# Corrigé De L'Examen De Mathématiques (II)

**Corrigé De L'Exercice1(09pts) I-** On a le système suivant :

$$(S)\begin{cases} x-2y+3z = 1 \\ -2x+4y-5z = -3 \\ -x+3y-5z = 4 \end{cases}$$

1. **La matrice des coefficients $A$ et la matrice augmentée $\tilde{A}$ (0.5pts)**

$$■\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix} ■\ \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -5 & -3 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{array}\right)$$

2. **Ecriture matricielle de $(S)$ (0.5pts).**

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $et$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, on a l'écriture matricielle :

$$(S) \Leftrightarrow AX = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

---

**II- La méthode de la matrice inverse (04.5pts)**

3. **Calcul de l'inverse $A^{-1}$ par Gauss-Jordan(03pts)** On a :

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + (2)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \textbf{(01pts)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 + (2)L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + (2)L_3 \end{array} \quad \textbf{(01pts)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) = (I_3|A^{-1}) \quad \textbf{(0.5pts)}$$

Par conséquent : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **(0.5pts)**

---

4. **Résolution du système $(S)$ par la méthode de la matrice inverse (01.5pts)**

On a $AX = b$, $A$ est inversible et $A^{-1}$ son inverse. Donc, le système $(S)$ admet une seule solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ donnée par :

$$X = A^{-1}b = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 \\ L_2 \times C_1 \\ L_3 \times C_1 \end{pmatrix}. \quad \textbf{(0.5pts)}$$

Avec :

■ $L_1 \times C_1 = (5 \quad 1 \quad 2)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (5)(1) + (1)(-3) + (2)(4) = 5 - 3 + 8 = \mathbf{10}.$ **(0.25pts)**

■ $L_2 \times C_1 = (5 \quad 2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (5)(1) + (2)(-3) + (1)(4) = 5 - 6 + 4 = \mathbf{3}.$ **(0.25pts)**

■ $L_3 \times C_1 = (2 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = (2)(1) + (1)(-3) + (0)(4) = 2 - 3 + 0 = -\mathbf{1}.$ **(0.25pts)**

Donc, $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. **(0.25pts)**

---

**IV- La méthode de Cramer(03.5pts)**

5. **Vérification que le système est de Cramer (0.5pts)**

Le système $(S)$ est de Cramer car sa matrice des coefficients $A$ est inversible.

**6. Résolution du système $(S)$ par la méthode de Cramer (03pts)**

Comme le système est de Cramer, il admet une unique solution $\bar{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ dont les composantes sont données par les formules de Cramer : **(0.5pts)**

$$\blacksquare\ \boldsymbol{x}=\frac{|\boldsymbol{A_x}|}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\begin{vmatrix}\mathbf{1}&-2&3\\\mathbf{-3}&4&-5\\\mathbf{4}&3&-5\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-10}{-1}=\mathbf{10}\ \blacksquare\ \boldsymbol{y}=\frac{|\boldsymbol{A_y}|}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\begin{vmatrix}1&\mathbf{1}&3\\-2&\mathbf{-3}&-5\\-1&\mathbf{4}&-5\end{vmatrix}}{-1}=\frac{-3}{-1}=\mathbf{3}\ \blacksquare\ \boldsymbol{z}=\frac{|\boldsymbol{A_z}|}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\begin{vmatrix}1&-2&\mathbf{1}\\-2&4&\mathbf{-3}\\-1&3&\mathbf{4}\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1}{-1}=\mathbf{-1}$$

Où par la méthode de Sarrus, on a :

$$\blacksquare|\boldsymbol{A}|=\left|\begin{matrix}1&-2&3\\-2&4&-5\\-1&3&-5\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&-2\\-2&4\\-1&3\end{matrix}\right|=(1)(4)(-5)+(-2)(-5)(-1)+(3)(-2)(3)-(3)(4)(-1)-(1)(-5)(3)-(-2)(-2)(-5)$$

$$=-20-10-18+12+15+20=\mathbf{-1}.\qquad \textbf{(0.5pts)}$$

$$\blacksquare|\boldsymbol{A_x}|=\left|\begin{matrix}\mathbf{1}&-2&3\\\mathbf{-3}&4&-5\\\mathbf{4}&3&-5\end{matrix}\right|\begin{matrix}\mathbf{1}&-2\\\mathbf{-3}&4\\\mathbf{4}&3\end{matrix}\right|=(1)(4)(-5)+(-2)(-5)(4)+(3)(-3)(3)-(3)(4)(4)-(1)(-5)(3)-(-2)(-3)(-5)$$

$$=-20+40-27-48+15+30=\mathbf{-10}.\qquad \textbf{(0.5pts)}$$

$$\blacksquare|\boldsymbol{A_y}|=\left|\begin{matrix}1&\mathbf{1}&3\\-2&\mathbf{-3}&-5\\-1&\mathbf{4}&-5\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&\mathbf{1}\\-2&\mathbf{-3}\\-1&\mathbf{4}\end{matrix}\right|=(1)(-3)(-5)+(1)(-5)(-1)+(3)(-2)(4)-(3)(-3)(-1)-(1)(-5)(4)-(1)(-2)(-5)$$

$$=15+5-24-9+20-10=\mathbf{-3}.\qquad \textbf{(0.5pts)}$$

$$\blacksquare|\boldsymbol{A_z}|=\left|\begin{matrix}1&-2&\mathbf{1}\\-2&4&\mathbf{-3}\\-1&3&\mathbf{4}\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&-2\\-2&4\\-1&3\end{matrix}\right|=(1)(4)(4)+(-2)(-3)(-1)+(1)(-2)(3)-(1)(4)(-1)-(1)(-3)(3)-(-2)(-2)(4)$$

$$=16-6-6+4+9-16=\mathbf{1}.\qquad \textbf{(0.5pts)}$$

Finalement : $\bar{X}=\begin{pmatrix}10\\3\\-1\end{pmatrix}$ **(0.5pts)**

---

**Corrigé De L'Exercice2(05pts)** Résolution du système $(S)$ par Gauss.

$$(S)\begin{cases}x_1-x_2\quad+2x_4=3\\ \qquad\qquad -x_3+3x_4=2\\ 2x_1-2x_2-x_3+3x_4=6\\ x_1+x_2+3x_3-2x_4=5\end{cases}$$

■ Echelonnement de la matrice augmentée :

$$\blacksquare\ \widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&0&-1&3&2\\2&-2&-1&3&6\\1&1&3&-2&5\end{array}\right)\begin{matrix}L_3\leftarrow L_3+(-2)L_1\\L_4\leftarrow L_4+(-1)L_1\end{matrix}\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&\mathbf{0}&-1&3&2\\0&0&-1&-1&0\\0&2&3&-4&2\end{array}\right)L_2\leftrightarrow L_4\qquad\textbf{(0.5pts)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&\mathbf{2}&3&-4&2\\0&0&-1&-1&0\\0&0&-1&3&2\end{array}\right)L_2\leftarrow\tfrac{1}{2}L_2\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&\mathbf{1}&3/2&-2&1\\0&0&\mathbf{-1}&-1&0\\0&0&-1&3&2\end{array}\right)L_3\leftarrow(-1)L_3\qquad\textbf{(0.5pts)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&\mathbf{1}&3/2&-2&1\\0&0&\mathbf{1}&1&0\\0&0&-1&3&2\end{array}\right)L_4\leftarrow L_4+L_3\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&\mathbf{1}&3/2&-2&1\\0&0&\mathbf{1}&1&0\\0&0&0&\mathbf{4}&2\end{array}\right)L_4\leftarrow\tfrac{1}{4}L_4\qquad\textbf{(0.5pts)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}\mathbf{1}&-1&0&2&3\\0&\mathbf{1}&3/2&-2&1\\0&0&\mathbf{1}&1&0\\0&0&0&\mathbf{1}&1/2\end{array}\right)=\widetilde{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{e}}.\qquad\textbf{(0.5pts)}$$

■ Soit $(S_e)$ le système associé à la matrice $\tilde{A}_e$ :

$$(S_e)\begin{cases} x_1 - x_2 \quad + \quad 2x_4 = 3 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \textbf{(0.5pts)}$$

Ainsi $(S)$ admet une seule solution (Dans $(S_e)$ le nombre d'équations = au nombre de variables).

■ La résolution de $(S_e)$ : En résolvant par rapport à la première variable de chaque équation et par substitution, on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_2 - 2x_4 \\ x_2 = 1 - \frac{3}{2}x_3 + 2x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + x_2 - 2x_4 \\ x_2 = 1 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{2}\right) \\ x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \frac{11}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\right) \\ x_2 = \frac{11}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{19}{4} \\ x_2 = \frac{11}{4} \\ x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \textbf{(01.5pts)}$$

Finalement, l'unique solution du système $(S)$ est donnée par : $X = \begin{pmatrix} 19/4 \\ 11/4 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ **(01pts)**

---

**Corrigé De L'Exercice3(06pts)** On a la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}}$ telle que :

$$a_{ij} = \begin{cases} 3\ ; \ si\ i = j \\ 1\ ; \ si\ i \neq j \end{cases} \qquad (*)$$

---

**1. Trouvons la matrice $A$(01pts)** On a d'une part, par définition :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le 3 \\ 1\le j\le 3}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Et en d'autre part, en appliquant les équations $(*)$ à chaque élément $a_{ij}$, on obtient :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

---

**2. Le Déterminant(01pts)** En développant suivant la deuxième colonne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (1)A_{12} + (3)A_{22} + (1)A_{32},$$

où $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ désigne le cofacteur de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. Ainsi :

■$A_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$ ■$A_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8$ ■ $A_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$.

Donc, $\det A = -2 + (3)(8) - 2 = 20$.

---

**3. Calcul et Vérification(02.5pts)** On a :

**Calcul(02pts)**

$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & L_1 \times C_3 \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & L_2 \times C_3 \\ L_3 \times C_1 & L_3 \times C_2 & L_3 \times C_3 \end{pmatrix}$$

Où $L_i$ désigne la $i^{eme}$ ligne de la $1^{ère}$ matrice et $C_j$ désigne la $j^{eme}$ colonne de la matrice $A$. Ainsi, on a :

**Les éléments de la première ligne**

■ $L_1 \times C_1 = (3 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (3)(3) + (1)(1) + (1)(1) = 9 + 1 + 1 = \mathbf{11}.$ **(0.20pts)**

■ $L_1 \times C_2 = (3 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = (3)(1)+(1)(3)+(1)(1) = 3+3+1 = \mathbf{7}.$ **(0.20pts)**

■ $L_1 \times C_3 = (3 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = (3)(1)+(1)(1)+(1)(3) = 3+1+3 = \mathbf{7}.$ **(0.20pts)**

**Les éléments de la deuxième ligne**

■ $L_2 \times C_1 = (1 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = (1)(3)+(3)(1)+(1)(1) = 3+3+1 = \mathbf{7}.$ **(0.20pts)**

■ $L_2 \times C_2 = (1 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = (1)(1)+(3)(3)+(1)(1) = 1+9+1 = \mathbf{11}.$ **(0.20pts)**

■ $L_2 \times C_3 = (1 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = (1)(1)+(3)(1)+(1)(3) = 1+3+3 = \mathbf{7}.$ **(0.20pts)**

**Les éléments de la troisième ligne**

■ $L_3 \times C_1 = (1 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = (1)(3)+(1)(1)+(3)(1) = 3+1+3 = \mathbf{7}.$ **(0.20pts)**

■ $L_3 \times C_2 = (1 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = (1)(1)+(1)(3)+(3)(1) = 1+3+3 = \mathbf{7}.$ **(0.20pts)**

■ $L_3 \times C_3 = (1 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = (1)(1)+(1)(1)+(3)(3) = 1+1+9 = \mathbf{11}.$ **(0.20pts)**

Finalement : $A^2 = \begin{pmatrix}11 & 7 & 7\\7 & 11 & 7\\7 & 7 & 11\end{pmatrix}.$ **(0.20pts)**

---

**Vérification(0.5pts)**

On a d'une part : $A^2 = \begin{pmatrix}11 & 7 & 7\\7 & 11 & 7\\7 & 7 & 11\end{pmatrix}.$

Et en d'autre part :

$$7A - 10I_3 = 7\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 1 & 3\end{pmatrix} - 10\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21 & 7 & 7\\7 & 21 & 7\\7 & 7 & 21\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-10 & 0 & 0\\0 & -10 & 0\\0 & 0 & -10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & 7 & 7\\7 & 11 & 7\\7 & 7 & 11\end{pmatrix}.$$

Donc : $A^2 = 7A - 10I_3$.

---

4. **Déduction(01.5pts)**

Il suffit de mettre l'expression "$A^2 = 7A - 10I_3$" sous la forme $A \times B = I_3$ ou $B \times A = I_3$.

On a: $A^2 = 7A - 10I_3$ et $A^2 = 7A - 10I_3 \Rightarrow A^2 - 7A = -10I_3 \Rightarrow -\frac{1}{10}(A^2 - 7A) = I_3 \Rightarrow -\frac{1}{10}(A - 7I_3) \times A = I_3$. **(0.5pts)**

D'où : $-\frac{1}{10}(A - 7I_3) \times A = I_3$. Et par conséquent, on déduit que $A$ est inversible et son inverse est donné par :

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}(A - 7I_3) = -\frac{1}{10}\left[\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\\1 & 1 & 3\end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right] = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\1 & -4 & 1\\1 & 1 & -4\end{pmatrix}.$$ **(01pts)**