**Université A. MIRA de Béjaia**
**Faculté Sciences Exactes** **L2**
**Département de Recherche Opérationnele**

# Examen de remplacement du module Analyse Complexe (2023-2024)

**Exercice 1: (05 pts)**

- **(01 pt)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ ; l'équation suivante : $iz^2 + 2\overline{z} + z - i = 0$.
- **(01 pt)** Démontrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ est dérivable pour tout $z \neq 0$ et déterminer la dérivée $f'(z)$ ; en calculant directement :

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

  **(01 pt)** Démontrer le même résultat, en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann.
- **(01 pt)** Calculer et représenter dans le plan les racines suivantes : $z = \sqrt[4]{-4}$.
- **(01 pt)** Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(x + iy) = x^2 - y^2 - 2ixy + 2x + 2iy$. La fonction $g$ est-elle holomorphe ?

**Exercice 2: (06 Pts)**

- **(01 Pts)** Déterminer la série de Laurent de centre $z_0$ de la fonction suivante :

$$f(z) = \frac{1}{z}, \text{ avec } z_0 = 1.$$

- **(01 pt)** Montrer l'identité suivante :

$$\forall z_1; z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\big(|z_1|^2 + |z_2|^2\big).$$

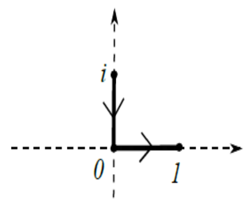
- On considère la fonction complexe définie par :

$$f(z) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \ \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}; \text{ si } z \neq 0; \\ 0 \text{ si } z = 0. \end{cases}$$

  1. **(01 Pts)** Démontrer que la fonction $f$ est continue en $z = 0$ ;
  2. **(01 Pts)** Démontrer que la fonction $f$ n'est pas dérivable en $z = 0$ ;
  3. **(01 Pts)** Démontrer que la fonction $f$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en $z = 0$ ;
  4. **(01 Pts)** Que peut-on conclure ?

**Exercice 3: (04 Pts)** Calculer les intégrales suivantes :

- **(02 Pts)** $\int_\gamma \overline{z} dz$; avec $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ est le chemin suivant :




- **(02 Pts)** $\int_{\gamma} 2i\overline{z}dz$ ; avec est $\gamma$ le chemin $|z-i|=2$.

**Exercice 4: (05 Pts)**

Calculer les intègrales suivantes :

- **(03 Pts)** $\int_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{z^2}{(x-2)(x^2+4)}dz$.
- **(02 Pts)** $\int_{|z|=3} \frac{z+1}{z^2-4iz-4}dz$.

Bonne chance Pr Ouiza LEKADIR.