21}^1] & [K_{22}^1] + [K_{22}^2] & [K_{23}^2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

En remplaçant les différentes sous matrices par leurs valeurs, on obtient :

$$[K] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 3/2 & 3l/2 & -3/2 & 3l/2 & 0 & 0 \\ 3l/2 & 2l^2 & -3l/2 & l^2 & 0 & 0 \\ -3/2 & -3l/2 & 27/2 & 9l/2 & -12 & 6l \\ 3l/2 & l^2 & 9l/2 & 6l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

Conditions aux limites :

$$v_1 = v_3 = 0; \quad ; \quad M_{z1} = M_{z3} = 0 \quad \text{et} \quad F_{y2} = -P$$

$$\Rightarrow [K] \begin{Bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y1} \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ F_{y3} \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $v_2$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (2), (3), (4) et (6), telles que :

$$\begin{cases} (2) \Rightarrow & 2l^2\theta_1 - \frac{3l}{2}v_2 + l^2\theta_2 = 0 \\ (3) \Rightarrow & -\frac{3l}{2}\theta_1 + \frac{27}{2}v_2 + \frac{9l}{2}\theta_2 + 6l\theta_3 = -\frac{Pl^3}{EI} \\ (4) \Rightarrow & l^2\theta_1 + \frac{9l}{2}v_2 + 6l^2\theta_2 + 2l^2\theta_3 = 0 \\ (6) \Rightarrow & 6lv_2 + 2l^2\theta_2 + 4l^2\theta_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve :

$$v_2 = -\frac{4Pl^3}{9EI}$$

$$\implies \begin{cases} \theta_1 = -\frac{4Pl^2}{9EI} \\ \theta_2 = +\frac{2Pl^2}{9EI} \\ \theta_3 = \frac{5Pl^2}{9EI} \end{cases}$$

En remplaçant  $v_2$ ,  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  par leurs valeurs dans les équations (1), (4) et (6), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}, F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 tels que :

$$(1) \Rightarrow F_{y1} = \frac{P}{3}$$

$$(6) \Rightarrow F_{y3} = \frac{2P}{3}$$

si on considère l'élément (1) dans son repère local tel que

$$\frac{EI_z}{8l^3} \begin{bmatrix} 12 & 12l & -12 & 12l \\ 12l & 16l^2 & -12l & 8l^2 \\ -12 & -12l & 12 & -12l \\ 12l & 8l^2 & -12l & 16l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 (= 0) \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{y1} \\ M_{z1} = 0 \\ -P + T_d \\ \bar{M}_{z2} \end{pmatrix}$$

De la dernière équation de ce système, nous pouvons tirer la valeur du moment fléchissant  $\bar{M}_{z2}$ , considéré ici comme l'action interne de la partie de la poutre située à droite du nœud 2. Donc l'équation (4) de ce système s'écrit :

$$\bar{M}_{z2} = \frac{EI_z}{8l^3} (8l^2 \cdot \theta_1 - 12l \cdot v_2 + 16l^2 \theta_2)$$

En remplaçant  $\theta_1$ ,  $v_2$  et  $\theta_2$  par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$\bar{M}_{z2} = \frac{2}{3}Pl$$

#### 5.4. Exemple 04 : cas d'une structure bidimensionnelle formant une rampe uniformément chargée

Soit la structure bidimensionnelle d'une rampe constituée de profilés métalliques de type IPE 300 représentée sur la figure 08 ci-dessous et soumise à une charge verticale appliquée sous forme d'une charge uniformément répartie égale à 6KKN/ml. Il est demandé de calculer:

- 1- les déplacements verticaux  $v_2$  et horizontaux  $u_2$  ainsi que la rotation  $\theta_2$  du nœud 2
- 2- les composantes horizontales et verticales des réactions  $F_{x1}$  et  $F_{y1}$  pour l'appui 1 et  $F_{y3}$  de l'appui 3.



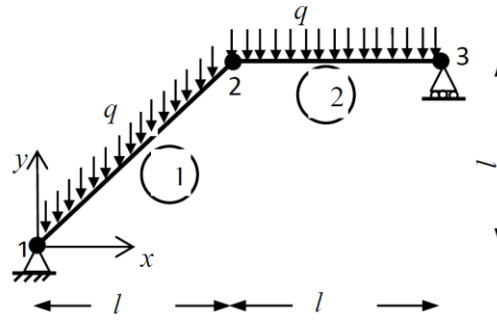


Figure 08 : modèle EF d'une poutre isostatique reposant sur deux appuis et chargée au milieu

Nota :  $E = 210000 \text{ MPa}$  Pour un IPE 300  $I_z = 8356 \text{ cm}^4$  et  $A = 53.8 \text{ cm}^2$

**Solution :**

La charge uniformément répartie  $q$  n'est pas perpendiculaire à l'axe longitudinal de l'élément 1. En effet, dans le repère local lié à cet élément (figure 9), cette charge  $q$  possède deux composantes. La première est portée par l'axe longitudinal  $\overline{OX}$  et engendre des efforts normaux dans les sections transversales. Quant à la seconde composante, celle-ci est portée par l'axe perpendiculaire  $\overline{OY}$ . Elle engendre des efforts tranchants ainsi que des moments fléchissants. Par conséquent, nous devons tenir compte du troisième degré de liberté  $u_i$  tel que chaque nœud  $i$  de cette structure possède, selon le repère global de la figure 08, trois degrés de libertés à savoir : le déplacement horizontal  $u$  selon l'axe  $ox$ , le déplacement vertical  $v$  selon  $oy$  et la rotation  $\theta$  (due au moment fléchissant) autour de l'axe  $oz$  qui est perpendiculaire au repère  $oxy$ . Le système global d'équations à résoudre sera donc:

$$[K].\{U\} = \{F\}$$

$$\text{Avec } \{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_{z1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_{z2} \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_{z3} \end{Bmatrix} \rightarrow \text{la matrice de rigidité globale } [K] \text{ sera de dimension } (9,9)$$

**Matrice de rigidité élémentaire de l'élément 1 :**

Selon le repère local lié à cet élément 1 reliant les nœuds 1 et 2, la relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux peut être écrite comme suit

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_{z1} \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \end{Bmatrix} = [\bar{K}^1] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{11}] & [\bar{K}_{12}] \\ [\bar{K}_{21}] & [\bar{K}_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité élémentaire  $[\bar{K}^1]$  est de dimension (6,6). Comme mentionné dans l'expression (16) du paragraphe 3, les sous matrices exposées ci-dessus s'écrivent :

$$[\bar{K}_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{3EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{-3EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-3EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{12}] = \begin{bmatrix} \frac{-E.A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-3EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$[\bar{K}_{ij}] = [\bar{K}_{ji}]^T$  car la matrice de rigidité est symétrique. Ainsi  $[\bar{K}^1]$  peut être écrite comme suit :

$$[\bar{K}^1] = E \begin{bmatrix} \frac{A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{-A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3I_z}{l^2} & 0 & \frac{-6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{3I_z}{l^2} \\ 0 & \frac{3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} \\ \frac{-A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{-3I_z}{l^2} & 0 & \frac{6I_z}{l^3\sqrt{2}} & \frac{-3I_z}{l^2} \\ 0 & \frac{3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3I_z}{l^2} & \frac{4I_z}{l\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Le passage du repère local lié à l'élément 1 au repère global lié à la structure se fait grâce à la matrice de passage  $[T]$  tel que :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix}$$

Avec  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  donc  $c = \cos \varphi = s = \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ce qui implique :

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On rappelle l'expression de la matrice  $[K^1]$  en fonction de  $[\bar{K}^1]$ , telle que :

$$[K^1] = [T]^t [\bar{K}^1] [T]$$

Après développement, on obtient la matrice  $[K^1]$  écrite dans le repère global:

$$[K^1] = \frac{E\sqrt{2}}{2l} \begin{bmatrix} \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\frac{3I_z}{l} & -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\frac{3I_z}{l} \\ \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} & \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} \\ -\frac{3I_z}{l} & \frac{3I_z}{l^2} & 4I_z & \frac{3I_z}{l} & \frac{-3I_z}{l} & 4I_z \\ -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} & \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{3I_z}{l} \\ \left(\frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & -\left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{-3I_z}{l} & \left(\frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2}\right) & \left(\frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2}\right) & \frac{-3I_z}{l} \\ -\frac{3I_z}{l} & \frac{3I_z}{l^2} & 4I_z & \frac{3I_z}{l} & \frac{-3I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité élémentaire de l'élément 2 :

Selon le repère local lié à cet élément 2 reliant les nœuds 2 et 3, la relation entre les forces nodales et les déplacements nodaux peut être écrite comme suit

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_{z2} \\ \bar{F}_{x3} \\ \bar{F}_{y3} \\ \bar{M}_{z3} \end{Bmatrix} = [K^2] \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\bar{K}_{22}] & [\bar{K}_{23}] \\ [\bar{K}_{32}] & [\bar{K}_{33}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \\ \bar{\theta}_3 \end{Bmatrix}$$

avec

$$[\bar{K}_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{33}] = \begin{bmatrix} \frac{E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & \frac{-6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}_{23}] = \begin{bmatrix} \frac{-E.A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{l^3} & \frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & \frac{-6EI_z}{l^2} & \frac{2EI_z}{l} \end{bmatrix}$$

$[\bar{K}_{32}] = [\bar{K}_{23}]^T$  car la matrice de rigidité est symétrique. Ainsi  $[\bar{K}^2]$  peut être écrite comme suit :

$$[\bar{K}^2] = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} & 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} \\ 0 & \frac{6I_z}{l} & 4I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 2I_z \\ \frac{-A}{l\sqrt{2}} & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} & 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} \\ 0 & \frac{6I_z}{l} & 2I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, les axes du repère local lié à l'élément 2 sont tous parallèles au repère global

$$\implies [T] = [T]^t = [I]$$

$$\implies [K^2] = [T]^t [\bar{K}^2] [T] = [\bar{K}_2]$$

Assemblage des deux matrices  $[K_1]$  et  $[K_2]$

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{11}^1] & [K_{12}^1] & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [K_{21}^1] & [[K_{22}^1] + [K_{22}^2]] & [K_{23}^2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & [K_{32}^2] & [K_{33}^2] \end{bmatrix}$$

En remplaçant les différentes sous matrices par leurs valeurs, on obtient :

$$\{F\} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l^2} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l^2} \frac{1}{2} & 2I_z \sqrt{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & 2I_z \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) + A & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{3I_z}{l} & -A & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{-A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} - \frac{3I_z}{l^2} \right) & \frac{\sqrt{2}}{2} \left( \frac{A}{2} + \frac{3I_z}{l^2} \right) + \frac{12I_z}{l^2} & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} + \frac{6I_z}{l} & 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{6I_z}{l} \\ -\frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l^2} \frac{1}{2} & 2I_z \sqrt{2} & \frac{3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} & \frac{-3I_z \sqrt{2}}{l} \frac{1}{2} + \frac{6I_z}{l} & 2I_z \sqrt{2} + 4I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 2I_z \\ 0 & 0 & 0 & -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} & 0 & \frac{12I_z}{l^2} & \frac{-6I_z}{l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_z}{l} & 2I_z & 0 & \frac{-6I_z}{l} & 4I_z \end{bmatrix} \{U\}$$

**Application numérique :** En remplaçant l'aire de la section transversale  $A (=53,8 \text{ cm}^2)$ , le moment d'inertie  $I_z (=8356 \text{ cm}^4)$  ainsi que la longueur  $l (=500 \text{ cm})$  et le module de Young (égal à  $21000 \text{ KN/cm}^2$ ) par leurs valeurs respectives, on obtient finalement le système d'équations suivant :

$$\{F\} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} 801.87 & 795.91 & -1489.0 & -801.87 & -795.91 & -1489.0 & 0 & 0 & 0 \\ 795.91 & 801.87 & 1489.0 & -795.91 & -801.87 & -2.9779 & 0 & 0 & 0 \\ -1489.0 & 1489.0 & 9.92642E+05 & 1489.0 & 1489.0 & 9.92642E+05 & 0 & 0 & 0 \\ -801.87 & -795.91 & 1489.0 & 3061.5 & 795.91 & 1489.0 & 2259.6 & 0 & 0 \\ -795.91 & -801.87 & -1489.0 & 801.87 & 818.71 & -1.45090E+05 & 0 & -16.846 & 4211.4 \\ -1489.0 & -2.9779 & 9.92642E+05 & 1489.0 & -1.45090E+05 & 3.31795E+10 & 0 & -4211.4 & 7.01904E+05 \\ 0 & 0 & 0 & 2259.6 & 0 & 0 & 2259.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16.846 & -4211.4 & 0 & 16.846 & -4211.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4211.4 & 7.01904E+05 & 0 & 4211.4 & 1.40381E+06 \end{bmatrix} \{U\}$$

Les conditions de blocage aux appuis étant  $u_1 = v_1 = v_3 = 0$ , le vecteur déplacements  $\{U\}$  s'écrit :

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne la détermination des composantes du vecteur  $\{F\}$ , la démarche consiste à isoler en premier chaque élément et à représenter les charges appliquées en travée. Par la suite, on remplace, ces charges en travée par les réactions des nœuds supposés comme étant des appuis encastrés et ce, avec changement de signe (figure 10).

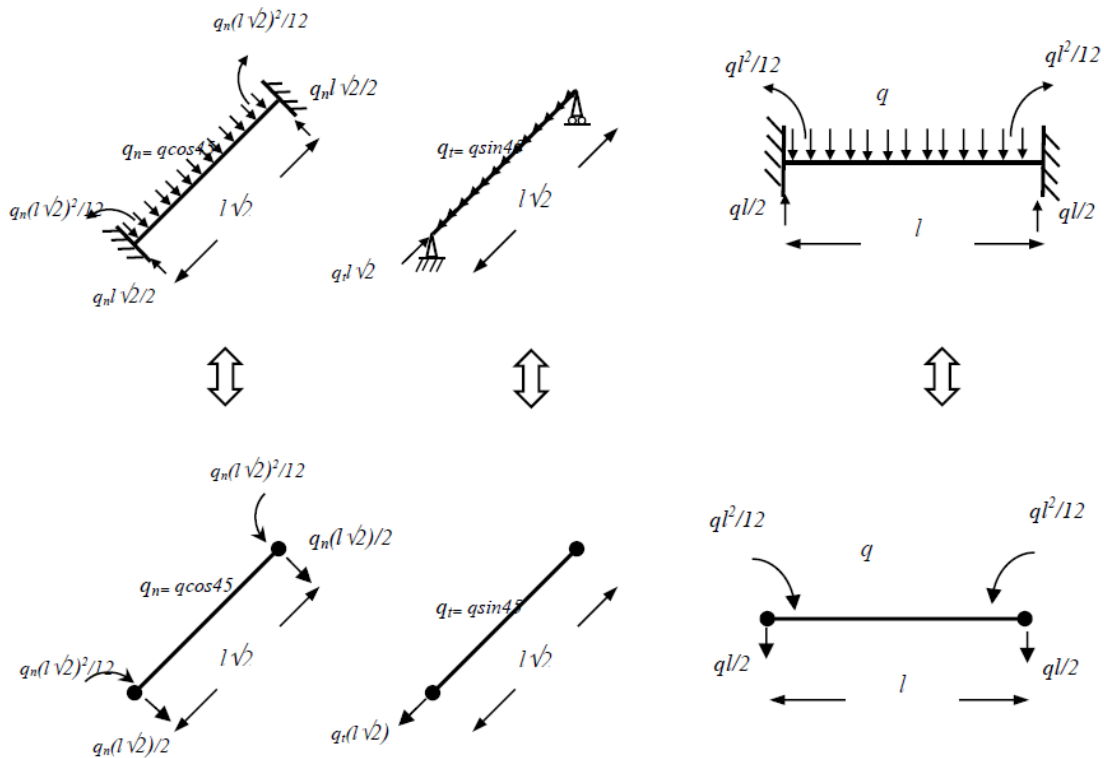


Figure 10 : Moments et Forces nodales équivalents aux charges uniformément réparties sur les éléments 1 et 2

Ainsi, en adoptant un sens positif contraire à celui du sens horaire, le vecteur forces nodales équivalentes peut s'écrire :

$$\{F\} = \begin{pmatrix} F_{x1} + \frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \sin 45 - q_t l \sqrt{2} \cos 45 \\ F_{y1} - \frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \cos 45 - q_t l \sqrt{2} \sin 45 \\ -\frac{q_n (l \sqrt{2})^2}{12} \\ \frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \sin 45 \\ -\frac{q_n l \sqrt{2}}{2} \cos 45 - \frac{q_l}{2} \\ \frac{q_n (l \sqrt{2})^2}{12} - \frac{q_l^2}{12} \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{q_l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} - \frac{q_l \sqrt{2}}{4} \\ F_{y1} - \frac{3 q_l \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{q_l^2 \sqrt{2}}{12} \\ \frac{q_l \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{q_l}{4} (\sqrt{2} + 2) \\ \frac{q_l^2}{12} (\sqrt{2} - 1) \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{q_l}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} - \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \sqrt{2}}{4} \\ F_{y1} - \frac{3 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^2 \sqrt{2}}{12} \\ \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500 \sqrt{2}}{4} \\ -\frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500}{4} (\sqrt{2} + 2) \\ \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500^2}{12} (\sqrt{2} - 1) \\ 0 \\ F_{y3} - \frac{5 \cdot 10^{-2} \cdot 500}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x1} - 8,8388 \\ F_{y1} - 26,5165 \\ -1473,1391 \\ 8,8388 \\ -21,3388 \\ 431,4725 \\ 0 \\ F_{y3} - 12,5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système global à résoudre devient :

$$\begin{bmatrix} F_{x1} - 8,8388 \\ F_{y1} - 26,5165 \\ -1473,1391 \\ 8,8388 \\ -21,3388 \\ 431,4725 \\ 0 \\ F_{y3} - 12,5 \\ 0 \end{bmatrix} = [K] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} (01) \\ (02) \\ (03) \\ (04) \\ (05) \\ (06) \\ (07) \\ (08) \\ (09) \end{matrix}$$

On détermine les valeurs du déplacement  $u_2, v_2$  et  $u_3$  ainsi que celles des rotations  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  en résolvant d'abord le sous-système formé par les équations (3), (4), (5), (6), (7) et (9), telles que :

$$\begin{cases} (3)/1489 \Rightarrow 666,65\theta_1 + u_2 + v_2 + 666,65\theta_2 = -0,9893 \\ (4)/1489 \Rightarrow \theta_1 + 2,0561u_2 + 0,5345v_2 + \theta_2 + 1,5175u_3 = 5,9361 \cdot 10^{-3} \\ (5)/1489 \Rightarrow -\theta_1 + 0,5385u_2 + 0,5498v_2 - 97,441\theta_2 + 2,8283\theta_3 = -1,4331 \cdot 10^{-2} \\ (6)/1489 \Rightarrow 666,65\theta_1 + u_2 - 97,441v_2 + 2,22831 \cdot 10^7 \theta_2 + 471,39\theta_3 = 0,2898 \\ (7) \\ \frac{(7)}{2259,6} \Rightarrow u_2 - u_3 = 0 \\ (9) / 4211,4 \Rightarrow v_2 + 166,67\theta_2 + 133,34 \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Après résolution, on trouve :  $u_2 = u_3 = 5,92 \text{ cm}$   $v_2 = -5,93 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 0,0205 \text{ radians} \\ \theta_2 = -0,0024 \text{ radians} \\ \theta_3 = -0,01725 \text{ radians} \end{cases}$$

En remplaçant  $v_2$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ , et  $\theta_3$  par leurs valeurs dans les équations (1), (2) et (8), on peut déterminer les valeurs des réactions aux appuis représentées par les forces nodales  $F_{y1}$ ,  $F_{y3}$  ainsi que la valeur du moment fléchissant, à mi-travée, représenté par le moment  $M_{z2}$  appliqué au nœud 2 tels que :

$$(1) \Rightarrow F_{x1} = 1,8 \cdot 10^{-12} \text{ KN} \cong 0 \text{ KN}$$

$$(2) \Rightarrow F_{y1} = 35,48 \text{ KN}$$

$$(7) \Rightarrow F_{y3} = 29,874 \text{ KN}$$