Université de Béjaia
Département de RO
Niveau : Licence 2 PN
Année universitaire : 23/24

27 juin 2024
Durée : 1 h 30

Examen de rattrapage de géométrie

Exercise 1 (10 points).
Soient $A(-1,1,4)$, $B(1,0,-2)$ et $C(0,2,2)$ trois points dans un espace affine euclidien de dimension 3 muni d'un repère cartésien orthonormé $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$. Soit G le barycentre des points pondérés

$$\{(A,3),(B,1),(C,-2)\}.$$

1. Déterminer les coordonnées de G.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\| = 5$.
3. Donner une représentation paramétrique de la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.
4. Déterminer l'intersection du plan d'équation $2x+z=5$ et de la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.
5. Déterminer la projection orthogonale du point C sur la droite $D(A,\overrightarrow{AB})$.

Exercise 2 (10 points).
Soient D la droite d'équation cartésienne $x+2y+2=0$ dans un espace affine réel de dimension 2 muni d'un repère cartésien $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, et $\vec{v}$ le vecteur donné par $\vec{v}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2$.

1. Donner l'expression en coordonnées de la translation T de vecteur $\vec{v}$.
2. Déterminer l'image du point $N(3,-2)$ par T.
3. Donner l'expression en coordonnées de la projection sur D dans la direction $\vec{v}$.
4. Donner l'expression en coordonnées de l'affinité f de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport 4.
5. Déterminer $\vec{f}$.

Corrigé

Exercise 1. Les points sont répartis comme suit : 2+2+2+2+2.

1. Nous avons en général

$$
\begin{aligned}
G = \mathrm{Bar}\{(A_i, \alpha_i) : i = 1, \dots, n\} &\iff \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\
&\iff \sum_1^n \alpha_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0} \\
&\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_1^n \alpha_i}.
\end{aligned}
$$

   Alors

$$
\begin{aligned}
G = \mathrm{Bar}\{(A, 3),\ (B, 1)\ (C, -2)\} &\iff \overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}}{2} \\
&\iff G\left(-1, -\frac{1}{2}, 3\right).
\end{aligned}
$$

2. Nous avons

$$
\begin{aligned}
3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} &= 3\left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}\right) + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}\right) - 2\left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM}\right) \\
&= 2\overrightarrow{GM} + \left(3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 2\overrightarrow{GC}\right) \\
&= 2\overrightarrow{GM}.
\end{aligned}
$$

   Alors

$$
\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\| = 5 \iff \|\overrightarrow{GM}\| = \frac{5}{2}.
$$

   Donc l'ensemble des points M tels que $\| - \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 1$ est la sphère de centre G et de rayon $\frac{5}{2}$.

3. Nous avons

$$
\begin{aligned}
M(x, y, z) \in D(A, \overrightarrow{AB}) &\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \\
&\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \\ z-4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 2\lambda - 1, \\ y = -\lambda + 1, \\ z = -6\lambda + 4. \end{cases}
\end{aligned}
$$

4. Soit H le plan d'équation $2x + z = 5$. Remplaçant x, y et z dans l'équation $2x + z = 5$, nous aurons $2\lambda = -3$, ce qui veut dire $\lambda = -\frac{3}{2}$. Alors le point $N\left(-4, \frac{5}{2}, 13\right)$ est l'intersection de H et $D(A, \overrightarrow{AB})$.

5. Soit C' la projection orthogonale de C sur la droite $D(A, \overrightarrow{AB})$. Alors nous avons
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}\\ &= \alpha\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{C'C}.\end{aligned}$$
Alors
$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\rangle = \alpha\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \langle \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{AB}\rangle$$
Ce qui veut dire
$$\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|^2} = \frac{13}{41}.$$
Comme $\overrightarrow{AC'} = \alpha\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \frac{13}{41}\overrightarrow{AB}$.
Alors
$$C'\left(\frac{-15}{41}, \frac{28}{41}, \frac{86}{41}\right).$$

Exercise 2. Les points sont répartis comme suit : 2+2+2+2+2.

1. Soit M' l'image du point M par la translation T de vecteur $\vec{v}$.
Alors
$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$
Ce qui veut dire
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}.$$
Donc
$$\begin{cases} x' = x + 1, \\ y' = y + 2. \end{cases} \tag{1}$$

2. Remplaçant dans l'équation précédente on aura :
$$N(3, -2) \longmapsto N'(4, 0).$$

3. Nous avons $D = D(I, \vec{u})$, où $I(-2, 0)$ et $\vec{u}(-2, 1)$.
Soit $M'(x', y')$ la projection de $M(x, y)$ sur D dans la direction $\vec{v}$.
Alors
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM} &= \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{M'M}\\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} x+2=-2\alpha+\beta, \\ y=\alpha+2\beta. \end{cases}$$

Alors

$$\alpha=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{4}{5}.$$

Comme $\overrightarrow{IM'}=\alpha\vec{u}$, alors

$$\begin{pmatrix} x' \\ y'+1 \end{pmatrix}=\left(-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} x'=\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{2}{5}, \\ y'=-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{4}{5}. \end{cases}$$

4. Soit $M''\,(x'',y'')$ l'image de $M(x,y)$ par l'affinité f de base D, de direction $\vec{v}$ et de rapport 4.
   Alors $\overrightarrow{M'M''}=4\overrightarrow{M'M}$; ce qui veut dire $\overrightarrow{OM''}=4\overrightarrow{OM}-3\overrightarrow{OM'}$.
   Alors

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=4\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} \frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y-\frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

   Alors

$$\begin{cases} x''=\frac{8}{5}x+\frac{6}{5}y+\frac{6}{5}, \\ y''=\frac{6}{5}x+\frac{17}{5}y+\frac{12}{5}. \end{cases}$$

5. Dans la base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ l'application $\vec{f}$ est donnée par la matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix}.$$