Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2**
Département de Recherche Opérationnele

Solution de l'examen du module Analyse Complexe, S02(2023-2024)

Exercice 1:

- On a

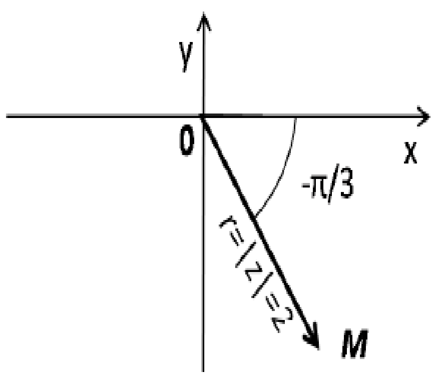
$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} + (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= |z_1|^2 - 2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 + |z_1|^2 + 2\operatorname{Re} z_1\overline{z_2} + |z_2|^2 \\ &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).\end{aligned}$$

- Posons $w = z - 1$; donc l'équation devient $w^3 = 1$. Directement de la formule de la racine n-ième d'un nombre complexe, les trois solutions $z_i = 1 + w_i$ de l'équation $(z-1)^3 - 1 = 0$ sont :

$$1 + cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3};\;\; 1 + cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3} \quad \text{et} \quad 2.$$

- On a $\qquad z = \left(2, -\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$

Dans le plan complexe le point $M(z)$ est représenté graphiquement par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la figure suivante



- Soit f une fonction complexe définie par

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

a) Montrons que f est continue en 0. On a

$$|f(z)|^2 = 2\frac{x^6 + y^6}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2\frac{(x^2 + y^2)^3}{(x^2 + y^2)^2} \leq 2|z|^2$$

d'où

$$0 < |f(z)| \leq \sqrt{2}|z|.$$

Puisque

$$\lim_{z \to 0} 0 = \lim_{z \to 0} \sqrt{2}|z| = 0$$

alors

$$\lim_{z \to 0} f(z) = 0.$$

D'où f est continue en 0.

b) Soit $z \neq 0$ alors

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \left(\frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)\frac{1}{x + iy} = \frac{(x^3 - y^3) + i(x^3 + y^3)}{(x^2 + y^2)^2}(x - iy).$$

Posons $y = tx$ pour un réel t, donc

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{z} = \frac{(1 - t^3) + i(1 + t^3)}{(1 + t^2)^2}(1 - it).$$

Et puisque les limites sont différentes sur des chemins différents (e.g. $y = tx$) alors f n'est pas dérivable en 0.

c) Soient u et v, respectivement, les fonctions partie réelle et partie imaginaire de la fonction complexe f. C'est à dire

$$u(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Donc on a

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} -\frac{y^3}{y^3} = -1$$

aussi

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^3} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \to 0} \frac{y^3}{y^3} = 1.$$

D'où

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0,0)$$

ce qui montre que f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en 0.

d) On conclut que la réciproque du théorème des conditions de Cauchy-Riemann n'est pas vraie en général.

Exercice 2.

1. Par définition on a

$$
\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{1}{4}\left(e^{i2z} - 2 + e^{-i2z}\right) + \frac{1}{4}\left(e^{i2z} + 2 + e^{-i2z}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

2. Pour $w = u + iv = z^3$, on a $u = x^3 - 3xy^2$ et $v = 3x^2 y - y^3$,

donc
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned}
$$

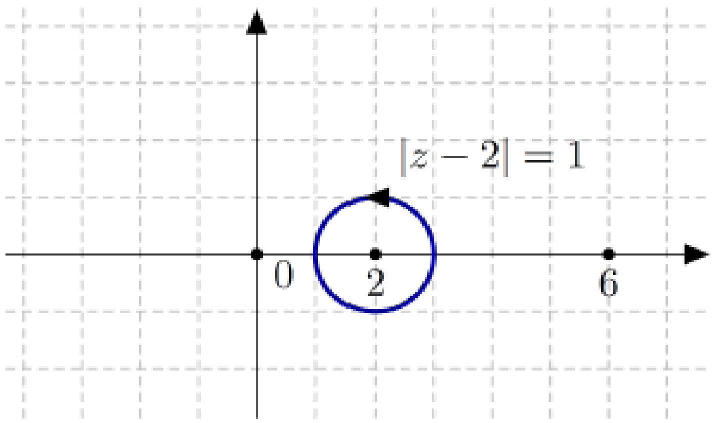
3. Les fonctions 1 et z sont analytiques dans C, et sur C. Alors, par le Théorème de Cauchy,

on obtient :
$$\oint_C dz = \oint_C z\,dz = \oint_C (z - z_0)\,dz = 0.$$

Exercice 3.

1) Nous calculons l'intégrale suivante

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz.$$



La fonction

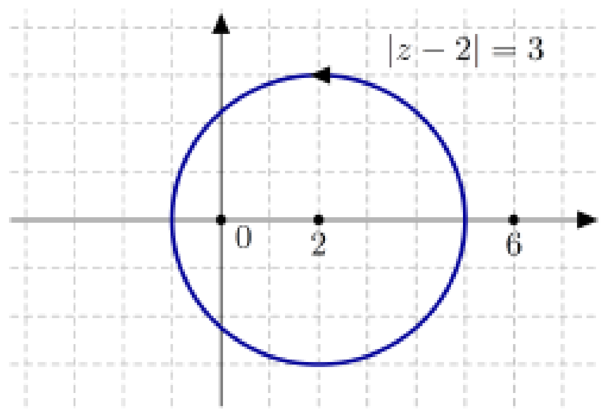
$$z \to \frac{e^z}{z^2 - 6z}$$

est holomorphe à l'interieur du cercle $|z - 2| = 1$, alors d'après le théorème de Cauchy

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz = 0.$$

2) Nous avons

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz = \int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z(z-6)} dz.$$



Posons $f(z) = \frac{e^z}{z-6}$, alors f est holomorphe à l'intérieur du cercle $|z-2| = 3$, ainsi d'après la formule intégrale de Cauchy, on a

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^2 - 6z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{-6} = -\frac{\pi i}{3}.$$

Exercice 4 (a) La fonction f est holomorphe au voisinage de $z = 0$, donc elle est développable en série de Taylor. Calculons alors les dérivées $f^{(n)}(0)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ On a

$$f'(z) = \frac{1}{1+z},\ f''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2},\ f'''(z) = \frac{(-1)(-2)}{(1+z)^3}, \ldots,\ f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}$$

Substituant pour $z = 0$, et remplaçant dans l'expression de la série de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \\ &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots \end{aligned}$$

(b) On a

$$\log \frac{1+z}{1-z} = \log(1+z) - \log(1-z),$$

remplaçant z par $-z$ dans le développement précédent, on trouve

$$\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-z)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} z^n.$$

d'où

$$\begin{aligned} \log \frac{1+z}{1-z} &= \left[z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} + \cdots \right] + \left[z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots \right] \\ &= 2 \left[z + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \right] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$