Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie **Mai 2024**
Département de Technologie **Durée :01 heure 30**

Examen de Maths 2

Exercice 1 (**08 pts**)

I) a) En effectuant un changement de variable, calculer :

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx.$$

b) Soit γ un nombre réel. Trouver les valeurs de γ telle que :

$$\int_0^\gamma (2x-3)\, e^{x^2-3x}dx = 0$$

II) a) Déterminer les constantes α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^2+2x+5 = (x+\alpha)^2+\beta^2$$

b) En utilisant la question précédente et le changement de variable $t = \frac{x+1}{2}$, calculer

$$\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$$

c) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' - y = \frac{xe^x}{x^2+2x+5}$$

Exercice 2 (**06 pts**)

On considère l'équation différentielle du second ordre suivante

$$y'' + 4y' + 3y = 3(x^2-3) \;...(E)$$

1) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).
2) Déterminer les constantes α, β et γ pour que $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ soit une solution particulière pour l'équation (E).
3) En déduire la solution générale de l'équation (E).
4) Trouver la solution de l'équation (E) vérifiant $y(0) = -\dfrac{8}{9}$ et $y'(0) = -1$.

Exercice 3 (**06 pts**)

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer A^2, en déduire A^{-1} la matrice inverse de A.
2) Montrer que la matrice C est inversible.
3) Déterminer C^{-1} par la méthode de la comatrice.

Bon courage

Université A. MIRA-Béjaia
Faculté de Technologie
Département de Technologie

Mai 2024
Durée :01 heure 30

Corrigé de l'examen de Maths 2

Exercice 1 (08 pts)

I) a). En effectuant un changement de variable, calculons :

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$$

On pose : $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sin x}$

Alors, on a : $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\sin^3 x}{1+t}\frac{-dt}{\sin x}$

$$\begin{aligned}
&= -\int \frac{\sin^2 x}{1+t}dt \\
&= -\int \frac{1-\cos^2 x}{1+t}dt \\
&= -\int \frac{1-t^2}{1+t}dt \\
&= -\int (1-t)dt \\
&= -t + \frac{t^2}{2} + c, c \in \mathbb{R} \\
&= -\cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

b). Soit $\gamma \in \mathbb{R}$, trouvons les valeurs de γ telle que :

$$\int_0^\gamma (2x-3)e^{x^2-3x}dx = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{on a : } \int_0^\gamma (2x-3)e^{x^2-3x}dx = 0 &\Rightarrow \left[e^{x^2-3x}\right]_0^\gamma = 0 \\
&\Rightarrow e^{\gamma^2-3\gamma} - e^0 = 0 \\
&\Rightarrow e^{\gamma^2-3\gamma} = 1 \\
&\Rightarrow \gamma^2 - 3\gamma = \ln(1) \\
&\Rightarrow \gamma(\gamma-3) = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \text{ ou } \gamma = 3.
\end{aligned}$$

Donc : $\gamma \in \{0, 3\}$.

II) a) Déterminons α et β.

$$\text{on a : } x^2 + 2x + 5 = (x+\alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + 2x\alpha + \alpha^2 + \beta^2$$

Par identification :

$$\left\{\begin{array}{r} 2\alpha = 2 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \text{ ou } \beta = -2 \end{array}\right.$$

b) Calculons : $\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$
On pose : $t = \frac{x+1}{2} \Rightarrow x = 2t - 1 \Rightarrow dx = 2dt$. Alors :

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{2t-1}{4t^2+4}2dt &= \frac{1}{2}\int \frac{2t-1}{t^2+1}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \frac{2t}{t^2+1}dt - \int \frac{1}{t^2+1}dt\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(t^2+1\right) - \arctan(t)\right] + c, c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] + c, c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

c) Résolvons l'équation différentielle.

$$y' - y = \frac{xe^x}{x^2+2x+5} \cdots (E_0)$$

On commence par résoudre l'équation homogène associée à (E_0)

$$y' - y = 0 \ldots (E_0h)$$

Pour $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}(E_0h) \Rightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = y \\ \Rightarrow & \int \frac{dy}{y} = \int 1dx \\ \Rightarrow & \text{h}\,|y| = x + c, c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow & y = ke^x, h = \pm e^c \mathbb{R}^*\end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_0h).
Donc, la solution générale de (E_0h) est : $y_h(x) = ke^x, k \in R$.

Recherche de ta solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante.

$$y_p(x) = k(x)e^x \Rightarrow y_p'(x) = k'(x)e^x + k(x)e^x$$

On remplace y_p et y_p' dans (E_0), on trouve

$$k'(x)e^x + k(x)e^x - k(x)e^x = \frac{xe^x}{x^2+2x+5}$$
$$\Rightarrow k'(x) = \frac{x}{x^2+2x+5}$$
$$\Rightarrow k(x) = \int \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Donc : $y_p(x) = \left(\frac{1}{2}\left[\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right] + c\right)e^x, c \in \mathbb{R}$.

Ainsi la solution générale de (E_0) est :

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + \lambda\right]e^x \end{aligned}$$

avec $\lambda = c + h \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (**06 pts**) on considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y'' + 4y' + 3y = 3\left(x^2 - 3\right) \tag{E}$$

1)L'équation différentielle homogène associée a (E) est :

$$y'' + 4y' + 3y = 0 \tag{Eh}$$

L'équation caractéristique associée a (Eh) est :

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \tag{Er}$$

(Er) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$.

Donc, la solution générale de (Eh) est :

$$y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Déterminons les constantes α, β et γ pour que $p(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ soit une solution particulière de (E).

On a : $p'(x) = 2\alpha x + \beta$ et $p''(x) = 2\alpha$.

On remplace $p(x), p'(x)$ et $p''(x)$ dans (E), on aura :

$$3\alpha x^2 + (8\alpha + 3\beta)x + 2\alpha + 4\beta + 3\gamma = 3x^2 - 9$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} 3\alpha = 3 \\ 8\alpha + 3\beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta + 3\gamma = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{8}{3} \\ \gamma = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

Donc : $p(x) = x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9}$.

3). Déduire la solution générale de (E)

$$\begin{aligned} y_g(x) &= y_h(x) + p(x) \\ &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4)Trouvons la solution de l'équation (E) vérifiant $y(0) = -\frac{8}{9}$ et $y'(0) = -1$

On a :

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 3C_2 e^{-3x} + 2x - \frac{8}{3}.$$

Par suite,

$$\begin{cases} y(0) = -\frac{8}{9} \\ y'(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = -\frac{7}{9} \\ -C_1 - 3C_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{3} \\ C_2 = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Finalement, la solution est :

$$y(x) = -\frac{e^{-x}}{3} - \frac{4e^{-3x}}{9} + x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{1}{9}.$$

Exercice 3 (06 pts)

1). Calculons A^2.

$$\text{on a : } A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id_2.$$

Donc : A est inversible et son inverse $A^{-1} = A$.

2). Montrons que la matrice C est inversible.

Calculons le déterminant de la matrice C.

$$\det C = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9$$

on a : $\det C = -9 \neq 0$, donc la matrice C est inversible.

3). Déterminons C^{-1}

on a :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} (\operatorname{Com} C)^t$$

Donc $\operatorname{Com} C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Par suite

$$(\operatorname{Com} c)^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi : } C^{-1} = -\frac{1}{9}\,{}^{t}(\operatorname{Com} C) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix}$$