1 Annee Licence LMD (2023/2024) 1 :30 h Université de Béjaia
Faculté de Technologie

Examen de remplacement de Maths 2

Exercice 1 :

On considére les intégrales :

$$I = \int (2x+1)cos^2(x)dx \ , \quad J = \int (2x+1)sin^2(x)dx$$

a) Calculer l'intégrale : $\int (2x+1)cos(2x)dx$.

b) Calculer $I+J$ et $I-J$.

c) Déduire les valeurs des intégrales I et J .

NB. $cos^2(x) = \dfrac{1+cos(2x)}{2}$ et $sin^2(x) = \dfrac{1-cos(2x)}{2}$

Exercice 2 :

I) Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' + \dfrac{y}{tan(x)} = 2cos(x)$.

II) On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + \frac{2}{tan(x)}y' - y = 0 \qquad (E1)$$

Montrer que le changement de fonction : $Z = y' + \dfrac{1}{tan(x)}y$ transforme l'équation (E1) en l'équation différetielle $Z' + \dfrac{Z}{tan(x)} = 0$

III) Soit l'équation différentielle du second ordre suivante : $y'' + y' = 4xe^x$

1) Déterminer les deux solutions homogène et particulière de cette équation

2) Trouver la solution générale pour $y(0) = 5$ et $y'(0) = 5$

Exercice 3 : Soit les matrices A et B définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 = 2A$ et déduire que $A^3 = 4A$.
2. Déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. La matrice A est-elle inversible ? .
4. Calculer la matrice $C = B^2 - 3B + 2I_3$. (I_3 est la matrice identité)
5. Déduire B^{-1}

[1]

1. **Bon courage**

Corrigé de l'examen de remplacement

Exercice 01 : on a $I = \int (2x+1)\cos^2(x)\,dx$, $J = \int (2x+1)\sin^2(x)\,dx$

a) $\int (2x+1)\cos(2x)\,dx$ (utilisant l'intégral par parties)

$$2x+1 \longrightarrow 2$$
$$\cos(2x) \longrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x) \qquad \text{Donc}$$

$$\int (2x+1)\cos(2x) = \frac{2x+1}{2}\sin(2x) - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int \sin(2x)\,dx$$
$$= \frac{2x+1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

b) * $I+J = \int (2x+1)\cos^2(x) + \int (2x+1)\sin^2(x) = \int (2x+1)(\underbrace{\cos^2(x)+\sin^2(x)}_{1})\,dx$

$$= \int 2x+1\,dx = x^2+x$$

* $I-J = \int (2x+1)\cos^2(x)\,dx - \int (2x+1)\sin^2(x)\,dx = \int (2x+1)(\cos^2(x)-\sin^2(x))\,dx$

on a $\cos^2(x)-\sin^2(x) = \cos(2x)$ alors $I-J = \int (2x+1)\cos(2x)\,dx$ donc

$$I-J = \frac{2x+1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)$$

c) on a
$$\begin{cases} I+J = x^2+x & \text{.......... (1)} \\ I-J = \frac{2x+1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x) & \text{.... (2)} \end{cases}$$

$1+2 \Rightarrow 2I = x^2+x+\frac{2x+1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x)$ alors

* $I = \frac{1}{2}\left[x^2+x+\frac{2x+1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]$ et on a

* $J = x^2+x-I \Rightarrow$
$$= x^2+x-\frac{1}{2}\left[x^2+x+\frac{2x+1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]$$

$$J = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{2x+1}{4}\sin(2x)-\frac{1}{4}\cos(2x)$$

Exercice 02:

I) on a $y' + \frac{y}{\tan(x)} = 2\cos(x)$ ---- (E_1) $(y_G = y_H + y_p)$

y_H: on pose $2\cos(x) = 0 \Rightarrow y' + \frac{y}{\tan(x)} = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1}{\tan(x)} y$ on a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $y' = \frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} dx$. donc $\ln|y| = -\ln|\sin(x)| + c$

$y_H = e^{\ln|\sin^{-1}(x)| + c} = e^{c} \cdot \sin^{-1}(x) \Rightarrow \boxed{y_H = \frac{K}{\sin(x)}}$

y_p: on pose K n'est pas constante alors $y_p = \frac{K(x)}{\sin(x)}$, $y_p' = \frac{K'(x)\sin(x) - \cos(x) \cdot K(x)}{\sin^2(x)}$

remplace y_p, y_p' dans E_1: $\frac{K'(x)\sin(x) - \cos(x)K(x)}{\sin^2(x)} + \frac{K(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = 2\cos(x)$

$\Rightarrow \frac{K'(x)}{\sin(x)} - \frac{K(x)\cancel{\cos(x)}}{\sin^2(x)} + \frac{K(x) \cdot \cancel{\cos(x)}}{\sin^2(x)} = 2\cos(x) \Rightarrow K' = 2\cos(x) \cdot \sin(x)$ $(\int f' f = \frac{1}{2} f^2)$

$\int K' = 2\int \cos(x) \cdot \sin(x) dx \Rightarrow K = 2(\frac{1}{2}\sin^2(x))$ alors $K = \sin^2(x)$

$\boxed{y_p = \frac{\sin^2(x)}{\sin(x)} = \sin(x)}$ Alors $\boxed{y_G = \sin(x) + \frac{K}{\sin(x)}}$

II 1) on a $z = y' + \frac{1}{\tan(x)} y$, $z' = y'' + \frac{-1}{\sin^2(x)} y + y' \frac{1}{\tan(x)}$ remplace dans

$z' + \frac{z}{\tan(x)} = 0 \Rightarrow y'' - \frac{1}{\sin^2(x)} y + y' \frac{1}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan(x)}(y' + \frac{1}{\tan(x)} y) = 0$ alors

$y'' - \frac{1}{\sin^2(x)} y + \frac{y'}{\tan(x)} + \frac{y'}{\tan(x)} + \frac{1}{\tan^2(x)} y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{2}{\tan(x)} y' - \frac{1}{\sin^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} y = 0$

$y'' + \frac{2}{\tan(x)} y' + \frac{-\cancel{\cos^2(x)} - \sin^2(x) + \cancel{\cos^2(x)}}{\sin^2(x)} y = 0 \Rightarrow y'' + \frac{2}{\tan(x)} y' - y = 0$

c'est l'équation E_1.

III) on a $y'' + y' = 4xe^{x}$

1) y_H: on $y_H'' + y_H' = 0$ donc E_c donnée par $r^2 + r = 0$ on a deux racine $r_1 = 0, r_2 = -1$

$y_H = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} \boxed{= c_1 + c_2 e^{-x}}$

y_p: on a 1 n'est pas racine de E_c alors $y_p = (ax+b)e^{x}$ après remplace y_p, y_p' et y_p'' on existe

$y_p'' + y_p' = 4xe^{x} \Rightarrow 2ae^{x} + (ax+b)e^{x} + ae^{x} + (ax+b)e^{x} = 4xe^{x}$ alors

$2a + ax + b + a + ax + b = 4x \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases}$

Donc $a = \frac{4}{2} = 2$ et $2b = -3(2) \Rightarrow b = -3$

alors $\boxed{y_P = (2x-3)e^{x}}$

$$\boxed{y_G = y_H + y_P = C_1 + C_2 e^{-x} + (2x-3)e^{x}}$$

2) on a $y(0) = 5$ et $y'(0) = 5$ alors $y(0) = C_1 + C_2 e^{0} + (0-3)e^{0} = 5$ et on a

$y'_G = -C_2 e^{-x} + 2e^{x} + e^{x}(2x-3) \Rightarrow y'(0) = -C_2 e^{0} + 2e^{0} + e^{0}(0-3) = 5$ alors

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - 3 = 5 \\ -C_2 + 2 - 3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 8 \\ -C_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_2 = -6 \\ C_1 = 14 \end{matrix}$$

$$\boxed{y_G = 14 - 6e^{-x} + (2x-3)e^{x}}$$

Exercice 03 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1) $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0-3 & -2+4+2 & -1+0+3 \\ 0+0+0 & 0+4+0 & 0+0+0 \\ 3+0-9 & -6+4+6 & -3+0+9 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 2A$$

* Déduire A^3 : on a $A^3 = A^2 \cdot A = (2A) \cdot A = 2A^2 = 2(2A) = 4A$

2) on a $A^2 = 2^1 A$ et $A^3 = 2^2 A \Rightarrow \boxed{A^n = 2^{n-1} A}$

3) on a $\det(A) = -1(6-0) - 2(0) + 1(+6) = -6 + 6 = 0$ Alors A n'est pas inversible

4) $C = B^2 - 3B + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -9 & 10 & -9 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

5) on a $B^2 - 3B + 2I_3 = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}B + \frac{3}{2}I_3\right)B = I_3$ alors

$$B^{-1} = -\frac{1}{2}B + \frac{3}{2}I_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$