Université A. MIRA de Béjaia
Faculté Sciences Exactes **L2**
Département de Recherche Opérationnele

Correction de l'examen de rattrapage du module Analyse Complexe, S02(2023-2024)

Exercice 1: (06 Pts)

- Sous forme polaire $1+i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right\}$. En élevant à la puissance 1000 les deux membres de cette égalité et à l'aide de la formule de De Moivre

$$(1+i)^{1000}=\sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)+i\sin\left(1000\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right\}$$

$$=\sqrt{2}^{1000}\left\{\cos\left(250\pi+2000k\pi\right)+i\sin\left(250\pi+2000k\pi\right)\right\}=2^{500}\left(1+i0\right)=2^{500}.$$

- a) $\frac{z}{w}=\frac{2-i}{1+3i}=\frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{2-6i-i+3i^2}{1^2-(3i)^2}=\frac{2-7i-3}{1+9}=\frac{-1}{10}-\frac{7}{10}i.$

  b) $\frac{zw}{z+w}=\frac{(2-i)(1+3i)}{2-i+1+3i}=\frac{5+5i}{3+2i}=\frac{(5+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{25}{13}+\frac{5}{13}i.$

- a) $\frac{z}{w}=\frac{2-i}{1+3i}=\frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{2-6i-i+3i^2}{1^2-(3i)^2}=\frac{2-7i-3}{1+9}=\frac{-1}{10}-\frac{7}{10}i.$

  b) $\frac{zw}{z+w}=\frac{(2-i)(1+3i)}{2-i+1+3i}=\frac{5+5i}{3+2i}=\frac{(5+5i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{25}{13}+\frac{5}{13}i.$

- a) $\operatorname{Log}(1+i)=\ln(|1+i|)+i\arg(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right),k\in\mathbb{Z}.$

  b) $i^i=e^{i\operatorname{Log}i}=e^{i(\ln|i|+i\arg i)}=e^{i\left(\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right)}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},k\in\mathbb{Z}.$

- $\lim\limits_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \dfrac{e^{2z}+1}{e^{z}+i} = \dfrac{e^{-i\pi}+1}{e^{-i\frac{\pi}{2}}+i} = \dfrac{-1+1}{-i+i} = \dfrac{0}{0}$ forme indéterminée.

Par décomposition de numérateur $e^{2z}+1 = \left(e^{z}\right)^{2} - i^{2} = \left(e^{z}-i\right)\left(e^{z}+i\right)$ nous voyons que

$$\lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2z}+1}{e^{z}+i} = \lim_{z\to -i\frac{\pi}{2}} \frac{\left(e^{z}-i\right)\left(e^{z}+i\right)}{e^{z}+i} = e^{-i\frac{\pi}{2}} - i = -2i.$$

- Si la limite existait elle serait indépendante de la façon dont z tend vers 0.

  Si $z \to 0$ le long de l'axe des x, alors $y=0$ et $z = x+iy = x$, $\overline{z} = x - iy = x$; la limite cherchée est donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$.

  Si $z \to 0$ le long de l'axe des y, alors $x = 0$ et $z = x+iy = iy$, $\overline{z} = x - iy = -iy$; la limite cherchée est $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-iy}{iy} = -1$.

  Les deux expressions étant différentes, dépendant de la façon dont $z \to 0$, il n'y a pas de limite.

Exercice 2:

a) Soit $z-1=u$. Alors $z=1+u$ et

$$\begin{aligned}\frac{e^{2z}}{(z-1)^3}&=\frac{e^{2+2u}}{u^3}=\frac{e^2}{u^3}\cdot e^{2u}=\frac{e^2}{u^3}\left\{1+2u+\frac{(2u)^2}{2!}+\frac{(2u)^3}{3!}+\frac{(2u)^4}{4!}+\dots\right\}\\&=\frac{e^2}{u^3}+\frac{2e^2}{u^2}+\frac{2e^2}{u}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2^4}{4!}e^2u+\dots\\&=\frac{e^2}{(z-1)^3}+\frac{2e^2}{(z-1)^2}+\frac{2e^2}{z-1}+\frac{4e^2}{3}+\frac{2}{3}e^2(z-1)+\dots\end{aligned}$$

Le point $z=1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple. La série converge pour toute valeur de $z\neq 1$.

- Soit la fonction f définie par $f(z)=\cos(z)$ et $z_0=0$. Puisque la fonction f est holomorphe pour tout z dans $\mathbb{C}$.

  Essayons d'écrire $f(z)$ sous la forme $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n$ où $|z|<\infty$.

  Où : $f(0)=1$, $f'(0)=0$, $f''(0)=-1$, $f^{(3)}(0)=0$, $f^{(4)}(0)=1,\dots$

  Nous remarquons que :

  $f^{(2n)}(0)=(-1)^n$ et $f^{(2n+1)}(0)=0$ avec $n=0,1,2,\dots$

  Donc pour tout $z\in\mathbb{C}$ on a :

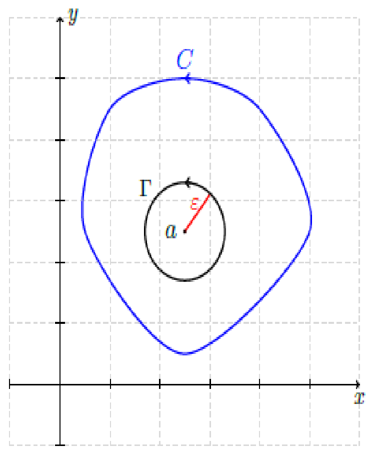
  $cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n)}(z_0)}{(2n)!}z^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(2n+1)}(z_0)}{(2n+1)!}z^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}.$

Exercice 3:

- Si a est à l'extérieur de C, alors $f(z) = \dfrac{1}{z-a}$ est holomorphe à l'intérieur de C et sur C. Alors d'après le théorème de Cauchy $\oint_C \dfrac{1}{z-a} dz = 0$.

- Supposons a intérieur à C et soit Γ un cercle de rayon ε, centré en $z = a$, tel que Γ soit à l'intérieur de C [ceci peut être réalisé car $z = a$ est un point intérieur]. D'après une conséquence du théorème de Cauchy

$$\oint_C \frac{1}{z-a} dz = \oint_\Gamma \frac{1}{z-a} dz. \qquad (3.1)$$



D'autre part sur Γ, $|z-a| = \varepsilon$ ou $z - a = \varepsilon e^{i\theta}$, i.e. $z = a + \varepsilon e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$. D'où tenant compte de $dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$, le deuxième membre de (3.1) devient

$$\int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i, \quad \text{qui est le résultat cherché.}$$

Exercice 4:

- De $\dfrac{1}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$, on tire

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz = \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz - \oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz.$$

L'application de la formule de Cauchy pour $a = 2$ et $a = 1$ donne

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-2} dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 2^2\right) + \cos\left(\pi 2^2\right)\right\} = 2\pi i,$$

$$\oint_C \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z-1} dz = 2\pi i \left\{\sin\left(\pi 1^2\right) + \cos\left(\pi 1^2\right)\right\} = -2\pi i,$$

car $z = 1$ et $z = 2$ sont à l'intérieur de C et $\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ est holomorphe dans C.

L'intégrale considérée vaut donc $2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i$.