

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A.MIRA-BEJAIA
Faculté de Technologie
Département De Génie électrique



Intitulé du cours:

Techniques de Commande avancée

Destiné aux étudiants de Master 2
Commande des systèmes électriques.

Réalisé par :

M^r ACHOUR AbdelYazid
Maître de conférences classe B

Introduction Générale.....	1
Chapitre I : Notions sur l'asservissement	
I.1) Définition de l'asservissement.....	3
I.2) Les différents modèles d'un système.....	3
I.2.1) Le modèle de connaissance.....	4
I.2.1) Le modèle de comportement.....	4
I.2.1) Le modèle intermédiaire.....	4
I.2.4) Les modèles utilisés en automatique.....	4
I.2.5) Les modèles de calcul et de validation.....	4
I.2.6) Les modèles d'état et entrée/sortie.....	4
I.3) Classification des systèmes.....	5
I.3.1) Systèmes continu et discret.....	5
I.3.2) Systèmes linéaire et non linéaire.....	6
I.3.3) Systèmes mono-entrée/mono-sortie et multi-entrées/multi-sorties.....	7
I.3.4) Systèmes invariable et variable dans le temps.....	7
I.4) Schéma de principe d'un système asservi.....	7
I.5) Exemple : Schéma de commande d'un moteur électrique a courant alternatif.....	8
I.6) Conclusion.....	10
Chapitre II : Commande adaptative	
II-1) Principe de la commande adaptative.....	11
II-1-1) Définition.....	11
II-1-2) Les tâches typiques de la commande adaptative.....	11
II-1-3) Les domaines d'applications de la commande adaptative.....	11
II-2) Similarités et différences entre la commande adaptative et la commande conventionnelle par contre réaction.....	12
II-3) Définition d'un système de commande adaptative.....	13
II-4) Les différentes techniques de commande adaptative.....	13
II-4-1) Commande « dual ».....	13
II-4-2) Commande adaptative directe avec modèle de référence.....	13
II-4-3) Commande adaptative indirecte auto-ajustable.....	14
II-4-4) Commande auto-ajustable avec reparamétrisation du prédicteur.....	14
II-5) Commande numérique par calculateur.....	14
II-5-1) Les différents schémas synoptique de principe.....	16
II-5-2) Calcul d'une commande conventionnelle numérique.....	16
II-5-3) Calcul d'une commande conventionnelle numérique en utilisant un critère quadratique.....	21
Exemple : Calcul d'une commande numérique.....	22
II-6) Synthèse des lois de commande adaptative.....	23
II-6-1) Calcul de la commande adaptative directe avec modèle de référence.....	23
Exemple : Calcul d'une commande adaptative directe avec modèle de référence.....	26
II-6-2) Calcul de la commande adaptative indirecte auto-ajustable.....	27
Exemple : Calcul d'une commande adaptative indirecte auto-ajustable.....	30
II-6-3) Calcul de la commandes adaptative auto-ajustable avec reparamétrisation du prédicteur.....	31
II-7) Conclusion.....	32
Chapitre III : Commande optimale	
III.1) Formulation du problème de commande.....	33

III.1.1) Commande non optimale.....	34
III.1.2) Commande optimale.....	34
III.1.3) Méthode de calcul de la commande optimale.....	34
III.1.4) Formulation du critère d'optimisation à partir des sorties du système.....	35
III.1.5) Méthode de calcul de la commande optimale.....	36
III.2) Commande optimale des systèmes en absence des contraintes d'inégalité sur le vecteur d'état et le vecteur de commande.....	36
III.2.1) Commande optimale d'un système non linéaire et non stationnaire.....	36
III.2.2) Commande optimale d'un système linéaire et non stationnaire avec critère quadratique.....	42
Exemple : Calcul d'une commande optimale en boucle ouverte.....	44
III.2.3) Commande optimale d'un système linéaire stationnaire avec critère quadratique.....	48
Exemple : Calcul d'une commande optimale en boucle fermée.....	44
III.3) Conclusion.....	53

Chapitre IV : Commande par mode de glissement

IV.1) Les différentes configurations de systèmes de commande à structure variable.....	54
IV.1.1) Configuration avec changement de structure par commutation d'une contre-réaction d'état variable.....	55
IV.1.2) Configuration avec changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande.....	55
IV.2) Loi de commutation par contre-réaction d'état.....	55
IV.2.1) Configuration avec loi de commutation par contre-réaction d'état.....	55
IV.2.2) Condition pour l'existence du mode de glissement.....	56
IV.2.3) La commande équivalente.....	57
IV.2.4) Equation d'état en mode de glissement.....	58
IV.2.5) Solution de l'équation d'état en mode de glissement.....	58
IV.3) Représentation des phénomènes transitoires dans le plan d'état.....	59
Exemple : Calcul d'une commande équivalente par le mode de glissement.....	59
IV.4) Loi de commutation par retour d'état et régulateur intégrateur.....	61
IV.4.1) Configuration avec loi de commutation par retour d'état et régulateur intégrateur.....	61
IV.4.2) Equation d'état du système global.....	61
IV.4.3) La commande équivalente.....	62
IV.4.4) Equation d'état en mode de glissement.....	63
IV.5) Imposition des pôles en mode de glissement.....	63
IV.5.1) Invariance du mode de glissement par rapport à une transformation linéaire.....	63
IV.5.2) Détermination des coefficients de retour d'état en utilisant la forme canonique de commande.....	65
IV.5.3) Détermination des coefficients de retour d'état sans l'utilisant de la forme canonique de commande.....	68
IV.6) Conclusion.....	70
Conclusion générale.....	71
Références bibliographiques.....	72

Introduction générale

La théorie des systèmes a connu des progrès importants à travers les années. La plupart des techniques d'analyse et de synthèse sont basées sur des modèles linéaires des procédés commandés. Néanmoins, la nature non linéaire des systèmes physiques et en raison des performances de plus en plus croissantes exigées dans les applications industrielles, alors l'usage des techniques de commande avancée (commande adaptative, commande optimale, commande par mode de glissement,) devient indispensable.

De nos jours, les techniques de commande avancée deviennent l'un des domaines de recherche les plus actifs. En parallèle, on dispose de calculateurs puissants et une variété d'outils logiciels. Ce qui facilite la synthèse de lois de commande avancées et leur exécution, sans difficultés en temps réel.

La première étape dans l'étude d'un système de commande est la modélisation. Des modèles simples sont souvent adoptés. Le calcul de la loi de commande se fait ensuite d'une manière séparée à base du modèle élaboré, sans prise en compte de certains aspects physiques du processus à commander (variations paramétriques, consommation excessive d'énergie, ...). Ce qui conduit à des performances insuffisantes aux régimes transitoire et établi. Les variations paramétriques déstabilisent des systèmes de commande conventionnelle (régulateur à paramètres fixes) et dégrade les performances en boucle fermée. La solution efficace est de faire appel à des techniques de commande adaptative. La consommation abusive, la prolongation du régime transitoire ainsi que l'erreur au régime établi sont résolus par les commandes optimales. Le manque de robustesse par rapport aux fortes perturbations externes et variations importantes des paramètres des systèmes complexe et à constante de temps faible est compensé par la commande par mode de glissement.

Ce modeste travail est un support de cours destiné aux étudiants pour les initier aux techniques de commande avancée. Le premier chapitre présente des notions et un vocabulaire exact des termes utilisés souvent en asservissement. Cette partie regroupe les définitions des différents modèles existants et en particulier, ceux utilisés en commande des systèmes.

Le deuxième chapitre présente une introduction aux techniques de commande adaptative. L'étude concerne les systèmes linéaires stationnaires (invariants) discrets. On a présenté la commande adaptative directe avec modèle de référence, la commande adaptative indirecte auto-ajustable et la commande auto-ajustable avec reparamétrisation du prédicteur.

La commande optimale est étudiée dans le troisième chapitre. Nous avons synthétisé la commande pour un système représenté avec un modèle d'état général non linéaire et non stationnaire. On a, aussi, calculé la commande en boucle ouverte pour un système linéaire

variant. La commande en boucle fermée est calculée pour les systèmes variants et invariants qui nécessite la résolution de l'équation de " Riccati " dans le cas d'horizon fini et infini.

Le quatrième chapitre est consacré au calcul de la commande par mode de glissement pour un système linéaire, représenté par un modèle d'état. On a calculé deux commandes sans et avec régulateur intégrateur. On a présenté les étapes de calcul des gains de contre réaction, en utilisant la représentation canonique de commande et avec seulement le calcul de la matrice de transformation vers cette représentation.

Quelques exemples sont présentés dans le manuscrit afin d'éclaircir les étapes de calcul des lois de commandes formulées.

Enfin, on termine avec une conclusion générale.

Chapitre I :

Notions sur l'asservissement

Nous présentons des notions sur l'asservissement à travers des définitions importantes qui apportent des précisions sur des concepts de base et le vocabulaire utilisé en commande des systèmes.

Nous évoquons le type d'entrée d'un système ainsi que la nécessité d'un modèle en commande des systèmes. Nous présentons aussi les différents modèles et en particulier ceux utilisés en automatique. Un schéma synoptique de commande détaillé qui présente les blocs de la chaîne directe et celle de retour est donné. Nous terminons le chapitre avec un exemple de schéma de commande d'un moteur à courant alternatif

I.1) Définition de l'asservissement

En automatique, un asservissement est un algorithme dont l'objet principal est de forcer la sortie ou l'état d'un système à atteindre le plus rapidement possible sa valeur de consigne (la valeur souhaitée en sortie) et de limiter l'écart par rapport à cette dernière, quelles que soient les perturbations externes ou internes. Le principe général est de comparer la consigne et l'état (la sortie) du système de manière à le corriger efficacement. On parle également de système commandé par rétroaction négative ou en boucle fermée «feedback en anglais».

L'objet d'application de l'automatique est appelé «système». Un système se caractérise par ses grandeurs d'entrée et de sortie. Les grandeurs d'entrée sont les grandeurs qui agissent sur le système. Il en existe deux types :

Les commandes : Elles sont calculées, puis appliquées au système (elles sont maîtrisables).

Les perturbations : Elles sont en général inconnues. Elles dépendent de l'environnement ou des caractéristiques physiques du système.

La commande est alors une fonction de la consigne et de la sortie. Pour observer les grandeurs de sortie, on utilise des capteurs. C'est l'information de ces derniers qui va permettre d'élaborer la commande.

Un système de commande peut réaliser deux fonctions distinctes :

L'asservissement : C'est la poursuite par la sortie d'une consigne variable dans le temps.

La régulation : C'est la compensation de l'effet des perturbations variables sur la sortie (la consigne restant fixe).

I.2) Modélisation d'un système

En automatique, La modélisation des systèmes est une étape nécessaire pour leur analyse et leur commande.

Cette phase se décompose en trois étapes : définir les phénomènes physiques du système à commander, faire le bilan des variables mesurables et identifier l'origine des phénomènes principaux (électrique, mécanique, hydraulique).

L'écriture des équations du modèle peut se présenter sous différentes formes, l'une adaptée à la description des systèmes électromécaniques (moteurs électriques) et l'autre adaptée aux systèmes hydrauliques.

Il est indispensable d'établir un *modèle comportemental* (appelé boîte noire) du système à commander. Ceci nécessite l'écriture d'un *modèle de connaissance* ou de tous modèles intermédiaires.

I.2.1) Modèle de connaissance

Les modèles de connaissance sont élaborés à partir des lois de la physique (électricité, mécanique) ou de la chimie. L'objectif étant d'explicitier le fonctionnement d'un système par

une relation mathématique. Ces modèles peuvent être assez complexes et comporter de nombreux paramètres à identifier.

I.2.2) Modèle comportement

Les modèles de comportement sont des modèles linéaires, dont la validité reste limitée à de petites variations autour d'un point de fonctionnement. Ils se concrétisent par des fonctions de transfert.

I.2.3) Modèle intermédiaire

Les modèles intermédiaires sont des modèles hybrides souvent issus d'une simplification ou d'une linéarisation des modèles de connaissances.

I.2.4) Modèles utilisés en automatique

En automatique, on utilise le modèle de comportement pour la commande des systèmes. Si ce dernier est complexe, on utilise le modèle intermédiaire issu des simplifications sur le modèle de comportement ou de connaissance.

I.2.5) Modèles de calcul et de validation

En commande des systèmes, on cite deux modèles : le modèle de calcul (souvent simplifié), utilisé pour la synthèse des lois de commande et le modèle de validation (simulation) de ces dernières, représentant la plus part des phénomènes physiques du système, où les paramètres et les signaux du modèle sont physiques.

I.2.6) Modèles d'état et entrée/sortie

Les systèmes sont représentés par deux modèles qui dépendent de l'espace utilisé :

- **Temporel** : La variable utilisée est le temps « t », variable physique et on obtient le modèle d'état.
- **Complexe** : La variable utilisée est l'opérateur de Laplace « p » (ou « s »), variable abstraite et on obtient le modèle fréquentiel.

I.2.6.1) Modèle (représentation) d'état

Il est obtenu à partir des modèles de connaissance ou de comportement, sachant que ces derniers sont donnés sous forme d'équations différentielles. En général, tous les systèmes (linéaire, non linéaire, continu, discret, variable dans le temps, invariable dans le temps, ...) peuvent être représentés par un modèle d'état.

Le modèle d'état est composé par deux systèmes d'équations :

- Equations d'état : système d'équations différentielles du premier ordre linéairement indépendantes.
- Equations d'observations ou compagne de sortie : système d'équations algébriques linéairement indépendantes.

Exemple

Modèle d'état linéaire invariable dans le temps.

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \quad \text{équations d'états (d'évolutions)}$$

$$Y(t) = C X(t) + D E(t) \quad \text{équations d'observations (de sorties, de mesures)}$$

avec, $X(t)$ vecteur d'état, $U(t)$ vecteur des entrées, $Y(t)$ vecteur des sorties, $E(t)$ vecteur des perturbations, A matrice d'état (dévolution), B matrice de commande (d'entrée), C matrice de sortie, D matrice de perturbation.

I.2.6.2) Modèle entrée/sortie (de transfert, ou fréquentiel)

Il est calculé en utilisant la transformation de « Laplace » sur le modèle de connaissance, ou de comportement ou intermédiaire. Les conditions nécessaires pour le calcul du modèle de transfert sont :

- La linéarité des équations différentielles du modèle initial ;
- Les conditions initiales des équations différentielles sont nulles.

Le modèle fréquentiel est une « fonction de transfert (transmittance) » si le système est mono-entrée et mono-sortie, ou une « matrice de transfert » si le système est multi-entrées et/ou multi-sorties.

Exemple

Modèle fréquentiel

- Système mono-entrée et mono-sortie :

$$y(p) = F(p)x(p)$$

avec $F(p) = N(p)/D(p)$ fonction de transfert, où l'ordre du polynôme $D(p) >$ à l'ordre du polynôme $N(p)$.

- Système à deux entrées $x_1(t)$, $x_2(t)$ et à deux sorties $y_1(t)$, $y_2(t)$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(p) \\ y_2(p) \end{bmatrix}}_{\text{Vecteur de sortie}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_{11}(p) & F_{12}(p) \\ F_{21}(p) & F_{22}(p) \end{bmatrix}}_{\text{Matrice de transfert}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(p) \\ x_2(p) \end{bmatrix}}_{\text{Vecteur d'entrée}}$$

avec $F_{ij}(p) = N_{ij}(p)/D_{ij}(p)$ des fonctions de transfert, où l'ordre des polynômes $D_{ij}(p) >$ à l'ordre des polynômes $N_{ij}(p)$ pour chaque $F_{ij}(p)$ et $i=1, 2$, $j=1, 2$.

I.3) Classification des systèmes

La classification des systèmes peut se faire par rapport à plusieurs concepts : la nature de la variable temps « t », le type d'équations, le nombre des entrées/sorties, la nature de ces paramètres.

I.3.1) Systèmes continu et discret

Les systèmes se classent en fonction du type des signaux qu'ils traitent : analogiques, discrets, hybrides. La variable considérée est le temps « t ».

I.3.1.1) Système continu (analogique)

C'est des systèmes constitués de composants analogiques. Ils traitent des signaux continus ou analogiques.

Exemples

- Représentation d'état d'un système continu:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t) \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned}$$

La variable « t » est continue. Les composantes des vecteurs $U(t)$, $Y(t)$, $X(t)$ sont des signaux continus, c'est-à-dire mesurables quelque soit l'instant considéré ($\forall t \geq 0$).

- Représentation fréquentielle d'un système continu mono-entrée et mono-sortie:

$$Y(p) = F(p)X(p) = \frac{N(p)}{D(p)} X(p)$$

avec $x(t)$ l'entrée du système, $y(t)$ sortie du système, « t » variable continue, $N(p)$ et $D(p)$ polynômes de variable complexe « p », ou l'ordre de $D(p) >$ ordre de $N(p)$.

I.3.1.2) Système discret (échantillonné, ou numérique)

C'est des systèmes constitués d'au moins d'un composant qui traite que des signaux discrets, ou la variable temps « t » est échantillonnée.

Exemples

- Représentation d'état d'un système discret:

$$\begin{aligned} X((k+1)T_e) &= A X(kT_e) + B U(kT_e) \\ Y(kT_e) &= C X(kT_e) \end{aligned}$$

avec, k est un nombre entier positif, T_e la période d'échantillonnage. Les composantes des vecteurs $U(kT_e)$, $Y(kT_e)$, $X(kT_e)$ sont des signaux discrets, c'est-à-dire mesurables aux instants kT_e .

- Représentation fréquentielle d'un système discret mono-entrée et mono-sortie:

$$Y(z) = F(z)X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} X(z)$$

avec $x(kT_e)$ l'entrée du système, $y(kT_e)$ sortie du système, « kT_e » temps discret (discontinu), $N(z)$ et $D(z)$ polynômes de variable complexe « z », ou l'ordre de $D(z) >$ ordre de $N(z)$.

Remarques

- On utilise souvent la variable « z^{-1} », conséquence de l'utilisation des équations récurrentes (temporaires).

- Le temps discret normalisé (valeur entière positive) est obtenu, en divisant le temps « kT_e » par la période d'échantillonnage « T_e » donc, on obtient l'entier positif « k ». Il est utilisé dans les équations récurrentes pour une représentation moins encombrante.

I.3.2) Systèmes linéaire et non linéaire

Les systèmes sont classés selon la nature de leurs équations : équations linéaires ou non linéaires.

I.3.2.1) Système linéaire

Un système est dit linéaire si la variation de sa sortie est proportionnelle à la variation de son entrée. Il a des équations à paramètres constants, indépendantes des fonctions non linéaires et ces signaux sont découplés. Il peut être représenté par un modèle d'état ou fréquentiel.

I.3.2.2) Système non linéaire

Un système est dit non linéaire si la variation de sa sortie est non proportionnelle à la variation de son entrée. Ces équations dépendent des fonctions non linéaires et/ou ces signaux sont couplés. Il peut être représenté seulement par un modèle d'état non linéaire.

Exemple

Modèle d'état non linéaire

$$\dot{X}(t) = F(X(t), U(t))$$

$$Y(t) = G(X(t), E(t))$$

avec, $X(t)$ vecteur d'état, $U(t)$ vecteur d'entrée, $Y(t)$ vecteur de sortie, $E(t)$ vecteur de perturbation, $F(.)$ et $G(.)$ vecteurs de composantes non linéaires.

I.3.3) Systèmes mono-entrée/mono-sortie et multi-entrées/multi-sorties

Cette classification se base sur le nombre des entrées/sorties du système. Il existe deux classes de systèmes :

I.3.3.1) Système mono-entrée/mono-sortie

C'est un système à une seule entrée et une seule sortie. Il est simple à modéliser, à analyser et à commander, à cause de l'absence du couplage.

I.3.3.2) Système multi-entrées/multi-sorties

C'est un système au moins à deux entrées et/ou deux sorties. La théorie d'analyse et de commande de ces systèmes est plus complexe par rapport à la classe précédente, en particulier dans l'espace fréquentiel, où leur modèle est une matrice de transfert.

I.3.4) Systèmes invariable et variable dans le temps (stationnaire/non stationnaire)

Les systèmes peuvent être classés selon la nature de leurs paramètres. Ces derniers sont fixes ou variables par rapport au temps.

I.3.4.1) Système invariable dans le temps (stationnaire)

C'est un système où tous les paramètres de son modèle sont fixes. En pratique, cette caractéristique dépend des conditions de fonctionnement. Ces systèmes nécessitent une théorie de commande simple.

I.3.4.2) Système variable dans le temps (non stationnaire)

C'est un système qui contient au moins un paramètre variable dans le temps. En général, les variations des paramètres d'un système dépendent du mode de fonctionnement. La théorie de commande de ces systèmes est relativement complexe.

I.4) Schéma de principe d'un système asservi

Les systèmes de commande se présentent sous deux formes :

I.4.1) Système de commande en boucle ouverte

Il est composé seulement d'une chaîne directe et il n'existe pas de retour de la sortie commandée (figure I.1). Il est sensible aux perturbations externes et est très difficile ou impossible de suivre un signal de consigne variable.

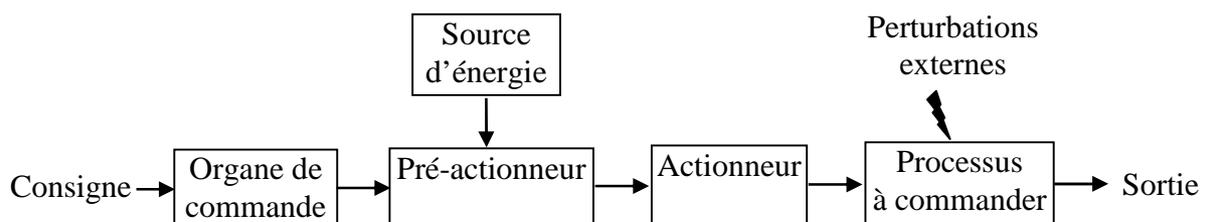


Figure I.1 : Système de commande en boucle ouverte

Exemple

Le chauffage par radiateur. Il y a aucun ajustement du débit de l'eau chaude utilisée.

I.4.2) Système de commande en boucle fermée

Il est composé d'une chaîne directe, d'une chaîne de retour et un comparateur de la consigne et de la mesure de la sortie commandée (figure I.2). Le signal de commande est ajusté en fonction de l'erreur entre la consigne et la mesure. Il permet de compenser les effets des perturbations externes.

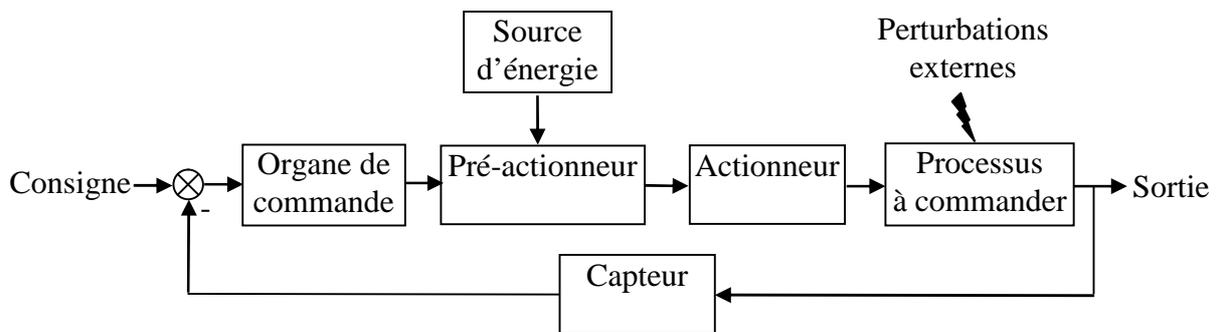


Figure I.2 : Système de commande en boucle fermée.

Un système asservi est un système de commande en boucle fermée, c'est-à-dire il existe un retour ou une contre réaction (en anglais « feedback ») de la sortie commandée (figure I.3). Cette dernière donne la mesure de la sortie, après adaptation, elle est comparée à la grandeur de consigne et la différence (erreur) est appliquée à l'organe de commande. En fonction de cette erreur, un signal de commande est généré puis, appliqué au pré-actionneur. Ce dernier est informé par le signal de commande sur la quantité d'énergie à délivrer à l'actionneur par la source.

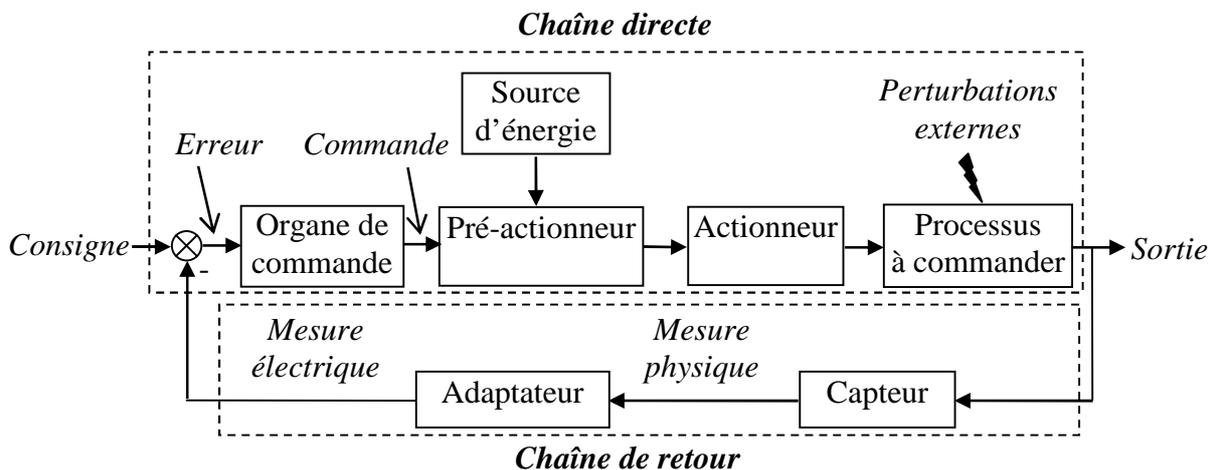


Figure I.3 : Schéma de principe d'un système asservi.

I.5) Exemple : Schéma de commande d'un moteur électrique à courant alternatif

La commande des moteurs électriques, en particulier à courant alternatif est une tâche complexe ; à cause de leur dynamique fortement non-linéaire. Les étapes de commande sont :

I.5.1) Modélisation

-Modèle de connaissance (Modèle abc)

La modélisation des moteurs se fait sous certaines hypothèses simplificatrices. Car, ils existent plusieurs phénomènes physiques difficiles à représenter dans leur globalité. En appliquant les lois de l'électricité et de la mécanique, les moteurs triphasés sont représentés par un modèle électromécaniques abc.

- Modèles de calcul (modèles de calcul biphasés « $\alpha\beta$ » ou «dq»)

Deux modèles de calcul biphasés « $\alpha\beta$ » ou «dq» peuvent être déduit, en utilisant des matrices de transformation.

I.5.2) Validation des modèles

Une validation par simulation s'impose afin de vérifier que les modèles représentent la dynamique du moteur étudié et que les signaux correspondent aux valeurs nominales de sa plaque signalétique.

Il est nécessaire d'alimenter le moteur par un onduleur (pré-actionneur) afin de varier sa vitesse, en variant la fréquence et l'amplitude de la tension d'alimentation. Le moteur avec son alimentation est validé par simulation.

I.5.3) Calcul de la loi de commande

Le choix de la loi de commande dépend du cahier des charges. On choisit le modèle de calcul qui nous facilite la synthèse de la loi de commande.

On valide la loi de commande, en supposant d'abord que l'onduleur est idéal, c'est-à-dire il est représenté par un gain unité. Puis, on valide l'ensemble commande-onduleur-moteur.

- Schéma de commande

Un schéma synoptique (bloc) de commande est représenté par la figure I.4. Ce dernier peut être codé avec un logiciel de simulation :

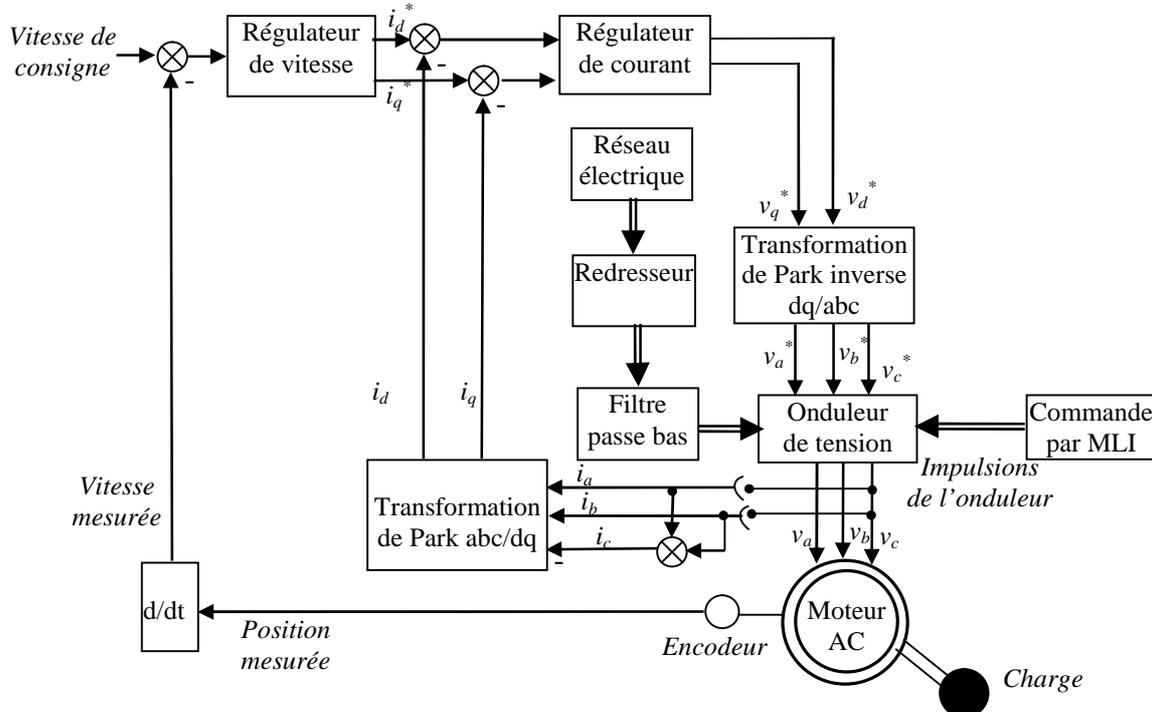


Figure I.4 : Système de commande de la vitesse d'un moteur à courant alternatif.

I.6) Conclusion

La modélisation est une étape nécessaire pour la commande des systèmes. La validation de cette représentation est impérative avant le calcul de la loi de commande. Le choix du modèle utilisé dans la synthèse (modèle de calcul) nous simplifie et nous assure dans notre démarche.

Le signal de commande n'alimente jamais l'actionneur. Car, les niveaux d'énergie et même la nature dans certains cas sont différents. Donc, le pré-actionneur est nécessaire dans la tâche de commande des systèmes.

L'utilisation d'un vocabulaire correct est précis en automatique et en particulier en commande des systèmes est de rigueur.

Chapitre II :
Commande adaptative

Les variations paramétriques (VP) des systèmes est un phénomène souvent rencontré. Car, il dépend du mode de fonctionnement. Dans le cas où le système est sollicité à fonctionner dans des points éloignés du régime nominal, les VP sont inévitables. Le fonctionnement continu pendant de longues périodes cause aussi des VP. L'identification exacte des paramètres du système est une tâche délicate. Ce qui réduit les performances des lois de commande. Toutes ces lacunes trouvent des solutions avec les commandes adaptatives. Le développement de moyens de calcul rend la mise en œuvre de ces commandes possible, même pour des systèmes relativement rapides.

Dans ce chapitre, nous introduisons la commande adaptative pour les systèmes linéaires représentés avec des modèles discrets. Nous synthétisons d'abord une commande numérique conventionnelle puis nous calculons deux commandes adaptatives, directe avec modèle de référence et indirecte auto-ajustable. Nous montrons avec une reformulation de la commande indirecte auto-ajustable, l'aboutissement à la commande directe.

II.1) Principe de la commande adaptative (CA)

II.1.1) Définition :

C'est l'ensemble des techniques utilisés pour l'ajustement automatique en ligne et en temps réel des régulateurs des boucles de commande, afin de réaliser ou de maintenir un certain niveau de performances, quand les paramètres du procédé à commander sont soit inconnus soit/et variables dans le temps.

II.1.2) Les tâches typiques de la commande adaptative

Les systèmes de commande adaptative (CA) peuvent réaliser quelques tâches typiques à savoir

- Ajustement automatique des régulateurs à la mise en œuvre,
- Détermination automatique des paramètres optimaux des régulateurs dans les différents points de fonctionnement du procédé,
- Maintien des performances du système de CA quand les caractéristiques du procédé changent,
- Détection des variations anormales des caractéristiques des procédés (ces variations se reflètent dans les valeurs des paramètres fournis par l'algorithme d'adaptation paramétrique),
- Possibilité de mise en œuvre des régulateurs plus complexes et plus performants que le P.I.D (ceci comme conséquence de l'ajustement automatique des paramètres du régulateur),
- Conception de nouveaux procédés technologiques utilisant des systèmes de CA qui assure le bon fonctionnement du procédé.

II.1.3) Domaines d'application de la commande adaptative

La CA est utilisée quand c'est techniquement nécessaire et économiquement rentable. Les techniques de CA ont été utilisées avec succès pour un grand nombre d'applications : Asservissements à moteurs électriques ; robots manipulateurs ; cimenteries ; réacteurs chimiques ; colonnes à distiller ; machines à papier ; régulation de Ph ; échangeur de chaleur ; systèmes d'armes ; ... etc.

L'utilisation des systèmes de CA connaît aujourd'hui un essor certain, d'une part, à cause de leur complexité raisonnable et, d'autre part, à cause du développement des cartes à micro-processeurs pouvant servir de support pour leur mise en œuvre.

En ce qui concerne la rentabilité, les éléments suivants sont à prendre en compte

Amélioration de la qualité des produits, augmentation de la production, économie d'énergie, espacement des arrêts d'entretien et détection précoce des anomalies.

II.2) Similarités et différences entre la commande adaptative et la commande conventionnelle en boucle fermée

Nous illustrons la similarité et la différence entre la CA et la commande conventionnelle par contre réaction négative, cette procédure permet l'assimilation rapide et efficace de la CA.

Les variations non-mesurables et inconnues des paramètres d'un procédé affectent les performances d'un système de commande en boucle fermée utilisant un régulateur à paramètres fixes. Ces variations sont provoquées par des perturbations paramétriques agissant sur le procédé, en plus des perturbations externes agissant sur les variables à réguler.

Nous distinguons deux types de perturbations : perturbations externes agissant sur les variables à réguler et perturbations (paramétriques) agissant sur les performances du système de commande.

La contre-réaction est essentiellement utilisée dans les systèmes de régulation conventionnels pour réduire (ou éliminer) l'effet des perturbations agissant sur les variables à réguler. Afin de réaliser cet objectif, on mesure les variables (sorties), on les compare aux valeurs désirées (consignes) et les différences sont appliquées à (aux) entrée(s) du (des) régulateur(s) qui génèrent la commande appropriée (figure II.1). Une approche conceptuellement similaire peut être considérée pour le problème du maintien des performances d'un système de commande en présence des perturbations (variations) paramétriques. Il faut *définir* d'abord un *indice de performance mesuré* (I.P. mesuré) du système qui est une mesure des performances du système (exemple : facteur d'amortissement pour des systèmes caractérisés par une fonction de transfert du deuxième ordre). Il faut après *mesurer* cet I.P. réel et le *comparer* avec *l'indice de performance désiré* (I.P. désiré). La différence entre le I.P. désiré et le I.P. mesuré est appliquée par un *mécanisme d'adaptation paramétrique* (M.A.P). Le M.A.P adapte (modifie) les paramètres du régulateur ou agit directement sur le signal de commande afin de modifier d'une manière appropriée les performances du système (figure II.2).

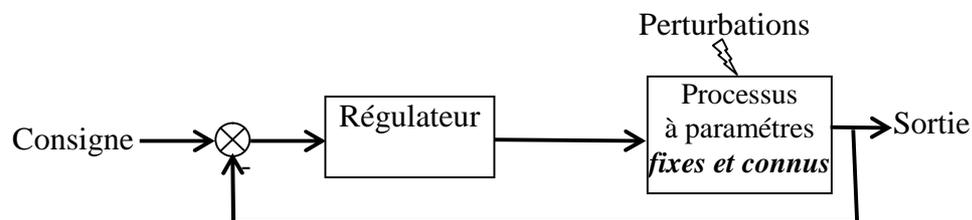


Figure II.1 : Schéma de principe d'un système de commande conventionnelle en boucle fermée.

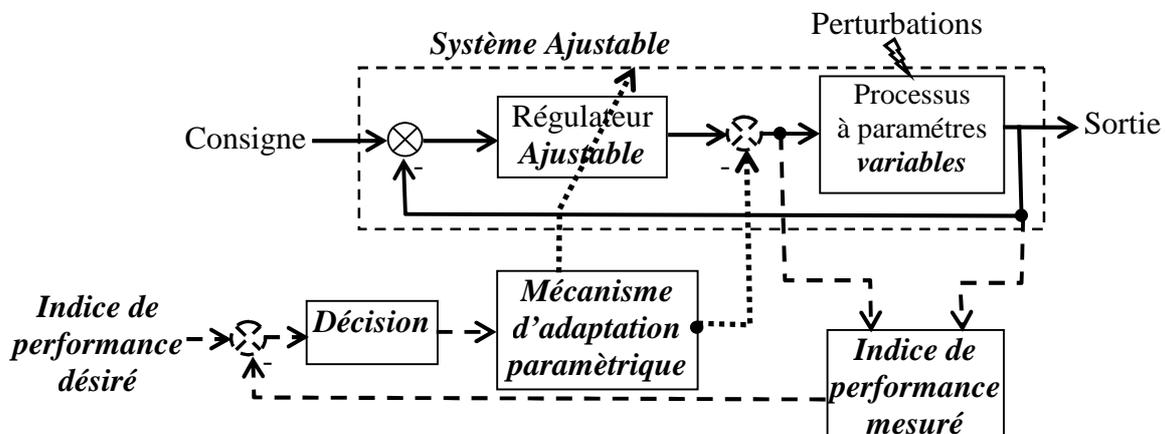


Figure II.2 : Schéma de principe d'un système de commande adaptative.

II.3) Définition d'un système de commande adaptative

Un système de commande adaptative (SCA) mesure un I.P du système à commander et la différence entre le I.P mesuré et le I.P désiré et le M.A.P modifie (adapte) les paramètres du régulateur ajustable ou les signaux de commande, afin de maintenir le I.P mesuré du système dans le voisinage du I.P désiré (figure II.3). Un SCA contient en plus de la boucle de commande à contre-réaction classique, une boucle à contre-réaction supplémentaire qui modifie les paramètres du régulateur afin de compenser les effets des variations paramétriques du procédé. La deuxième boucle contrôle les performances du système.

Un système de commande en B.F conventionnelle réduit l'effet des perturbations externes agissant sur les variables (sorties) du système, or ses performances dynamiques vont varier à cause des variations (perturbations) paramétriques.

II.4) Différentes techniques de commande adaptative

Il existe plusieurs types de schémas de SCA, mais seulement ceux qui ont une boucle de contre-réaction sur la mesure de performance sont réellement des schémas de SCA. Le développement de ces techniques est largement basé sur une bonne compréhension des aspects « algébriques » des différentes stratégies de commande linéaire.

Trois approches ont été essentiellement considérées pour le développement des stratégies de commande adaptative des systèmes à paramètres inconnus ou variables dans le temps :

- Approximations des stratégies de commande optimale stochastique « dual » ;
- Commande Adaptative « directe » avec **Modèle de Référence (CAMR)**, (en anglais : **Model Reference Adaptive Control (MRAC)**) ;
- Commande adaptative « indirecte » : **Système de Commande Auto-Ajustable (CAA)**, (en anglais : **Self Tuning Control (STC)**).
- Commande auto-ajustable avec reparamétrisation du prédicteur.

II.4.1) Commande dual

Le principe de cette stratégie est que les paramètres sont traités comme des états additionnels du système. Ce qui transforme même un très simple problème de commande linéaire en un problème de commande non-linéaire stochastique. Le régulateur est composé d'un estimateur non-linéaire suivi par le régulateur proprement dit. La stratégie de commande « dual » maintient un compromis entre la minimisation du critère d'estimation et du critère de commande. Cette technique est extrêmement compliquée et même les différentes approximations sont compliquées et nécessite des moyens de calcul puissants. Cette approche a néanmoins un intérêt théorique pour comprendre et évaluer les performances maximales qui peuvent être obtenues par des techniques plus simples de commande à savoir la MRAC et la STC. La commande « dual » a été introduite par « Feldbaum » en « 1963 ».

II.4.2) Commande adaptative « directe » avec modèle de référence

Une CA est dite « directe » si les paramètres du régulateur sont ajustés en une seule étape. Cette technique est originalement proposée par « Whitaker » en « 1958 ». Sa première application remonte au début des années 70.

Le développement de la CAMR (MRAC en anglais) repose sur l'hypothèse que pour toutes les valeurs possibles des paramètres du procédé, on suppose qu'il existe un régulateur de structure donnée qui peut assurer la réalisation des performances désirées. Le rôle de la boucle d'adaptation paramétrique se limite à trouver les bonnes valeurs des paramètres de ce régulateur dans chaque cas.

La première étape de calcul de MRAC est de définir un « modèle de référence » qui est une fonction de transfert (FT) représentant les performances désirées en boucle fermée. La différence entre la sortie $y(kT_e)$ du procédé et celle $y_M(kT_e)$ du modèle de référence est une mesure de la différence entre les performances mesurées (réelles) et désirées. Cette information est utilisée par le mécanisme d'adaptation paramétrique (qui reçoit aussi d'autres mesures : commande et sortie) pour ajuster automatiquement les paramètres du régulateur (figure II.3).

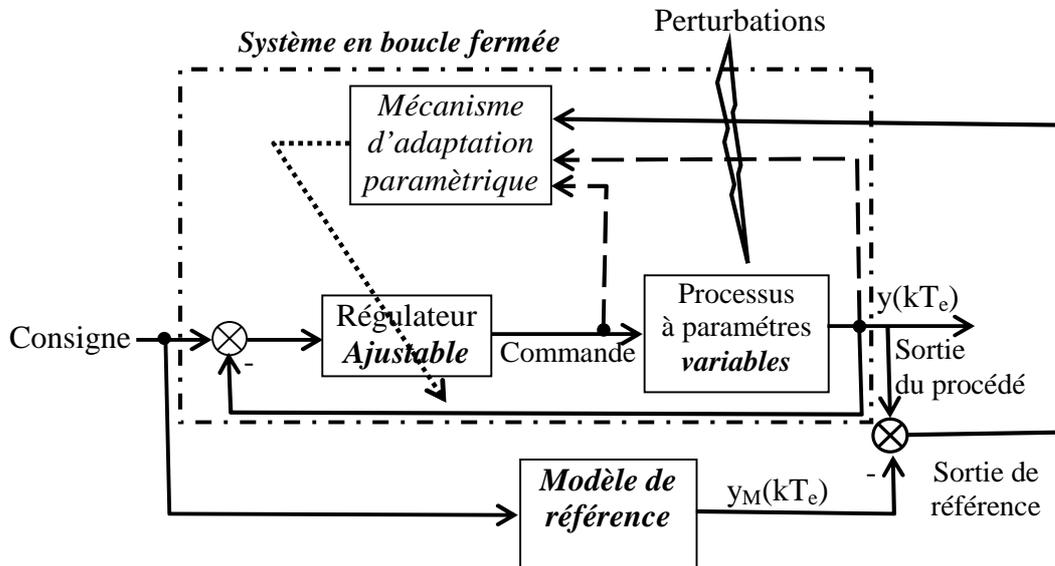


Figure II.3 : Schéma d'une commande adaptative directe avec modèle de référence.

II.4.3) Commande adaptative « indirecte » auto-ajustable

Une CA est dite « indirecte » si les paramètres du régulateur sont adaptés en deux étapes :

Étape 1 : Estimation des paramètres du modèle du procédé ;

Étape 2 : Calcul de ceux du régulateur à partir des paramètres estimés.

Le SCA auto-ajustable est indirecte. Cette technique est initialement proposée par « Kalman » en « 1958 ». Au début des années 70, la première application industrielle est concrétisée.

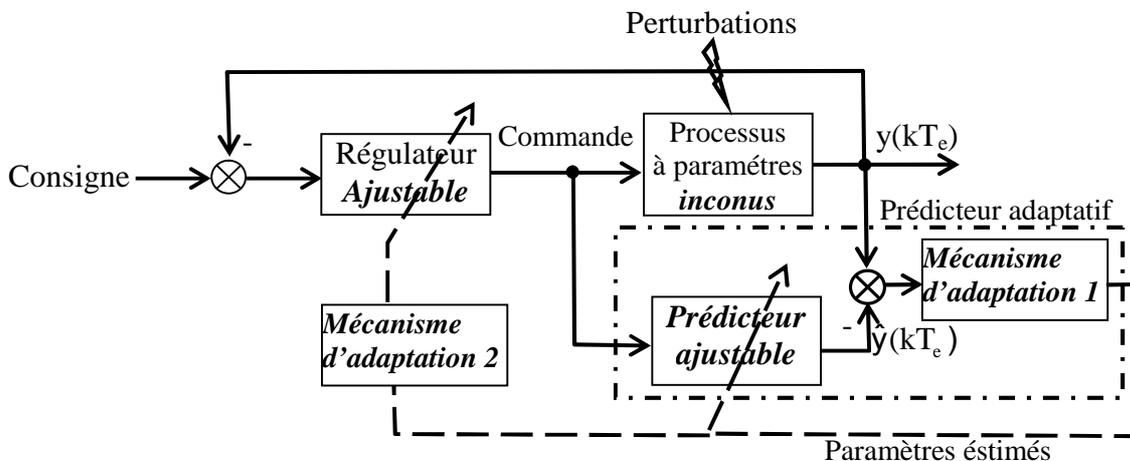


Figure II.4 : Schéma d'une commande adaptative indirecte auto-ajustable.

$y(kT_e)$: sortie du procédé ; $\hat{y}(kT_e)$: sortie prédite

Le développement de la CAA (STC en anglais) repose sur la même hypothèse que le MRAC. La caractéristique de cette stratégie est que le modèle du procédé utilisé pour le calcul est remplacé par un modèle estimé (identifié) en temps réel (prédicteur ajustable avec un mécanisme d'adaptation paramétrique), à partir des entrées et des sorties du procédé (figure II.4).

Le schéma STC estime les paramètres du procédé, à chaque instant, et construit le « prédicteur » de la sortie du procédé. L'erreur de prédiction (la différence entre la sortie réelle (mesurée) du procédé et celle du prédicteur) sert à adapter les paramètres du prédicteur. Les paramètres de ce dernier sont utilisés à chaque pas de calcul pour synthétiser (calculer) le régulateur ajustable. Le schéma de la CAA peut être interprété comme une application ad-hoc du principe d'équivalence certaine utilisée dans la théorie de la commande stochastique linéaire.

II.4.4) Commande auto-ajustable avec reparamétrisation du prédicteur

Cette méthode consiste à reformuler les deux étapes de la méthode adaptative indirecte auto-ajustable en une seule étape. Le principe consiste à re-paramétriser d'une manière appropriée le prédicteur qui fait apparaître les paramètres du régulateur. On obtient un seul mécanisme d'adaptation qui adapte (estime) les paramètres du prédicteur et ceux du régulateur ajustable. L'idée de base dans la re-paramétrisation est de tenir compte des relations entre les performances, les paramètres du régulateur et ceux du procédé afin de réécrire les équations du modèle en termes des paramètres du régulateur et des performances désirées. On obtient alors le schéma donné par la figure II.5.

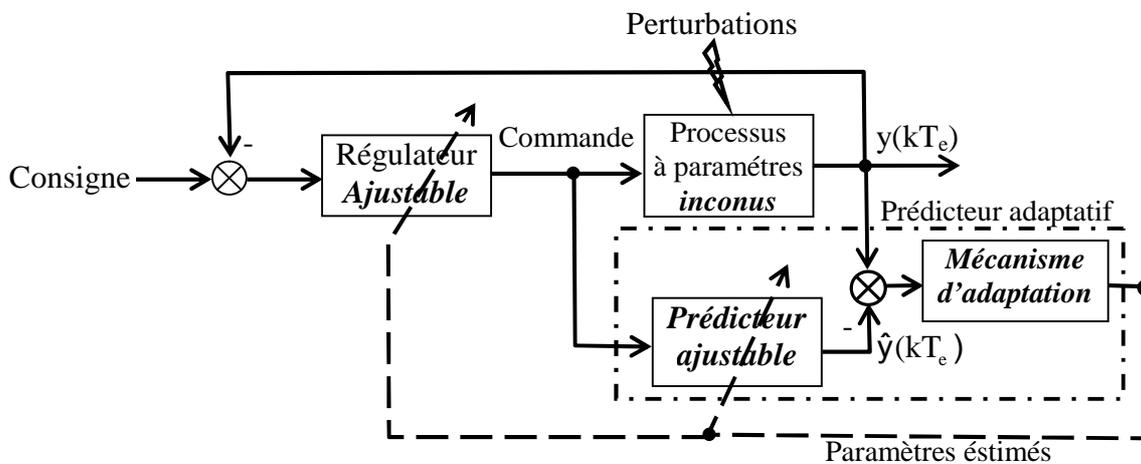


Figure II.5 : Schéma d'une commande auto-ajustable avec re-paramétrisation du prédicteur.

$y(kT_e)$: sortie du procédé ; $\hat{y}(kT_e)$: sortie prédite

II.5) Commande numérique par ordinateur

Le développement et la mise en œuvre de la commande adaptative est dû en grande partie à l'utilisation des calculateurs numériques pour la commande. Afin de mettre en évidence la CA, nous synthétisons d'abord une commande numérique linéaire pour un système linéaire à paramètres fixes et connus, puis nous supposons un système à paramètres variables ou inconnus où sa commande nécessite une CA. Alors, nous montrons l'apport de la CA par-rapport à la commande conventionnelle.

II.5.1) Différents schémas synoptique de principe

Le schéma de principe de la commande numérique (par ordinateur) peut être représenté par deux schémas équivalents :

La figure II.6 représente un schéma de principe de la commande numérique, où on reconstitue le régulateur analogique avec un convertisseur analogique/numérique (C.A.N) à son entrée qui discrétise le signal d'erreur $e(t)$ et un convertisseur numérique/analogique plus un bloqueur d'ordre zéro (C.N.A+B.O.Z) à sa sortie qui, reconstitue le signal de commande $u(kT_e)$ avec, k un nombre entier positif et T_e la période d'échantillonnage de l'horloge. On constate que ce schéma adapte le régulateur discret au procédé continu.

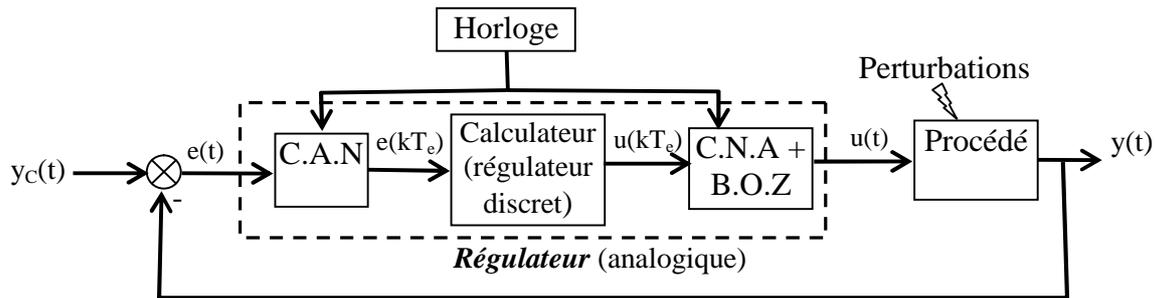


Figure II.6 : Schéma de principe d'un système de commande numérique avec reconstitution du régulateur analogique.

Le deuxième schéma, donné par la figure II.7 qui est équivalent à celui de la figure II.6. On utilise de part et d'autre du procédé continu deux convertisseurs : numérique/analogique plus un bloqueur d'ordre zéro (C.N.A+B.O.Z) à son entrée qui reconstitue le signal de commande $u(kT_e)$ et analogique/numérique (C.A.N) à sa sortie qui discrétise le signal de sortie $y(t)$. On remarque que cette structure adapte le procédé continu au régulateur numérique.

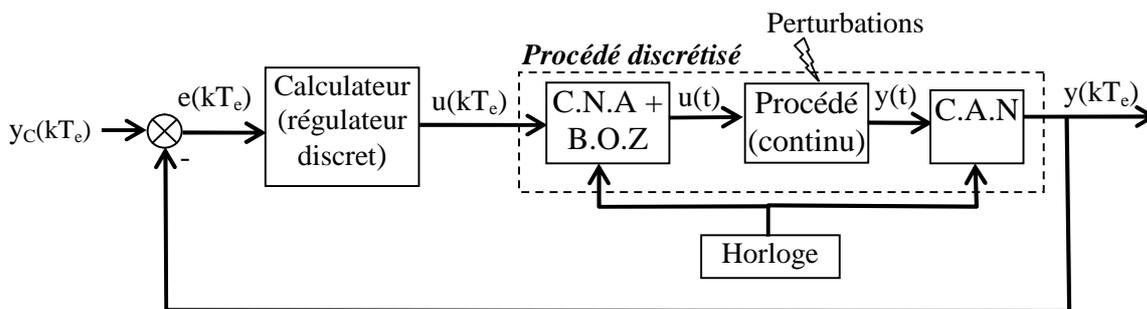


Figure II.7 : Schéma de principe d'un système de commande numérique avec discrétisation du procédé continu.

L'horloge synchronise le fonctionnement des deux convertisseurs, donc, l'ensemble du système.

Le modèle échantillonné (discret) offre la possibilité (l'avantage) d'une synthèse directe sous forme discrète des algorithmes de commande sur ordinateur. Ceci est important dans le cas des systèmes de commande adaptative non-linéaire dû à l'algorithme d'adaptation paramétrique où, on évite la discrétisation de cet algorithme non-linéaire (problème souvent délicat).

II.5.2) Calcul d'une commande conventionnelle numérique

Nous formulons les deux problèmes principaux de commande à savoir la régulation et la poursuite :

II.5.2.1) Formulation du problème de régulation

Le problème de *régulation* peut être formulé de la manière suivante :

On dispose d'un système linéaire défini par une fonction de transfert discrète $F(q^{-1})$, composée de « n_A » pôles stables et de « n_B » zéros stables (à minimum de phase) et d'un retard « d » périodes d'échantillonnage. On veut forcer la sortie $y(t)$ du système à atteindre le signal de consigne « y_c » *constant* et *rester* au voisinage de y_c même en *présence des perturbations externes*. La dynamique du système en boucle fermée est définie par le polynôme stable et connu $C_R(q^{-1})$, à « n_R » racines stables avec la condition que le nombre de pôle du système en boucle fermée (BF) soit inférieur ou égale à celui du système en boucle ouverte (BO) ($n_R \leq n_A$).

L'objectif est de réguler la sortie du système au voisinage de la consigne, même en présence des perturbations non mesurables externes. Afin d'observer si l'objectif est atteint à tout instant, il est nécessaire de garder la consigne constante, ou carrément nulle.

La formulation mathématique du problème de régulation est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t)) = y_c \quad (\text{II.1})$$

En définissant l'erreur de performance $\varepsilon(t)$ par la relation suivante

$$\varepsilon(t) = (C_R(q^{-1})(y(t) - y_c)) \quad (\text{II.2})$$

on peut reformuler d'une autre manière le problème de régulation, en ne tenant pas compte du régime transitoire et tenant compte de la dynamique en boucle fermée

$$\varepsilon(t) = (C_R(q^{-1})(y(t) - y_c)) \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (\text{II.3})$$

Remarque

On remplace la variable « z^{-1} » par l'opérateur de retard « q^{-1} » dans la fonction de transfert $F(q^{-1})$. La différence entre ces deux variables est que : « z^{-1} » est l'inverse de la variable complexe discrète « z » ; et « q^{-1} » l'opérateur de retard (domaine temporel).

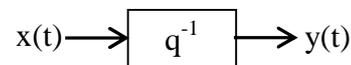


Figure II.8 : Opérateur de retard.

Sachant que $t = kT_e$ temps échantillonné (discret), avec k un entier positif et T_e période d'échantillonnage. La sortie de l'opérateur de retard est

$$\begin{aligned} y(t) &= q^{-1} x(t) \\ &= x(t - T_e) \\ &= x((k-1)T_e) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

L'opérateur de retard « q^{-1} » décale (retarde) seulement le signal d'entrée d'une période d'échantillonnage et ne change pas son amplitude.

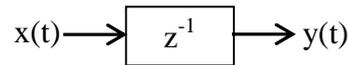


Figure II.9 : Variable complexe discrete inversée.

L'opérateur « z^{-1} » décal le signal d'entrée de T_e et modifie aussi son amplitude car son module est différent de l'unité ($\|z^{-1}\| \neq 1$). La sortie est

$$\begin{aligned} \psi(t) &= z^{-1}x(t) \\ &= \alpha x(t - T_e) \\ &= \alpha x(k-1)T_e, \text{ avec } \alpha \neq 1 \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

II.5.2.2) Formulation du problème de poursuite

Le problème *de poursuite* peut être formulé de la manière suivante :

On dispose d'un système linéaire défini par une fonction de transfert discrète $F(q^{-1})$, composée de « n_A » pôles stables et de « n_B » zéros stables (à minimum de phase) et d'un retard « d » périodes d'échantillonnage. On veut imposer à la sortie $y(t)$ du système de suivre le signal de consigne « $y_c(t)$ » *variable par-rapport au temps*. La dynamique du système en boucle fermée est définie par le polynôme stable et connu $C_R(q^{-1})$, défini par « n_R » pôles stables avec la condition que le nombre de pôle du système en BF soit inférieur ou égale à celui du système en BO ($n_R \leq n_A$).

Les perturbations externes existent toujours, même lors du problème de poursuite, alors il est plus délicat par-rapport à celui de régulation.

La formulation mathématique du problème de poursuite est

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_R(q^{-1})(\psi(t) - y_c(t)) = 0 \quad (\text{II.6})$$

On peut le formuler d'une autre manière, on ne tenant pas compte du régime transitoire et tenant compte de la dynamique en boucle fermée

$$\varepsilon(t) = (C_R(q^{-1})(y(t) - y_c(t)))^\Delta = 0 \quad (\text{II.7})$$

La consigne $y_c(t)$ peut être générée par un modèle qui spécifie les performances avec une entrée désirée.

II.5.2.3) Etapes de calcul d'une commande numérique

Nous présentons les différentes étapes de commande numérique d'un système linéaire mono-entrée/mono-sortie.

Etape 1 : Modélisation du système à commander

On considère un système linéaire d'entrée $u(t)$, de sortie $y(t)$ et à retard pur de « d » période d'échantillonnage. Sa fonction de transfert discrète $F(q^{-1})$ est

$$F(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \quad (\text{II.8})$$

avec, $\mathcal{A}(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{i=n_A} a_i q^{-i}$, $\mathcal{B}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j q^{-j}$, $n_A > n_B$ condition de causalité, $d \in \mathbb{N}$, a_i et b_j sont des constantes réelles.

On divise le numérateur et le dénominateur par « a_0 » alors, on obtient un modèle normalisé,

avec $\mathcal{A}(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{i=n_A} a_i q^{-i}$.

Remarque

- La variable « t » est un temps discret (échantillonné) *normalisé*, donc $t \in \mathbb{N}$ (donc sans dimension). Il est obtenu en divisant le temps discret par la période d'échantillonnage « T_e ».
- Le temps discret s'écrit habituellement « kT_e », en le divisant par « T_e », on obtient le temps normalisé « k » alors on remplace cette variable muette par « t ».

Etape 2 : Calcul de la relation récurrente de la sortie $y(t)$ du système

On a

$$\mathcal{R}(q^{-1}) = \frac{q^{-d} \mathcal{B}(q^{-1})}{\mathcal{A}(q^{-1})} = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} \quad (\text{II.9})$$

En remplaçant les deux polynômes par leurs expressions et sachant que $q^{\pm k} y(t) = y(t \pm k)$, on obtient

$$\psi(t+d) + \left(\sum_{i=1}^{i=n_A} a_i q^{-i} \right) \psi(t+d) = \left(\sum_{j=0}^{j=n_B} b_j q^{-j} \right) \varphi(t) \quad (\text{II.10})$$

Sachant que $y(t)$ et $u(t)$ ne dépendent pas des indices « i » et « j » respectivement, on obtient la relation récurrente suivante

$$\psi(t+d) = - \sum_{i=1}^{i=n_A} a_i \psi(t+d-i) + \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j \varphi(t-j) \quad (\text{II.11})$$

avec les conditions initiales

$$\{y(t), t=0, \dots, (d-1) \text{ et } \varphi(0)\} \quad (\text{II.12})$$

Remarques

- Les valeurs de $y(t)$ pour $t=0, \dots, (d-1)$ sont nulles car le système avec retard pur « d » répond ($y(t) \neq 0$) à partir de l'instant $t = d$.
- On constate dans la relation (II.11), l'utilité d'anticiper la normalisation du modèle du système (division du numérateur et le dénominateur par « a_0 »), on évite cette division lors du calcul de la relation récurrente de $y(t+d)$.

Etape 3 : Formulation mathématique du problème de poursuite pour un système avec un retard pur de « d » périodes d'échantillonnage

L'objectif est de calculer $u^*(t)$ tel que

$$\left(C_{\mathcal{R}}(q^{-1}) (y(t+d) - y_{\mathcal{f}}(t+d)) \right)^{\Delta} = 0, \forall t \geq 0 \quad (\text{II.13})$$

avec $y_c(t)$ signal de consigne et $C_R(q^{-1})$ la dynamique désirée en BF donnée par

$$C_R(q^{-1}) = \sum_{k=0}^{k=n_R} c_k q^{-k} \quad (\text{II.14})$$

Le nombre de pôle en BF est « n_R » inférieur ou égale à celui en BO qui est de « n_A » avec « $c_0=1$ » alors, on écrit $C_R(q^{-1}) = 1 + \sum_{k=1}^{k=n_R} c_k q^{-k}$.

On calcule l'expression de $C_R(q^{-1})y(t+d)$, en ajoutant les termes « $\sum_{k=1}^{k=n_R} c_k y(t+d-k)$ » de part et d'autre à l'expression de $y(t+d)$, donnée par l'équation (II.11), on obtient la relation récurrente suivante

$$y(t+d) + \sum_{k=1}^{k=n_R} c_k y(t+d-k) = \sum_{k=1}^{k=n_R} c_k y(t+d-k) - \sum_{i=1}^{i=n_A} a_i y(t+d-i) + \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j u(t-j) \quad (\text{II.15})$$

L'équation (II.15) peut s'écrire sous forme polynômiale comme suit

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{k=n_R} c_k q^{-k}\right) y(t+d) = \sum_{k=1}^{k=n_R} c_k q^{-k} y(t+d) - \sum_{i=1}^{i=n_A} a_i q^{-i} y(t+d) + \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j q^{-j} u(t) \quad (\text{II.16})$$

Sachant que $n_R \leq n_A$, l'équation (II.16), s'écrit

$$C_R(q^{-1}) y(t+d) = \sum_{k=1}^{k=n_R} (c_k - a_k) q^{-k} y(t+d) - \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} a_i q^{-i} y(t+d) + \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j q^{-j} u(t) \quad (\text{II.17})$$

Soit

$$r_k = c_k - a_k, \text{ pour } k = 1, \dots, n_R \quad (\text{II.18})$$

On remplace $C_R(q^{-1})y(t+d)$ par son expression donnée par (II.17) dans (II.13) et on tenant compte de (II.18), on obtient, après calcul, l'expression de la commande numérique $u^*(t)$

$$u^*(t) = (y(t+d) + \sum_{l=1}^{l=n_R} c_l y(t+d-l) - \sum_{k=1}^{k=n_R} r_k y(t+d-k) + \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} a_i y(t+d-i) - \sum_{j=j}^{j=n_B} b_j u(t-j)) / b_0 \quad (\text{II.19})$$

avec la condition nécessaire d'existence de $u^*(t)$ donnée comme suit

$$b_0 \neq 0 \quad (\text{II.20})$$

L'expression de $u^*(t)$ sous forme polynômiale, s'écrit

$$u^*(t) = (C_R(q^{-1})y(t+d) - R(q^{-1})y(t+d) + A(q^{-1})y(t+d) - B(q^{-1})u(t)) / b_0 \quad (\text{II.21})$$

avec,

$$C_R(q^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{l=n_R} c_l q^{-l}, R(q^{-1}) = \sum_{k=1}^{k=n_R} r_k q^{-k}, A(q^{-1}) = \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} a_i q^{-i}, B(q^{-1}) = \sum_{j=1}^{j=n_B} b_j q^{-j} \quad (\text{II.22})$$

Remarques

- Les polynômes : $A^*(q^{-1})$ est une partie du dénominateur $A(q^{-1})$ du système et $B^*(q^{-1})$ et le numérateur $B(q^{-1})$ du système sans le terme b_0 .
- Dans le cas où le nombre de pôles en BF est choisi égal à celui en BO ($n_R = n_A$) alors, le terme « $A^*(q^{-1})y(t+d)$ » dans l'expression de $u^*(t)$ est *nulle*.

Le schéma de commande numérique pour un système linéaire avec retard, pour un problème de poursuite est donné par la figure II.10 :

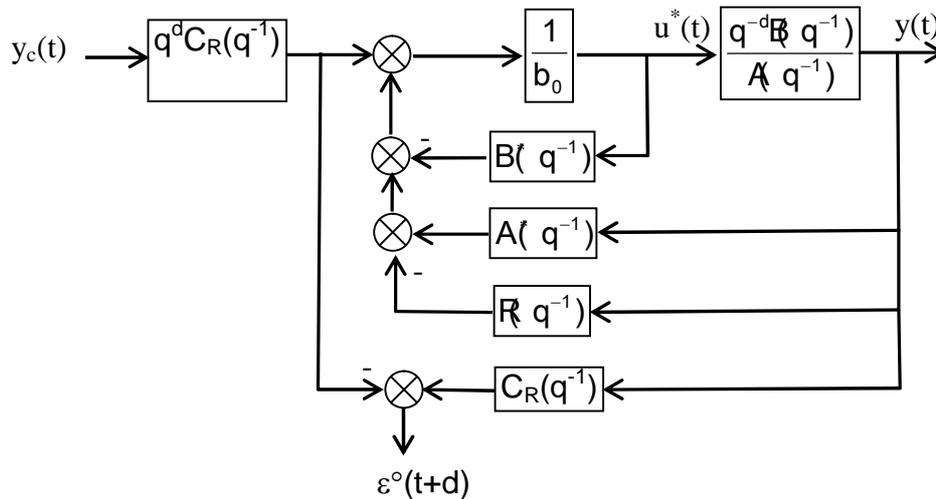


Figure II.10 : Schéma d'un système de commande numérique.

II.5.3) Calcul d'une commande conventionnelle numérique en utilisant un critère quadratique

L'équation du régulateur (II.21) peut s'écrire sous la forme

$$C_R(q^{-1})y_c(t+d) = \theta^T \phi(t) \quad (\text{II.23})$$

où θ le vecteur des paramètres (constants) du régulateur, définit par :

$$\theta^T = [b_0, b_1, \dots, b_{n_B}, r_1, r_2, \dots, r_{n_R}, a_{n_R+1}, a_{n_R+2}, \dots, a_{n_A}] \quad (\text{II.24})$$

et $\phi(t)$ est le vecteur des mesures de dimension « $n_A + n_B + 1$ », définit par :

$$\phi(t) = [u^f(t), u^f(t-1), \dots, u^f(t-n_B), y^f(t+d-1), y^f(t+d-2), \dots, y^f(t+d-n_R), -y^f(t+d-n_R-1), -y^f(t+d-n_R-2), \dots, -y^f(t+d-n_A)]^T \quad (\text{II.25})$$

L'objectif de commande définit par l'équation (II.13) est équivalent à celui : Calculer $u(t)$ tel que le critère quadratique de l'erreur de performance $\varepsilon^o(t)$ soit minimisée, c'est-à-dire

$$J(t+d) = \frac{1}{2} (\varepsilon^o(t+d))^2 = \frac{1}{2} [C_R(q^{-1})(y^f(t+d)) - y^f(t+d)]^2 \quad (\text{II.26})$$

En utilisant les équation (II.17) et (II.18) le critère s'écrit

$$J(t+d) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{k=n_R} r_k y(t+d-k) - \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} a_i y(t+d-i) + b_0 u(t) + \sum_{j=1}^{j=n_B} b_j u(t-j) - C_R(q^{-1}) y(t+d) \right]^2 \quad (\text{II.27})$$

On minimise le critère afin d'obtenir la valeur de la commande $u^*(t)$, c'est-à-dire

$$\left. \frac{\partial J(t+d)}{\partial u(t)} \right|_{u(t)=u^*(t)} = 0 \quad (\text{II.28})$$

Des équations (II.27) et (II.28) on obtient

$$\frac{\partial J(t+d)}{\partial u(t)} = b_0 \left[\sum_{k=1}^{k=n_R} r_k y(t+d-k) - \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} a_i y(t+d-i) + b_0 u(t) + \sum_{j=1}^{j=n_B} b_j u(t-j) - C_R(q^{-1}) y(t+d) \right] \quad (\text{II.29})$$

La condition nécessaire pour l'existence de la commande numérique est que la condition (II.20) soit vérifiée.

On obtient après calcul l'expression de $u^*(t)$ donnée par (II.21).

Exedmple : Calcul d'une commande numérique

Soit un système linéaire, ou sa sortie $y(t)$ est donnée par le modèle échantillonné suivant : $(0.63-0.16q^{-1}+q^{-2})y(t) = 0.58q^{-1}(-0.65+q^{-1})u(t)$, avec $u(t)$ l'entrée du système.

Les conditions initiales sont : $u(0) = 0.25$; $y(0) = 0.75$.

L'objectif est de calculer une commande numérique $U^*(t)$ qui force la sortie $y(t)$ du système à suivre celle du modèle de référence $y_M(t)$, avec une dynamique désirée :

$$C_R(q^{-1}) = (q^{-1}-0.75)(q^{-1}-0.35).$$

Le modèle de référence est : $(-1+4q^{-1})y_M(t+1)=u_M(t)$, avec $y_M(0)=0.35$ et $u_M(t)$ échelon unité

Indications :

La précision de calcul adoptée dans l'exemple est de 10^2 (deux chiffres après la virgule).

Le retard pûr est $d=1$.

La relation récurrente de la sortie $y(t)$ du système est :

$$y(t+1)=0.25y(t)-1.59y(t-1)-0.6u(t)+0.92u(t-1), \text{ avec } u(0) = 0.25 \text{ et } y(0) = 0.75.$$

La relation récurrente de la sortie $y_M(t)$ du modèle de référence est :

$$y_M(t+1)=4y_M(t)-u_M(t), \text{ avec } y_M(0)=0.35 \text{ et } u_M(t)=1 \quad \forall t \geq 0$$

Le polynôme de la dynamique désiré est : $C_R(q^{-1}) = 1-2.36q^{-1}+2.14q^{-2}$

L'expression de la commande numérique sous forme polynomiale (donnée par les relations II.21 et II.22) est :

$$u^*(t) = (C_R(q^{-1})y_M(t+d) - R(q^{-1})y(t+d) + A^*(q^{-1})y(t+d) - B^*(q^{-1})u^*(t)) / b_0$$

Le numérateur de la fonction de transfert du système est : $B(q^{-1}) = -0.6+0.92 q^{-1}$

Le dénominateur est : $A(q^{-1}) = 1+0.25q^{-1} + 1.59q^{-2}$

avec, $R(q^{-1})=r_1 q^{-1} + r_2 q^{-2}$, $r_1 = c_1-a_1 = -2.61$, $r_2 = c_2-a_2 = 0.55$.

L'ordre des polynômes $C_R(q^{-1})$ et $A(q^{-1})$ est le même, égale à 2, donc $A^*(q^{-1})=0$

On a $B^*(q^{-1}) = b_1 q^{-1} = 0.92 q^{-1}$, $b_0 = -0.6$

Donc, l'expression de la commande numérique est :

$$u^*(t) = -y_M(t+1) + 3.93 y_M(t) - 3.57 y_M(t-1) - 4.35 y(t) + 0.92 y(t-1) + 1.53 U^*(t-1)$$

II.6) Synthèse des lois de commande adaptative

Nous considérons dans ce paragraphe les systèmes à paramètres variables ou inconnus alors, on synthétise des lois de commande adaptative : directe avec MRAC et indirecte STC.

II.6.1) Calcul de la commandes adaptative directe avec modèle de référence

On considère un système linéaire à paramètres variables, représenté par la fonction de transfert avec retard pur « d », défini par la fonction de transfert suivante

$$F_{\xi}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}B_{\xi}(q^{-1})}{A_{\xi}(q^{-1})} = \frac{\psi(t)}{\xi(t)} \quad (\text{II.30})$$

avec, $A_{\xi}(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{i=n_A} a_i(t)q^{-i}$, $B_{\xi}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j(t)q^{-j}$, $n_A > n_B$ condition de causalité, $d \in \mathbb{N}$,

$a_i(t)$ et $b_j(t)$ sont les paramètres variables réels du système.

avec la condition nécessaire suivante pour le calcul de la commande

$$b_0(t) \neq 0, \forall t \geq 0 \quad (\text{II.31})$$

II.6.1.1) Formulation du problème et calcul de $u_{\text{MRAC}}(t)$

On dispose d'un système défini par la fonction de transfert donnée par la relation (II.30). On veut imposer à la sortie $y(t)$ du système de suivre la sortie « $y_M(t)$ » du modèle de référence $F_M(q^{-1}) = N(q^{-1})/D(q^{-1})$, d'entrée $u_M(t)$. La dynamique du système en boucle fermée est défini par le polynôme stable et connu $C_R(q^{-1})$ à « n_R » pôles stables avec la condition $n_R \leq n_A$.

La formulation mathématique du problème est comme suit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\varepsilon(t+d)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (C_R(q^{-1})(\psi(t+d) - y_M(t+d))) = 0 \quad (\text{II.32})$$

L'expression (II.32) signifie que l'erreur de performance converge asymptotiquement.

La relation récurrente de la sortie $y(t)$ du système est obtenue de la même manière que le cas de commande numérique. Elle donnée par la relation

$$\psi(t+d) = - \sum_{i=1}^{i=n_A} a_i(t)\psi(t+d-i) + \sum_{j=0}^{j=n_B} b_j(t)\psi(t-j) \quad (\text{II.33})$$

avec les conditions initiales des mesures

$$\{y(d) \text{ et } \psi(0)\} \quad (\text{II.34})$$

et les conditions initiales des paramètres du système :

$$\hat{\theta}(0) = [b_0(0), b_1(0), \dots, b_{n_B}(0), a_1(0), a_2(0), \dots, a_{n_A}(0)] \quad (\text{II.35})$$

Remarque

La valeur initiale $y(d)$ peut être calculée à partir des autres conditions initiales.

En suivant les mêmes étapes de calcul de la commande numérique, on obtient l'expression suivante de la commande adaptative avec modèle de référence

$$u_{\text{MRAC}}(t) = (y_M(t+d) + \sum_{l=1}^{n_R} c_l y(t+d-l) - \sum_{k=1}^{n_R} r_k(t) \psi(t+d-k) + \sum_{i=n_R+1}^{n_A} a_i(t) \psi(t+d-i)) / b(t) - \left(\sum_{j=1}^{n_B} b_j(t) u_{\text{MRAC}}(t-j) \right) / b(t) \quad (\text{II.36})$$

L'expression de $u_{\text{MRAC}}(t)$ sous forme polynômiale, s'écrit

$$u_{\text{MRAC}}(t) = (C_R(q^{-1})y_M(t+d) - R(q^{-1})\psi(t+d) + A_S(q^{-1})\psi(t+d) - B_S(q^{-1})u_{\text{MRAC}}(t)) / b(t) \quad (\text{II.37})$$

avec,

$$C_R(q^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{n_R} c_l q^{-l}, \quad R(q^{-1}) = \sum_{k=1}^{n_R} r_k(t) q^{-k}, \quad A_S(q^{-1}) = \sum_{i=n_R+1}^{n_A} a_i(t) q^{-i}, \quad B_S(q^{-1}) = \sum_{j=1}^{n_B} b_j(t) q^{-j} \quad (\text{II.38})$$

avec

$$r_k(t) = c_k - a_k(t), \quad \text{pour } k = 1, \dots, n_R \quad (\text{II.39})$$

Le vecteur des paramètres ajustables du régulateur (estimés à chaque instant) est donné par la relation

$$\hat{\theta}(t) = [b(t), b(t), \dots, b_{n_B}(t), r_1(t), r_1(t), \dots, r_{n_R}(t), a_{n_R+1}(t), a_{n_R+1}(t), \dots, a_{n_A}(t)] \quad (\text{II.40})$$

En respectant l'ordre des composantes du vecteur des paramètres, le vecteur des mesures est

$$\phi(t) = [u_{\text{MRAC}}(t), u_{\text{MRAC}}(t-1), \dots, u_{\text{MRAC}}(t-n_B), \psi(t+d-1), \psi(t+d-2), \dots, \psi(t+d-n_R), -\psi(t+d-n_R-1), -\psi(t+d-n_R-2), \dots, -\psi(t+d-n_A)]^T \quad (\text{II.41})$$

II.6.1.2) Algorithme récursif du « gradient »

L'étape suivante dans la synthèse de commande adaptative avec modèle de référence est la détermination d'un algorithme d'adaptation récursif du vecteur des paramètres $\hat{\theta}(t)$ du régulateur ajustable. C'est un algorithme de mise en œuvre en temps réel.

La structure des algorithmes récursifs est de la forme

$$\left[\begin{array}{c} \text{Estimé des paramètres} \\ \text{à l'instant « t+1 »} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Estimé des paramètres} \\ \text{à l'instant « t »} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Correction de l'estimé} \\ \text{à l'instant « t+1 »} \end{array} \right]$$

L'algorithme est donné par la relation

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) \quad (\text{II.42})$$

La valeur des paramètres estimés à « t+1 » dépend : de ceux estimés à « t » ; des mesure à « t » et de l'erreur de performance à « t+1 » qui est fonction de $\hat{\theta}(t)$ par l'intermédiaire de $u_{\text{MRAC}}(t)$. On écrit alors

$$\hat{\theta}(t+1) = f(\hat{\theta}(t), \phi(t), \varepsilon(t+1)) \quad (\text{II.43})$$

L'objectif de l'algorithme d'adaptation paramétrique est d'estimer à chaque instant les paramètres du régulateur ajustable, ceci est vérifié si après un régime transitoire acceptable le terme de correction s'annule. La différence entre les algorithmes récursif, est dans la manière de calculer le terme de correction. Dans notre étude on a choisi l'algorithme récursif du type « gradient » alors, $\Delta\hat{\theta}(t+1)$ est égale à l'inverse (signe « - ») du gradient d'un critère quadratique de l'erreur de performance (par rapport au vecteur des paramètres estimés)

$$J(t+d) = \frac{1}{2}(\varepsilon(t+d))^2 = \frac{1}{2}[C_R(q^{-1})Y(t+d) - y_M(t+d)]^2 \quad (\text{II.44})$$

L'équation du régulateur (II.36) peut s'écrire sous la forme

$$C_R(q^{-1})y_M(t+d) = \hat{\theta}^T(t)\phi(t) \quad (\text{II.45})$$

avec $\hat{\theta}(t)$ et $\phi(t)$ sont donnés respectivement par les relations (II.40) et (II.41).

On remplace (II.45) dans (II.44), on obtient

$$J(t+d) = \frac{1}{2}[C_R(q^{-1})Y(t+d) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t)]^2 \quad (\text{II.46})$$

L'expression du terme de correction de l'algorithme s'écrit

$$\Delta\hat{\theta}(t+1) = -F \frac{\partial J(t+d)}{\partial \hat{\theta}(t)} \quad (\text{II.47})$$

Après calcul, on obtient la relation suivante

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\theta}(t+1) &= -F \frac{\partial}{\partial \varepsilon^\circ(t+d)} \left(\frac{1}{2}(\varepsilon^\circ(t+d))^2 \right) \frac{\partial}{\partial \hat{\theta}(t)} (C_R(q^{-1})Y(t+d) - \hat{\theta}^T(t)\phi(t)) \\ &= F\phi(t)\varepsilon^\circ(t+d) \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

avec F la matrice des « gains d'adaptation » qui module la longueur du pas de correction.

En remplaçant le résultat donné par (II.48) dans (II.42), l'algorithme d'adaptation paramétrique s'écrit

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + F\phi(t)\varepsilon(t+d) \quad (\text{II.49})$$

II.6.1.3) Choix de la matrice F des gains d'adaptation

La condition nécessaire sur le choix de « F » est qu'elle soit *définie positive*.

-Un choix particulier et simple est donné par l'expression suivante

$$F = \alpha I_{n_A+n_B+1}, \text{ avec } 1 \gg \alpha > 0 \quad (\text{II.50})$$

avec $I_{n_A+n_B+1}$ matrice identité de dimension « n_A+n_B+1 » et α réel positif très petit.

- Un choix moins restreint est que les valeurs propres de F soient très faibles.

II.6.1.4) Interprétation géométrique de l'algorithme du gradient

Une interprétation géométrique de l'algorithme du gradient est donnée par la figure II.11. L'algorithme est dit convergeant si au régime établi (après un nombre de pas de calcul acceptable) le terme de correction tend vers zéro. Ce qui montre que le système est stable

mais aussi fonctionne correctement. Dans la cas contraire, soit l'algorithme diverge ou le système présente des défauts.

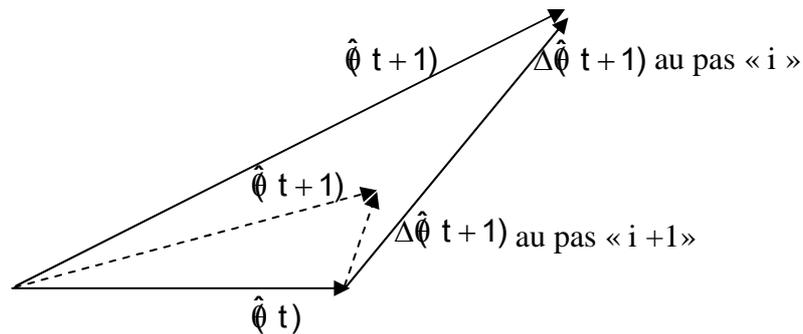


Figure II.11 : Interprétation géométrique de l'algorithme du gradient.

II.6.1.5) Algorithme récursif du gradient normalisé

Afin de choisir la matrice F des gains d'adaptation avec seulement la seule contrainte qu'elle soit définie positive est de normaliser l'algorithme récursif du type gradient. Cette normalisation consiste à diviser le terme de correction, en réalité la matrice F, par le scalaire positif qui dépend des mesures et de la matrice F. Donc on écrit

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{F}{1 + \phi^T(t)F\phi(t)} \phi(t)\epsilon(t+d) \tag{II.51}$$

avec F matrice définie positive.

La normalisation assure une meilleure stabilité du système de commande adaptative et en particulier une meilleure convergence de l'algorithme récursif.

Exemple : Calcul d'une commande adaptative directe avec modèle de référence

On considère un système discret à paramètres variables dont son modèle est donné par la relation suivante :

$$y(t) = q^{-3}(b_0(t)u(t) + b_1(t)u(t-1)) - a_1(t)y(t-1) - a_2(t)y(t-2), \text{ avec } u(0)=0.4$$

Les mesures de la sortie du système sont données par le tableau suivant :

t[s]	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	...
y(t)	0.15	0.817	0.988	1.48	1.76	1.8	1.812	...

Les mesures de la sorties du modèle de référence sont tabulées comme suit :

t[s]	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2	2.4	...
y _M (t)	0.235	0.478	0.88	0.948	1.6	1.98	1.899	...

L'objectif est de formuler l'algorithme de commande adaptative directe puis de l'exécuter sur deux pas, sachant que les pôles du système en boucle fermée sont « 0.8+0.8j » et « 0.8-0.8j ». On utilise l'algorithme d'adaptation du gradient normalisé avec une matrice des gains d'adaptations de 0.2I₄. Le vecteur des paramètres du régulateur à l'instant initial est : $\theta_R(0) = [b_0(0) \ b_1(0) \ r_1(0) \ r_2(0)]^T = [0.6 \ 0 \ 0.4 \ 0]^T$

Indications :

- Le polynôme normalisé de la dynamique désirée est : $C_r(q^{-1}) = 1 - 1.25q^{-1} + 0.781q^{-2}$
- $n_A = n_R = 2$, donc le polynôme $A^*(q^{-1}) = 0$
- La précision des calculs adoptée est de 10³ (trois chiffres après la virgule)

L'algorithme de la commande adaptative directe avec modèle de référence :

-Les conditions initiales :

$$y_M(0)=0.235 ; y_M(1)=0.478 ; y_M(2)=0.88 ; u(0)=0.4 ; y(0)=0.15 ; y(1)=0.817 ; y(2)=0.988 ; \\ \phi(0) = [0.4 \ 0 \ 0.988 \ 0.817]^T ; \theta_R(0) = [0.6 \ 0 \ 0.4 \ 0]^T$$

-Les expressions des signaux et des vecteurs :

Lecture de $y_M(t)$

$$u_{MRAC}(t) = (y_M(t+3) - 1.25y_M(t+2) + 0.781y_M(t+1) - r_1(t)y(t+2) - r_2(t)y(t+1) - b_1(t)u_{MRAC}(t-1)) / b_0(t)$$

Lecture de $y(t)$ du tableau

$$\varepsilon(t+3) = (y(t+3) - y_M(t+3)) - 1.25(y(t+2) - y_M(t+2)) + 0.781(y(t+1) - y_M(t+1))$$

$$1 + \phi^T(t)F\phi(t) = 1 + 0.2(u_{MRAC}^2(t) + u_{MRAC}^2(t-1) + y^2(t+2) + y^2(t+1))$$

$$\theta_R(t+1) = [b_0(t) \ b_1(t) \ r_1(t) \ r_2(t)]^T + 0.2\varepsilon(t+3)\phi(t) / (1 + \phi^T(t)F\phi(t))$$

-Exécution de l'algorithme sur deux pas

$t=0$: les conditions initiales

$$\varepsilon(3) = 0.662 ; 1 + \phi^T(0)F\phi(0) = 1.361 ; \theta_R(1) = [b_0(1), b_1(1), r_1(1), r_2(1)]^T = [0.639, 0, 0.496, 0.079]^T$$

$$t=1 : u_{MRAC}(1) = 0.454 ; \varepsilon(4) = 0.421 ; \phi(1) = [0.454, 0.4, 1.48, 0.988]^T ; 1 + \phi^T(1)F\phi(1) = 1.689$$

$$\theta_R(2) = [b_0(2), b_1(2), r_1(2), r_2(2)]^T = [0.622, -0.02, 0.422, 0.03]^T$$

$$t=2 : u_{MRAC}(2) = 0.05 ; \varepsilon(5) = 0.035 ; \phi(2) = [0.05, 0.454, 1.76, 1.48]^T ; 1 + \phi^T(2)F\phi(2) = 2.099$$

$$\theta_R(3) = [b_0(3), b_1(3), r_1(3), r_2(3)]^T = [0.622, -0.018, 0.428, 0.035]^T$$

-Calcul des pôles du système au deuxième pas

Les pôles du système aux 2^{ème} pas sont les racines du polynôme $(A(q^{-1}))_{t=2}$

On calcul $(A(q^{-1}))_{t=2} = 1 + a_1(3)q^{-1} + a_2(3)q^{-2} = 0$,

$$a_1(3) = c_1 - r_1(3) = 1.676 ; a_2(3) = c_2 - r_2(3) = 0.746$$

Donc, les racines du polynôme $(A(q^{-1}))_{t=2} = 1 + 1.676q^{-1} + 0.746q^{-2}$ sont : $p_{1,2} = 1.125 \pm 0.275j$

II.6.2) Calcul de la commande adaptative indirecte auto-ajustable

L'objectif de commande dans cette approche est le même que le cas du MRAC. A l'exception que la sortie du modèle de référence est remplacée par un signal de consigne. Le régulateur adaptative indirecte STC a la même structure que celui MRAC. On commande un système à paramètres inconnus. L'adaptation des paramètres du régulateur se fait en deux étapes : Estimation des paramètres du procédé puis calcul de ceux du régulateur à partir des paramètres estimés du procédé.

II.6.2.1) Estimation des paramètres du modèle du procédé

Le procédé est caractérisé par le modèle donné par la relation (II.30), où maintenant les paramètres $\{a_i(t), b_j(t)$, avec $i=1, \dots, n_A, j=0, \dots, n_B\}$ sont inconnus. Un prédicteur (estimateur) ajustable du procédé s'obtient de la relation (II.30), en remplaçant les paramètres connus (vrais), par leur estimation à l'instant « t ». Ceci nous donne

$$\hat{\mathbb{R}}(q^{-1}) = \frac{q^{-d}\hat{\mathbb{B}}(q^{-1})}{\hat{\mathbb{A}}(q^{-1})} = \frac{\hat{\mathbb{Y}}(t)}{\hat{\mathbb{U}}(t)} \quad (\text{II.52})$$

avec, $\hat{\mathbb{A}}(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{n_A} \hat{a}_i(t)q^{-i}$, $\hat{\mathbb{B}}(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{n_B} \hat{b}_j(t)q^{-j}$, $n_A > n_B$ condition de causalité, $d \in \mathbb{N}$

retard pur, $\hat{a}_i(t), \hat{b}_j(t)$ sont les paramètres variables à estimer du prédicteur.

avec la condition nécessaire suivante pour le calcul de la commande

$$\hat{b}_0(t) \neq 0, \forall t \geq 0 \quad (\text{II.53})$$

La relation récurrente de la sortie prédite à « priori » est déduite de (II.52) et on écrit

$$\hat{y}(t+d) = \hat{y}((t+d)/\hat{\theta}_p(t)) = - \sum_{i=1}^{i=n_A} \hat{a}_i(t) \psi(t+d-i) + \sum_{j=0}^{j=n_B} \hat{b}_j(t) \psi(t-j) \quad (\text{II.54})$$

sous forme vectoriel, on a

$$\hat{y}(t+d) = \hat{\theta}_p^T(t) \phi(t) \quad (\text{II.55})$$

Le vecteur des paramètres à estimer est

$$\hat{\theta}_p^T(t) = [\hat{b}_0(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_{n_B}(t), \hat{a}_1(t), \hat{a}_2(t), \dots, \hat{a}_{n_A}(t)] \quad (\text{II.56})$$

En respectant l'ordre des composantes du vecteur des paramètres, le vecteur des mesures s'écrit

$$\phi(t) = [\psi(t), \psi(t-1), \dots, \psi(t-n_B), \psi(t+d-1), \psi(t+d-2), \dots, -\psi(t+d-n_A)]^T \quad (\text{II.57})$$

Les conditions initiales des mesures sont

$$\{y(d) \text{ et } \psi(0)\} \quad (\text{II.58})$$

et les conditions initiales des paramètres du prédicteur sont

$$\hat{\theta}_p^T(0) = [\hat{b}_0(0), \hat{b}_1(0), \dots, \hat{b}_{n_B}(0), \hat{a}_1(0), \hat{a}_2(0), \dots, \hat{a}_{n_A}(0)] \quad (\text{II.59})$$

Remarque

La valeur initiale $y(d)$ peut être calculée à partir des autres conditions initiales.

L'erreur de prédiction « a priori » est défini par

$$\begin{aligned} \xi(t+d) &= y(t+d) - \hat{y}^\circ(t+d) \\ &= y(t+d) - \hat{\theta}_p^T(t) \phi(t) \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

L'estimation du vecteur $\hat{\theta}_p(t)$, des paramètres du prédicteur est obtenu avec un algorithme récursif du gradient en minimisant le critère quadratique de l'erreur de prédiction (par-rapport à $\hat{\theta}_p(t)$), défini par la relation suivante

$$\begin{aligned} J_\phi(t+d) &= \frac{1}{2} (\xi(t+d))^2 \\ &= \frac{1}{2} [(y_\phi(t+d) - \hat{y}(t+d))]^2 \\ &= \frac{1}{2} [y(t+d) - \hat{\theta}_p^T(t) \phi(t)]^2 \end{aligned} \quad (\text{II.61})$$

En suivant les mêmes étapes (équations (II.42)-(II.51)), lors de la formulation de l'algorithme d'adaptation des paramètres du régulateur MRAC, on obtient, après calcul, la relation

$$\hat{\theta}_\phi(t+1) = \hat{\theta}_\phi(t) + F\phi(t)\xi(t+d) \quad (\text{II.62})$$

L'algorithme normalisé est

$$\hat{\theta}_\zeta(t+1) = \hat{\theta}_\zeta(t) + \frac{F}{1 + \phi^T(t)F\phi(t)} \phi(t) \xi(t+d) \quad (\text{II.63})$$

Le choix de la matrice F est le même que celui de l'algorithme qui estime les paramètres du régulateur MRAC.

II.6.2.2) Calcul des estimées des paramètres du régulateur

L'expression du régulateur STC est déduite de l'équation

$$(C_R(q^{-1})(\hat{y}^\circ(t+d) - y_\zeta(t+d))) \Big|_{u(t)=u_{\text{STC}}(t)} \stackrel{\Delta}{=} 0, \forall t \geq 0 \quad (\text{II.64})$$

En suivant les mêmes étapes de calcul que dans le cas du régulateur MRAC, on obtient la structure

$$u_{\text{STC}}(t) = (y_\zeta(t+d) + \sum_{l=1}^{l=n_R} c_l y_\zeta(t+d-l) - \sum_{k=1}^{k=n_R} \hat{r}_k(t) y_\zeta(t+d-k) + \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} \hat{a}_i(t) y_\zeta(t+d-i) - \hat{b}_0(t) u_{\text{STC}}(t) - \sum_{j=1}^{j=n_B} \hat{b}_j(t) u_{\text{STC}}(t-j)) / \hat{b}_0(t) \quad (\text{II.65})$$

L'expression de $u_{\text{STC}}(t)$ sous forme polynômiale, s'écrit

$$u_{\text{STC}}(t) = (C_R(q^{-1})y_\zeta(t+d) - \hat{R}(q^{-1})y_\zeta(t+d) + \hat{A}(q^{-1})y_\zeta(t+d) - \hat{B}(q^{-1})u_{\text{STC}}(t)) / \hat{b}_0(t) \quad (\text{II.66})$$

avec

$$C_R(q^{-1}) = 1 + \sum_{l=1}^{l=n_R} c_l q^{-l}, \hat{R}(q^{-1}) = \sum_{k=1}^{k=n_R} \hat{r}_k(t) q^{-k}, \hat{A}(q^{-1}) = \sum_{i=n_R+1}^{i=n_A} \hat{a}_i(t) q^{-i}, \hat{B}(q^{-1}) = \sum_{j=1}^{j=n_B} \hat{b}_j(t) q^{-j} \quad (\text{II.67})$$

où

$$\hat{r}_k(t) = c_k - \hat{a}_k(t), \text{ pour } k = 1, \dots, n_R \quad (\text{II.68})$$

L'équation du régulateur (II.36) peut s'écrire sous la forme

$$C_R(q^{-1})y_c(t+d) = \hat{\theta}_R^T(t)\phi(t) \quad (\text{II.69})$$

Le vecteur des paramètres ajustable du régulateur STC est donnée par la relation

$$\hat{\theta}_R^T(t) = [\hat{b}_0(t), \hat{b}_1(t), \dots, \hat{b}_{n_B}(t), \hat{r}_1(t), \hat{r}_2(t), \dots, \hat{r}_{n_R}(t), \hat{a}_{n_R+1}(t), \hat{a}_{n_R+2}(t), \dots, \hat{a}_{n_A}(t)] \quad (\text{II.70})$$

En respectant l'ordre des composantes du vecteur des paramètres, le vecteur des mesures est

$$\phi(t) = [u_{\text{STC}}(t), u_{\text{STC}}(t-1), \dots, u_{\text{STC}}(t-n_B), y_\zeta(t+d-1), y_\zeta(t+d-2), \dots, y_\zeta(t+d-n_R), -y_\zeta(t+d-n_R-1), -y_\zeta(t+d-n_R-2), \dots, -y_\zeta(t+d-n_A)]^T \quad (\text{II.71})$$

-Les paramètres $\{\hat{b}_j(t), \text{ pour } j = 0, \dots, n_B \text{ et } i = n_R+1, \dots, n_A\}$ sont calculés par l'algorithme d'adaptation paramétrique du prédicteur (II.62) ou (II.63).

- Les paramètres $\{r_k(t) \text{ pour } k = 1, \dots, n_R\}$ sont calculés par l'équation

$$\hat{r}_k(t) = c_k - \hat{a}_k(t) \quad , \text{ pour } k = 1, \dots, n_R \quad (\text{II.72})$$

sachant que $\{\hat{a}_k(t) \text{ pour } k = 1, \dots, n_R\}$ sont calculés à l'étape de calcul de $\hat{\theta}_p(t)$ et $\{c_k \text{ pour } k = 1, \dots, n_R\}$ sont les coefficients du polynôme $C_R(q^{-1})$.

Les conditions initiales des paramètres $\{\hat{r}_k(t) \text{ pour } k = 1, \dots, n_R\}$ sont calculés par l'équation

$$\hat{r}_k(0) = c_k - \hat{a}_k(0) \quad , \text{ pour } k = 1, \dots, n_R \quad (\text{II.73})$$

avec $\{\hat{a}_k(0) \text{ pour } k = 1, \dots, n_R\}$ sont des donnés.

L'erreur de performance $\varepsilon^\circ(t+d)$ est définie par la relation

$$\varepsilon(t+d) = (C_R(q^{-1})(\hat{y}^\circ(t+d) - y(t+d))) \quad (\text{II.74})$$

Exemple : Calcul d'une commande adaptative indirecte autoajustable

On considère un système linéaire discret à paramètres inconnus dont le modèle du prédicteur de sa sortie est donné par la fonction de transfert à paramètres inconnus :

$$\hat{y}(t/\theta_p(t)) = [q^{-1}a_1(t) \quad a_2(t) \quad b_0(t) \quad q^{-1}b_1(t)] [-y(t) \quad -y(t-2) \quad u_{STC}(t-2) \quad u_{STC}(t-2)]^T$$

Les mesures de la sortie du système sont données par le tableau suivant :

t[s]	0	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	...
y(t)	0.425	0.681	0.788	0.048	-0.076	-0.395	0.012	...

On désire calculer une commande adaptative indirecte autoajustable $u_{STC}(t)$ qui assure que la sortie $y(t)$ du système suit celle d'un modèle de référence $y_M(t)$ avec une dynamique désirée $C_R(q^{-1})$ de pôles 0.825 et -0.375.

Le modèle de référence est : $F_M(q^{-1}) = q^{-2}(q^{-1} + 0.225) / (q^{-1} + 0.432)(q^{-1} - 0.705) = y_M(t) / u_C(t)$,

avec $u_C(t) = 0.853t + 1$ signal de consigne, $y_M(0) = 0.25$, $y_M(1) = 0.551$

Les paramètres sont estimés par un algorithme d'adaptation paramétrique du gradient normalisé avec $F = 0.05I_2$.

Les conditions initiales pour la commande adaptative indirecte sont : $u_{STC}(0) = 0.672$,

$$\theta_p(0) = [a_1(0) \quad a_2(0) \quad b_0(0) \quad b_1(0)]^T = [0.446 \quad 0 \quad 0.356 \quad 0]^T$$

Indications :

La précision des calculs adoptée est de 10^3 .

C'est un problème de commande adaptative indirecte autoajustable avec modèle de référence.

L'algorithme de commande

-Les conditions initiales

$$u_C(0) = 1 ; y_M(0) = 0.25 ; y_M(1) = 0.551 ; u_{STC}(0) = 0.672 ; y(0) = 0.425 ; y(1) = 0.681 ;$$

$$\theta_p(0) = [a_1(0) \quad a_2(0) \quad b_0(0) \quad b_1(0)]^T = [0.446 \quad 0 \quad 0.356 \quad 0]^T$$

$$\theta_R(0) = [r_1(0) \quad r_2(0) \quad b_0(0) \quad b_1(0)]^T = [1.01 \quad -3.236 \quad 0.356 \quad 0]^T$$

-Les expressions des signaux

$$u_C(t) = 0.853t + 1$$

$$y_M(t+2) = -0.895 y_M(t+1) + 3.279 y_M(t) - 3.279 u_C(t-1) - 0.738 u_C(t)$$

$$u_{STC}(t) = (y_M(t+2) + 1.456 y_M(t+1) - 3.236 y_M(t) - r_1(t)y(t+1) - r_2(t)y(t) - b_1(t)u_{STC}(t-1)) / b_0(t) ; b_0(t) \neq 0 \forall t \geq 0$$

Lecture de $y(t)$ du tableau

$$\phi(t) = [-y(t+1) \quad -y(t) \quad u_{STC}(t) \quad u_{STC}(t-1)]^T$$

$$\begin{aligned} \theta_p(t) &= [a_1(t) \quad a_2(t) \quad b_0(t) \quad b_1(t)]^T \\ \hat{y}(t+2) &= \theta_p^T(t)\phi(t) \\ \hat{\varepsilon}(t+2) &= y(t+2) - \hat{y}(t+2), \text{ erreur de pr\u00e9diction} \\ \varepsilon(t+2) &= (y(t+2) - y_M(t+2)) + 1.456(y(t+1) - y_M(t+1)) - 3.236(y(t) - y_M(t)), \text{ erreur de performance} \\ 1 + \phi^T(t)F\phi(t) &= 1 + 0.005(y^2(t+1) + y^2(t) + u_{STC}^2(t) + u_{STC}^2(t-1)) \\ \Delta\theta_p(t+1) &= 0.005\hat{\varepsilon}(t+2)\phi(t)/(1 + \phi^T(t)F\phi(t)) \\ \theta_p(t+1) &= \theta_p(t) + \Delta\theta_p(t+1) \\ r_1(t) &= 1.456 - a_1(t); \quad r_2(t) = -3.236 - a_2(t) \\ \theta_R(t) &= [r_1(t) \quad r_2(t) \quad b_0(t) \quad b_1(t)]^T \end{aligned}$$

- Ex\u00e9cution de l'algorithme de commande sur deux pas

$$\begin{aligned} t=0 : \text{ les conditions initiales ; } y_M(2) &= -0.411 ; y(2) = \hat{y}(2) = -0.064 ; \varepsilon(2) = 0.03 ; \\ \hat{\varepsilon}(2) &= 0 ; 1 + \phi^T(0)F\phi(0) = 1.05 ; \theta_p(1) &= [0.446, 0, 0.356, 0]^T ; \theta_R(1) &= [0.685, 0, 0.125, 0]^T \\ t=1 : u_{STC}(1) &= 1.426 ; y_M(3) &= -2.157 ; u_{STC}(1) &= -6.376 ; \varepsilon(3) &= -3.029 ; \hat{y}(3) &= -2.241 ; \hat{\varepsilon}(3) &= 3.029 ; \\ 1 + \phi^T(1)F\phi(1) &= 3.079 ; \theta_p(2) &= [0.446, -0.001, 0.341, 0.001]^T ; \theta_R(2) &= [1.01, -0.235, 0.341, 0.001]^T \\ t=2 : u_{STC}(2) &= 1.853 ; y_M(4) &= -5.464 ; u_{STC}(2) &= -24.21 ; \varepsilon(4) &= -8.677 ; \hat{y}(4) &= -8.677 ; \hat{\varepsilon}(4) &= 8.677 ; \\ 1 + \phi^T(1)F\phi(1) &= 32.369 ; \theta_p(3) &= [0.436, -0.001, 0.017, -0.684]^T ; \theta_R(3) &= [1.021, -3.236, 0.017, -0.684]^T \end{aligned}$$

II.6.3) Calcul de la commande adaptative auto-ajustable avec reparam\u00e9trisation du pr\u00e9dicteur

Le principe est d'\u00e9liminer l'\u00e9tape dans la synth\u00e8se de la commande adaptative indirecte auto-ajustable en faisant appara\u00eetre les param\u00e8tres $\{\hat{r}_k(t)\}$ pour $k = 1, \dots, n_R$ dans l'\u00e9quation du pr\u00e9dicteur.

On d\u00e9duit de la relation (II.72)

$$\hat{a}_k(t) = c_k - \hat{r}_k(t), \text{ pour } k = 1, \dots, n_R \quad (\text{II.75})$$

En rempla\u00e7ant (II.75) dans (II.54), on obtient l'expression

$$\hat{y}(t+d) = - \sum_{k=1}^{n_R} c_k \psi(t+d-k) + \sum_{i=1}^{n_R} \hat{r}_i(t) \psi(t+d-i) - \sum_{i=n_R+1}^{n_A} \hat{a}_i(t) \psi(t+d-i) + \sum_{j=0}^{n_B} \hat{b}_j(t) \psi(t-j) \quad (\text{II.76})$$

Puisque la commande STC se base sur le principe d'\u00e9quivalence certain (les sorties pr\u00e9c\u00e9dentes pr\u00e9dites sont \u00e9quivalentes aux sorties r\u00e9elles du syst\u00e8me), on peut \u00e9crire

$$\underbrace{1 + \sum_{k=1}^{n_R} c_k q^{-k}}_{C_R(q^{-1})} \hat{y}(t+d) = \sum_{i=1}^{n_R} \hat{r}_i(t) \psi(t+d-i) - \sum_{i=n_R+1}^{n_A} \hat{a}_i(t) \psi(t+d-i) + \sum_{j=0}^{n_B} \hat{b}_j(t) \psi(t-j) \quad (\text{II.77})$$

On peut \u00e9crire (II.77) sous forme vectorielle

$$C_R(q^{-1}) \hat{y}^\circ(t+d) = \hat{\theta}_R^T(t) \phi(t) \quad (\text{II.78})$$

La relation (II.78) corespond \u00e0 la sortie filtr\u00e9e du pr\u00e9dicteur par le polyn\u00f4me stable $C_R(q^{-1})$ et elle est exprim\u00e9e en fonction du vecteur $\hat{\theta}_R(t)$ des param\u00e8tres du r\u00e9gulateur.

L'erreur de pr\u00e9diction est d\u00e9finie par l'expression

$$\begin{aligned} \xi(t+d) &= (C_R(q^{-1})(y(t+d) - \hat{y}(t+d))) \\ &= C_R(q^{-1})y(t+d) - \hat{\theta}_R^T(t)\phi(t) \end{aligned} \quad (\text{II.79})$$

En utilisant l'algorithme d'adaptation paramétrique (II.62) ou (II.63) qui minimise le critère quadratique de la nouvelle erreur de prédiction (II.79), on obtient directement le vecteur $\hat{\theta}_R(t)$ des paramètres du régulateur. La structure de $u_{STC}(t)$ est donnée par la relation (II.65).

II.7) Conclusion

La commande adaptative apporte une solution à la commande des systèmes à paramètres variables ou inconnus. En général, dans le premier cas, on utilise la commande directe et dans le deuxième cas la commande indirecte. Cette commande peut être utilisée pour la diagnostique des défauts, en ajoutant un algorithme qui exprime les paramètres physiques du système, en fonction de ceux du modèle utilisé et on complète aussi avec un algorithme qui compare la valeur des paramètres entre les instants de calcul. Si pendant une longue période les paramètres varient d'une manière incohérente, on peut diagnostiquer le défaut.

On peut aussi utiliser des algorithmes d'adaptation paramétrique du type moindres carrés récursifs simples ou étendue pour comparer les performances avec celui du gradient, ou si ce dernier présente des performances insuffisantes.

Chapitre III :

Commande optimale

Les problèmes de commande optimale se rencontrent dans la vie courante : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment minimiser sa consommation... Pour un système dynamique quelconque et dont le modèle est connu, le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande minimisant un critère donné et à vérifier un ensemble de contraintes. C'est sous cette forme que la commande optimale a été étudiée dès le XIX^{ème} siècle avec le calcul des variations. Une des grandes applications de la commande optimale a été l'application au *lanceur Apollo* dans les années 1960. Les difficultés soulevées par ce genre de problème sont loin d'être complètement résolues comme en témoignent les sessions dédiées à la commande optimale dans les conférences d'automatique. La commande optimale reste donc un sujet de recherche d'actualité. On s'intéresse dans une première partie à la commande optimale telle qu'elle a été posée initialement et dans le cas des systèmes les plus généraux (non linéaires et non stationnaires). Dans une seconde partie, on traite plus particulièrement les systèmes linéaires non stationnaires (retour d'état dynamique) et stationnaires (retour d'état statique) dans le cas d'un critère quadratique, cas connu sous le nom de commande linéaire quadratique (LQ).

III.1) Formulation du problème de commande

Afin de monter la différence entre la commande optimale et une commande non optimale, nous formulons le problème de commande dans les deux cas et on se fixe sur les exigences du cas optimal.

On considère un système dynamique continu, dont le comportement est décrit par le modèle d'état suivant

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad (\text{III.1})$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \quad (\text{III.2})$$

avec

$$X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathcal{R}^n$$

$$U(t) = [u_1(t), \dots, u_r(t)]^T \in \mathcal{R}^r$$

$$Y(t) = [y_1(t), \dots, y_m(t)]^T \in \mathcal{R}^m$$

$$f(\cdot) = [f_1(\cdot), \dots, f_n(\cdot)]^T \in \mathcal{R}^n$$

$$g(\cdot) = [g_1(\cdot), \dots, g_m(\cdot)]^T \in \mathcal{R}^m$$

On suppose qu'elles existent des contraintes sur les variables d'états, les commandes, les sorties et le temps tel que

$$X(t) \in X_{ad} \subset \mathcal{R}^n \quad (\text{III.3})$$

$$U(t) \in U_{ad} \subset \mathcal{R}^r \quad (\text{III.4})$$

$$Y(t) \in Y_{ad} \subset \mathcal{R}^m \quad (\text{III.5})$$

$$t \in T_{ad} \subset \mathcal{R}^+ \quad (\text{III.6})$$

Ces contraintes correspondent à des propriétés physiques du système réel.

On suppose que dans l'ensemble admissible décrit par

$$X_{ad} \times U_{ad} \times Y_{ad} \times T_{ad}$$

- Les fonctions « $f_i(\cdot)$ pour $i=1, \dots, n$ » sont continues et admettent des dérivées partielles continues par-rapport aux différentes composantes variables des vecteurs $U(t)$, $X(t)$ et t .
- Le système d'équation (III.1) admet une solution unique pour tout vecteur d'état initial $X_0 \in X_{ad}$ et tout vecteur de commande $U(t) \in U_{ad}$.

III.1.1) Commande non optimale

La formulation le problème de commande non optimale est

On veut déterminer un vecteur de commande $U(t)$ satisfaisant la contrainte (III.4) qui transfère le vecteur d'état du système (III.1), d'une valeur initiale $X_0 \in X_{ad}$ (à l'instant « t_0 ») à une valeur finale $X_f \in X_b$ (ensemble objectif) à l'instant « t_f », en satisfaisant la contrainte (III.3) $\forall t \in [t_0, t_f]$.

De cette formulation générale du problème de commande, on peut distinguer plusieurs cas particuliers en fonction des hypothèses concernant les ensembles X_{ad} , U_{ad} , les états X_0 , X_f et les instants t_0 , t_f .

III.1.2) Commande optimale

Le nombre de commandes possibles qui répondent à notre problème, malgré les contraintes imposées reste (infini) très important.

Notre objectif est de chercher parmi toutes les commandes possibles la solution optimale qui répond à d'autres exigences, qui peuvent être formulées dans un critère d'optimisation dont l'extrémum détermine la solution optimale.

Dans de nombreux problèmes de commande optimale le critère est

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{S}(X(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t) dt \quad (III.7)$$

où « L » et « S » sont des fonctions scalaires.

- $S(X(t_f), t_f)$: représente le coût sur le vecteur d'état final $X(t_f)$ par-rapport à sa valeur désirée X_f .

- $L(X(t), U(t), t)$: est évaluée le long de la trajectoire $X(t)$, obtenue dans l'espace d'état pour $t \in [t_0, t_f]$, (on le définit dans la suite du cours comme le *Lagrangien*).

En tenant compte sur le choix du critère d'optimisation, la formulation du problème général de commande optimale est

On veut déterminer le vecteur de commande $U^*(t)$ satisfaisant la contrainte (III.4) qui transfère le vecteur d'état du système (III.1) d'une valeur initiale $X_0 \in X_{ad}$ (à l'instant « t_0 ») à une valeur finale $X_f \in X_b$ (ensemble objectif) à l'instant « t_f », **en minimisant le critère d'optimisation (III.7)** et en satisfaisant la contrainte (III.3) $\forall t \in [t_0, t_f]$.

III.1.3) Classement des problèmes de commande optimale

Il existe de nombreuses variantes du problème de commande optimale, correspondant à différents

- Critère d'optimisation,
- Conditions aux limites (conditions initiales et finales),
- Contraintes.

III.1.3.1) Classement selon le choix du critère d'optimisation

Il existe trois types de problèmes selon le choix du critère et si on se réfère à la théorie de calcul des variations, on a

Premier cas : Problème de Bolza

C'est un problème général car le critère contient deux termes où il tient compte de tous les régimes de fonctionnement (transitoire et final) et il est donné par la relation (III.7).

Deuxième cas : Problème de Lagrange

$$\mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t) dt \quad (III.8)$$

Il ne tient pas compte de l'écart final.

Troisième cas : Problème de Mayer

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{F}(X(t_f), t_f) \quad (III.9)$$

Ce cas correspond au problème de la détermination d'une commande terminale (on cherche seulement à minimiser l'écart final sur l'état et le temps désirés).

La formulation générale (III.7) du critère d'optimisation est conçue selon les propriétés physiques du système considéré et l'objectif du problème d'optimisation. On peut considérer la minimisation de

- La consommation du combustible,
- L'horizon temporel 't_f-t₀',
- L'écart en régime transitoire et en régime établi,
- L'énergie fournie par la mise en œuvre de la commande.

III.1.3.2) Principe de calcul des conditions aux limites

Dans le cas réel les conditions aux limites sont déterminées comme suit

- Les conditions initiales t₀ et X₀ sont fixées et connues ;
- Les conditions finales t_f et X_f sont établies en fonction du but qu'on veut atteindre.

III.1.4) Formulation du critère d'optimisation à partir des sorties du système

Dans le cas où les variables d'état d'un système ne sont accessibles qu'à travers ces variables de sorties où elles sont des fonctions abstraites dépourvues de tous sens physique alors, le critère d'optimisation est formulé par-rapport aux sorties du système et il est donné par la relation suivante

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{F}(Y(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} N(Y(t), U(t), t) dt \quad (III.10)$$

La formulation du problème de commande optimale par-rapport à la sortie est

On veut déterminer le vecteur de commande $U^*(t)$ satisfaisant la contrainte (III.4) qui transfère le vecteur de sortie du système (III.1) d'une valeur initiale $Y_0 \in Y_{ad}$ (à l'instant « t₀ ») à une valeur finale $Y_f \in Y_b$ (ensemble objectif) à l'instant « t_f », **en minimisant le critère d'optimisation (III.10)** et en satisfaisant la contrainte (III.5) $\forall t \in [t_0, t_f]$.

III.1.5) Méthode de calcul de la commande optimale

Le problème de l'existence et de la nature de la solution optimale, dépendent fortement de la présence et du type des contraintes liées au système commandé.

Le choix de la méthode d'optimisation dépend du type des contraintes. Il existe trois cas possibles :

Premier cas

Si on peut ne pas tenir compte des contraintes, c'est-à-dire, on sait à priori que la solution optimale est située à l'intérieur de l'ensemble : $U_{ad} \times X_{ad}$, $\forall t \in [t_0, t_f]$. On peut écrire

$$U(t) \in U_{ad}, \forall t \in [t_0, t_f] \quad (III.11)$$

$$X(t) \in X_{ad}, \forall t \in [t_0, t_f] \quad (III.12)$$

On utilise les méthodes classiques de calcul des variations pour le calcul de la solution.

Deuxième cas

Si seulement la condition (III.12) est satisfaite, il faut alors utiliser la méthode de Pontryaguin.

Troisième cas

Si aucune des conditions (III.11) et (III.12) n'est satisfaite, on utilise les méthodes de minimisation de fonctionnelle dans l'ensemble $U_{ad} \times X_{ad} \times T_{ad}$ (programmation dynamique 'Richard Bellman').

III.2) Commande optimale des systèmes en absence des contraintes d'inégalité sur le vecteur d'état et le vecteur de commande

On suppose qu'il n'existe pas de contraintes sur le vecteur d'état et sur le vecteur de commande, on admet ainsi que

$$X_{ad} = \mathfrak{R}^n \quad (III.13)$$

$$U_{ad} = \mathfrak{R}^r \quad (III.14)$$

Dans ce cas les contraintes existent réellement mais la solution optimale obtenue vérifie à tout instant les conditions (III.11) et (III.12). Donc en pratique, la méthode consiste à résoudre le problème d'optimisation sans considérer les contraintes d'inégalités, puis à vérifier que la solution obtenue est compatible avec ces contraintes.

III.2.1) Commande optimale d'un système non linéaire et non stationnaire

Soit le système décrit par le modèle d'état suivant

$$\dot{X}(t) = f(X(t), U(t), t) \quad (III.15)$$

$$Y(t) = g(X(t), U(t), t) \quad (III.16)$$

On suppose que les contraintes (III.11) et (III.12) sont satisfaites $\forall t \in [t_0, t_f]$ (système sans contraintes).

Le problème est de calculer le vecteur de commande optimale $U^*(t)$ tel que

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{U^*(t)} \begin{pmatrix} X_f \\ t_f \end{pmatrix} \text{ et } U^*(t) \text{ minimise le critère } \mathfrak{J} \text{ donné par (III.7).}$$

avec

- X_0 et t_0 sont fixées et connues,

- X_f et t_f peuvent être : libres ; partiellement libres ou fixes $(X_f, t_f) \in X_b \times T_{ad}$ où $X_b \subset X_{ad} = \mathcal{R}$ est l'ensemble objectif.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vraies

h₁) $S(X(t), t)$ est continue, dérivable par-rapport à $X(t)$ et « t » et admet des dérivées première et seconde continues sur $[t_0, t_f]$,

h₂) $U(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$ où les $u_i(t)$, pour $i=1, \dots, n$ sont continues, indépendantes les unes des autres et les $d^j U(t)/dt^j$ sont continues ;

h₃) $L(X(t), U(t), t)$ est continue, dérivable par-rapport à $X(t)$, $U(t)$ et t et admet des dérivées première et seconde continues sur $[t_0, t_f]$.

III.2.1.1) Transformation du problème de Bolza en un problème de Lagrange

Puisque le critère d'optimisation considéré est donné par (III.7), alors on a à résoudre un problème de Bolza, avec contraintes d'égalités, puisque la relation existante entre $X(t)$ et $U(t)$ correspond à l'équation d'état (III.15).

En faisant appel aux méthodes classiques de calcul des variations, on réduit ce problème à celui de Lagrange avec contraintes d'égalités. Compte tenu des hypothèses faites sur la fonction coût $S(X(t), t)$, on peut écrire

$$\mathfrak{S}(X, t_f, t_f) = + \int_{t_0}^{t_f} \frac{dS(X(t), t)}{dt} dt + \mathfrak{S}(X, t_0, t_0) \quad (III.17)$$

On remplace (III.17) dans (III.7), on obtient

$$\mathfrak{J} = \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t) + \frac{dS(X(t), t)}{dt} dt + \mathfrak{S}(X, t_0, t_0)$$

En utilisant les dérivées partielles, on obtient :

$$\mathfrak{J}' = \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t) + \left(\frac{\partial S(X(t), t)}{\partial X} \right)^T \dot{X}(t) + \frac{\partial S(X(t), t)}{\partial t} dt + \mathfrak{S}(X, t_0, t_0) \quad (III.18)$$

On a supposé que t_0 et X_0 sont fixées (constantes) et connues, alors $S(X(t_0), t_0)$ est constante.

La solution optimale $U^*(t)$ qui minimise (III.7), minimise donc aussi

$$\mathfrak{J}' = \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t) + \left(\frac{\partial S(X(t), t)}{\partial X} \right)^T \dot{X}(t) + \frac{\partial S(X(t), t)}{\partial t} dt \quad (III.19)$$

Donc, on obtient un problème de Lagrange qui consiste à synthétiser une commande optimale qui minimise \mathfrak{J}' donné par (III.19), sous les contraintes d'égalités (III.15), correspondant au système différentiel ordinaire de « n » équations du premier ordre.

III.2.1.2) Réduction du problème avec contrainte en un problème sans contraintes

Afin de réduire le problème avec contraintes d'égalités en un problème sans contraintes, on utilise la méthode des paramètres de Lagrange. Ces derniers sont « n » (même nombre de contraintes d'égalité) fonctions du temps ' $\lambda_i(t)$, $i=1, \dots, n$ ', formant aussi un

vecteur $\lambda(t)$ appelé vecteur adjoint (co-état), associé aux « n » équations d'état du système considéré

$$f(X(t), U(t), t) - \dot{X}(t) = 0 \quad (\text{III.20})$$

Ce vecteur de paramètres (multiplicateur de Lagrange) $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]^T$ est utilisé pour former un nouveau critère \mathfrak{J}'' qui prend en considération le critère à optimiser \mathfrak{J}' et les contraintes (III.20) et il est formulé comme suit

$$\mathfrak{J}'' = \int_{t_0}^{t_f} L(X(t), U(t), t) + \left(\frac{\partial S(X(t), t)}{\partial X} \right)^T \dot{X}(t) + \frac{\partial S(X(t), t)}{\partial t} + \lambda^T(t) (f(X(t), U(t), t) - \dot{X}(t)) dt \quad (\text{III.21})$$

L'ensemble des hypothèses formulées sur le système nous permettent d'écrire les équations d'Euler-Lagrange dont les solutions $(U^*(t), X^*(t), \lambda^*(t))$ satisfont les conditions nécessaires d'obtention d'un extrémum du critère \mathfrak{J}'' .

III.2.1.3 Calcul des équations d'Euler-Lagrange (E-L)

Soit $F(X(t), \dot{X}(t), \lambda(t), U(t), t)$ l'intégrand du critère \mathfrak{J}''

$$F(X(t), \dot{X}(t), \lambda(t), U(t), t) = L(X(t), U(t), t) + \left(\frac{\partial S(X(t), t)}{\partial X} \right)^T \dot{X}(t) + \frac{\partial S(X(t), t)}{\partial t} + \lambda^T(t) (f(X(t), U(t), t) - \dot{X}(t)) \quad (\text{III.22})$$

La première équation d'E-L est celle relative au vecteur d'état $X(t)$, elle s'écrit

$$\frac{\partial F(X(t), \dot{X}(t), \lambda(t), U(t), t)}{\partial X} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(X(t), \dot{X}(t), \lambda(t), U(t), t)}{\partial \dot{X}} \right) = 0 \quad (\text{III.23})$$

Soit $U^*(t)$ le vecteur de commande optimale correspondant au vecteur d'état optimal $X^*(t)$ et au vecteur d'état adjoint optimal $\lambda^*(t)$. On remplace $F(\cdot)$ par son expression (III.22) dans (III.23), sachant que les termes de $F(\cdot)$ indépendants de $X(t)$ s'annulent dans le premier terme de (III.23) ainsi que ceux qui sont indépendants de $\dot{X}(t)$ s'annulent dans le deuxième terme de (III.23) et on obtient après calcul

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ L(X(t), U(t), t) + \left(\frac{\partial S(X(t), t)}{\partial X} \right)^T \dot{X}(t) + \frac{\partial S(X(t), t)}{\partial t} + \lambda^T(t) (f(X(t), U(t), t) - \dot{X}(t)) \right\}_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S(X(t), t)}{\partial X} - \lambda(t) \right)_{\substack{X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = 0 \quad (\text{III.24})$$

Sachant que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial \mathfrak{J}(X(t), t)}{\partial X} \right)^T \dot{X}(t) \right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{J}(X(t), t)}{\partial X^T \partial X} \dot{X}(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X} \right) &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X \partial t} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X} \right) \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X} \right) \frac{\partial t}{\partial t} \\ &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X^T \partial X} \dot{X}(t) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}(X(t), U(t), t)}{\partial X \partial t}\end{aligned}$$

En remplaçant ces termes par leurs expressions dans (III.24) et après simplification, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial X} \left\{ \mathcal{L}(X(t), U(t), t) + \lambda^T(t) f(X(t), U(t), t) \right\}_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} + \left(\frac{d\lambda(t)}{dt} \right)_{\lambda(t)=\lambda^*(t)} = 0 \quad (\text{III.24})$$

On peut écrire encore

$$\dot{\lambda}(t)_{\lambda(t)=\lambda^*(t)} = - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \mathcal{L}(X(t), U(t), t) + \lambda^T(t) f(X(t), U(t), t) \right\}_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \quad (\text{III.25})$$

La deuxième équation d'E-L est celle relative au vecteur de commande U(t) et elle s'écrit

$$\frac{\partial F(X(t), \dot{X}(t), \lambda(t), U(t), t)}{\partial U} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F(X(t), \dot{X}(t), \lambda(t), U(t), t)}{\partial \dot{U}} \right) = 0 \quad (\text{III.26})$$

Le deuxième terme de (III.26) est nulle car il est indépendant de $\dot{U}(t)$, de même pour les termes indépendants de U(t) du premiers terme de (III.26) ils s'annulent aussi et on obtient après calcul

$$\frac{\partial}{\partial U} \left\{ \mathcal{L}(X(t), U(t), t) + \lambda^T(t) f(X(t), U(t), t) \right\}_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = 0 \quad (\text{III.27})$$

III.2.1.4) Définition de la fonction d'Hamilton et des équations canoniques

La fonction d'Hamilton (utilisée en particulier en mécanique analytique) (Hamiltonien) représente en général l'énergie totale du système si elle est déduite à partir des équations d'Euler-Lagrange qui utilise le Lagrangien. Puisque en commande optimale, on utilise les équations E-L donc, elle représente la grandeur physique énergie totale du système. C'est une fonction scalaire et elle est définie comme suit

$$H(X(t), U(t), \lambda(t), t) = \mathcal{L}(X(t), U(t), t) + \lambda^T(t) f(X(t), U(t), t) \quad (\text{III.28})$$

En utilisant la relation (III.29) et les équations (III.15), (III.25), on déduit les équations dites « canoniques »

$$\dot{X}(t)_{X(t)=X^*(t)} = \frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \quad (\text{III.29})$$

$$\dot{\lambda}(t) \Big|_{\lambda(t)=\lambda^*(t)} = - \frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial X} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \quad (\text{III.30})$$

On a aussi, l'équation algébrique qui accompagne ces deux équations qui est indispensable pour la résolution du problème de commande optimale

$$\frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial U} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = 0 \quad (\text{III.31})$$

La solution optimale $(U^*(t), X^*(t), \lambda^*(t))$ correspond au minimum du critère \mathfrak{J}' , donc du critère \mathfrak{J} et elle est aussi la solution du système d'équations (III.29)-(III.31) sur $[t_0, t_f]$.

On a « $2n$ » équations différentielles du premier ordre, elles nécessitent le même nombre de conditions initiales ainsi que les instants limites t_0 et t_f , donc « $2n+2$ » valeurs limites à connaître.

III.2.1.5) Détermination des valeurs aux conditions limites

Dans le problème de commande optimale à résoudre, t_0 et X_0 sont fixées et connues. Elles restent « $n+1$ » conditions finales à déterminer, pour cela, on utilise les conditions de transversalités (obtenues du calcul d'une variation du critère \mathfrak{J}'). Dans le cas général, où les conditions finales t_f et $X(t_f)$ sont libres, ces conditions s'écrivent

$$\left[\frac{\partial F(X^*(t), \dot{X}^*(t), \lambda^*(t), U^*(t), t)}{\partial \dot{X}} \right]^T \delta X \Big|_{t=t_f} + \left\{ F(X^*(t), \dot{X}^*(t), \lambda^*(t), U^*(t), t) - \left[\frac{\partial F(X^*(t), \dot{X}^*(t), \lambda^*(t), U^*(t), t)}{\partial \dot{X}} \right]^T \dot{X}^*(t) \right\} \delta t \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{III.32})$$

En remplaçant $F(\cdot)$ par son expression donnée par (III.22) et tenant compte des résultats obtenus lors du calcul de la première équation de Lagrange pour le calcul de $\partial \mathfrak{F}(\cdot) / \partial t$, on obtient après simplification

$$\left[\frac{\partial S(X^*(t), t)}{\partial \dot{X}} - \lambda^*(t) \right]^T \delta X \Big|_{t=t_f} + \left\{ \underbrace{L(X^*(t), U^*(t), t) + \lambda^{*T}(t) f(X^*(t), U^*(t), t)}_{H(X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t), t)} + \frac{\partial S(X^*(t), t)}{\partial X} \right\} \delta t \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{III.33})$$

L'équation (III.33) doit être vérifiée à $t=t_f$ quelque soient les variations δX et δt , donc on déduit

$$\left[\frac{\partial S(X^*(t), t)}{\partial \dot{X}} - \lambda^*(t) \right] \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{III.34})$$

$$\left\{ H(X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t), t) + \frac{\partial S(X^*(t), t)}{\partial X} \right\} \Big|_{t=t_f} = 0 \quad (\text{III.35})$$

La résolution de l'équation (III.34) permet d'obtenir « n » conditions finales X_f et (III.35) une condition finale t_f .

Différents problèmes de commande par-rapport aux conditions finales

Selon la définition des valeurs des conditions finales, on a différents problèmes de commande optimale

- Si $X(t_f)$ est fixé, alors $\delta X(t_f)=0$ alors le premier terme de (III.35) est nul. On a, à déterminer seulement t_f par (III.35),
- Si t_f est fixé, alors $\delta t=0$ à $t = t_f$, alors le deuxième terme de (III.35) est nul. On a, à déterminer seulement $X(t_f)$ par (III.34) :
- Si $X(t_f)$ et t_f sont fixés, alors $\delta X(t_f)=0$ et $\delta t=0$ à $t = t_f$, alors les deux termes de (III.35) sont nuls. On n'a pas de conditions finales à déterminer par (III.35).

Remarques

- Il existe un cas intermédiaire ou une partie des composantes du vecteur $X(t_f)$ est fixée et l'autre est libre, alors on utilise que les équations correspondantes aux termes libre de (III.35) pour les calculer. Les composantes fixées sont déterminées par les équations d'états
- Dans le cas où $X(t_f)$ est fixé, on le détermine par l'équation d'état du système.
- Les conditions aux limites sont nécessaires pour le calcul de la solution optimale ($U^*(t)$, $X^*(t)$, $\lambda^*(t)$).
- La résolution analytique du système d'équations (III.29)-(III.31) sur $[t_0, t_f]$ est impossible pour les systèmes non linéaires et non stationnaires, alors on utilise la résolution numérique (méthode de Range-Kutta) assistée par ordinateur.

III.2.1.6) Conditions suffisantes de la commande optimale

La commande optimale obtenue (faible ou local) vérifie seulement les conditions nécessaires (conditions du premier ordre). Il est possible de déterminer les conditions suffisantes (conditions du deuxième ordre) pour cette solution optimale, en se référant à la théorie de calcul des variations. Cette théorie montre que pour que le minimum d'une fonctionnelle (l'Hamiltonien dans notre cas) soit fort (global) pour $U(t)= U^*(t)$ (de même pour $X(t)= X^*(t)$ et $\lambda(t)= \lambda^*(t)$), il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées

- c₁) La commande optimale $U^*(t)$ satisfait les équations d'E-L, ce qui est vérifié car les équations (III.29)-(III.31) sont établies à partir de ces dernières.
- c₂) La seconde dérivée de l'Hamiltonien $H(U^*(t), X^*(t), \lambda^*(t), t)$ par-rapport à $U(t)$ soit positive dans le cas scalaire ou définit positive dans le cas où $U(t)$ est un vecteur, c'est-à-dire

$$\left. \frac{\partial^2 H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial U^T \partial U} \right|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} > 0 \quad (III.36)$$

- c₃) L'intervalle $[t_0, t_f]$ n'a pas de points conjugués à $t=t_0$. Cela est vérifié si la seconde variation du critère $\delta^2 \mathfrak{J}$ est définie positive, on écrit

$$\delta^2 \mathfrak{J} = \frac{1}{2} \left(\delta X^T \frac{\partial^2 S(X(t), t)}{\partial X^T \partial X} \delta X \right) \Bigg|_{t=t_f} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\delta X^T \quad \delta U^T \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H(\cdot)}{\partial X \delta X^T} & \frac{\partial^2 H(\cdot)}{\partial X \delta U^T} \\ \frac{\partial^2 H(\cdot)}{\partial U \delta X^T} & \frac{\partial^2 H(\cdot)}{\partial U \delta U^T} \end{bmatrix} \frac{\delta X}{\delta U} dt \geq 0 \quad (III.37)$$

c₄) Il faut que l'Hamiltonien $H(\cdot)$ soit minimisé le long de la trajectoire optimale $(U^*(t), X^*(t), \lambda^*(t))$, donc on a

$$H(X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t), t) \leq H(X^*(t), U(t), \lambda^*(t), t), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (\text{III.38})$$

Remarque

En pratique, fréquemment, la solution obtenue à partir de la résolution du système (III.29)-(III.31) est unique et correspond bien à la minimisation du critère d'optimisation choisi \mathfrak{J} .

III.2.2) Commande optimale d'un système linéaire et non stationnaire avec critère quadratique

Le modèle d'état d'un système linéaire non stationnaire est

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B(t)U(t) \quad (\text{III.39})$$

$$Y(t) = C(t)X(t) \quad (\text{III.40})$$

La dimension des vecteur des différents vecteurs est définie au § III.1.

On cherche à déterminer un vecteur de commande optimale $U^*(t)$ qui minimise le critère quadratique suivant

$$\mathfrak{J} = X^T(t_f)GX(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)P(t)U(t)] dt \quad (\text{III.41})$$

avec

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{U^*(t)} \begin{pmatrix} X_f \\ t_f \end{pmatrix} \quad \text{et } U^*(t) \text{ la commande optimale à calculer et qui minimise le critère } \mathfrak{J} \text{ donné par (III.41).}$$

On suppose les mêmes hypothèses que celles du § III.2.1, avec en plus

- h₁) G est une matrice constante, symétrique au moins semi-définie positive
- h₂) $Q(t)$ et $P(t)$ sont des matrices symétriques respectivement au moins semi-définie positive et définie positive,
- h₂) Les éléments des matrices $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ et $P(t)$ sont des fonctions continues sur $[t_0, t_f]$.

III.2.2.1) Formulation de l'Hamiltonien

On a, d'après (III.28), (III.7), (III.39) et (III.41)

$$\begin{aligned} H(X(t), U(t), \lambda(t), t) &= L(X(t), U(t), t) + \lambda^T(t)(A(t)X(t) + B(t)U(t)) \\ &= X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)P(t)U(t) + \lambda^T(t)(A(t)X(t) + B(t)U(t)) \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

III.2.2.2) Calcul des équations canoniques et l'équation algébrique

$$\dot{X}(t) \Big|_{X(t)=X^*(t)} = \frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = A(t)X(t) + B(t)U(t) \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \quad (\text{III.43})$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) \Big|_{\lambda(t)=\lambda^*(t)} &= - \frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial X} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \\ &= - \frac{\partial}{\partial X} \left\{ X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t) + \lambda^T(t) (A(t) X(t) + B(t) U(t)) \right\} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \end{aligned}$$

Les termes indépendants de X(t) s'annulent et en utilisant la propriété

$$\frac{\partial}{\partial z} (A^T B) = \frac{\partial A}{\partial z} B + \frac{\partial B}{\partial z} A, \text{ on a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} (X^T(t) Q(t) X(t)) &= 2Q(t) X(t) \\ \frac{\partial}{\partial X} (\lambda^T(t) A(t) X(t)) &= A^T(t) \lambda(t) \end{aligned}$$

Donc,

$$\dot{\lambda}(t) \Big|_{\lambda(t)=\lambda^*(t)} = - (2Q(t) X(t) + A^T(t) \lambda(t)) \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \tag{III.45}$$

En remplaçant H(.) par son expression dans (III.41), l'équation algébrique s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial U} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial}{\partial U} \left\{ X^T(t) Q(t) X(t) + U^T(t) R(t) U(t) + \lambda^T(t) (A(t) X(t) + B(t) U(t)) \right\} \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} &= 0 \end{aligned}$$

Les termes indépendants de U(t) s'annulent et en utilisant la même propriété, on obtient

$$(2R(t) U(t) + B^T(t) \lambda(t)) \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = 0 \tag{III.46}$$

Sachant que P(t) est une matrice définie positive alors, elle est inversible donc, on obtient de (III.46) l'expression de $U_{BO}^*(t)$

$$U_{BO}^*(t) = -\frac{1}{2} P^{-1}(t) B^T(t) \lambda^*(t) \tag{III.47}$$

La loi de commande donnée par (III.47) ne dépend pas implicitement du vecteur d'état du système (ni du vecteur de sortie Y(t)) donc, c'est une commande en boucle ouverte (BO) et elle dépend du vecteur d'état adjoint optimal $\lambda^*(t)$. La figure III.1 ci-dessous représente le système de commande optimale en BO.

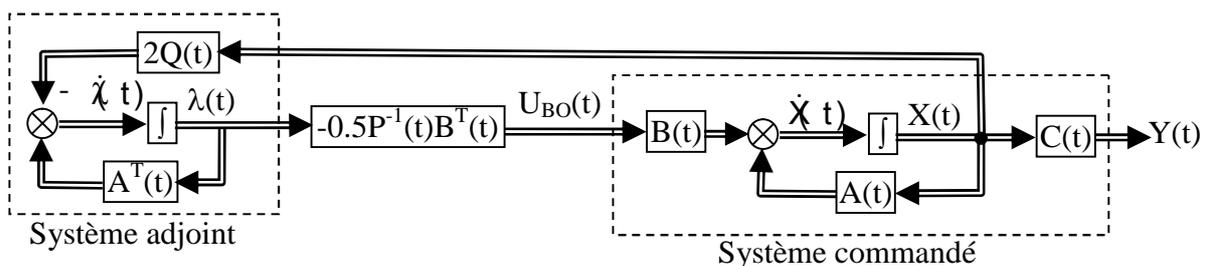


Figure III.1 : Système de commande optimale en boucle ouverte.

Exemple : Calcul d'une commande optimale en BO pour un système linéaire stationnaire

Soit le modèle d'état d'un système linéaire stationnaire :

$$\dot{X}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} u(t) \quad , \quad \text{avec } X(t) = (x_1(t); x_2(t))^T, \quad Y(t) = (y_1(t); y_2(t))^T,$$

$$X(0) = (1; 0.5)^T \text{ et } X(1) \text{ libre.}$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X(t)$$

Soit le critère à optimiser, en fonction des sorties :

$$I(Y(1), u(t)) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} y_1(1) - y_2(1) \\ y_1(1) + y_2(1) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(1) - y_2(1) \\ y_1(1) + y_2(1) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^1 u^2(t) dt$$

Calculer $I(X(1), u(t))$:

Des équations de sortie, on déduit que : $y_1(t) = -x_1(t) + x_2(t)$; $y_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$

On remplace $y_1(1)$ et $y_2(1)$ par leur expressions dans $I(Y(1), u(t))$, on obtient :

$$I(X(1), u(t)) = X^T(1) \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} X(1) + \int_0^1 0.5 u^2(t) dt$$

Calcul de la commande optimale en BO en fonction des conditions initiales des co-états :

$$\text{On a } U_{BO}^*(t) = -\frac{1}{2} P^{-1} B^T \lambda^*(t) \quad (\text{équation III.78})$$

$$\text{On a } p=0.5, \text{ donc } p^{-1}=2; B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \text{ donc } B^T = (0 \quad 0.5)$$

Calcul du vecteur d'état adjoint $\lambda^*(t)$:

$$\text{On a } \dot{\lambda}(t) \Big|_{\lambda(t)=\lambda^*(t)} = -2QX(t) - A^T \lambda(t) \Big|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} \quad (\text{équation III.77})$$

$$\text{On a d'après l'expression du critère } I(X(1), u(t)), \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}, \text{ donc } A^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

La solution de l'équation d'état du système adjoint est : $\lambda^*(t) = e^{-A^T t} \lambda^*(0)$

Calcul de $e^{-A^T t}$:

On a $e^{-A^T t} = \alpha_0 I_2 + \alpha_1 (-A^T)$ avec, I_2 matrice identité α_0, α_1 solution du système d'équations

$$\begin{cases} e^{p_1 t} = \alpha_0 + p_1 \alpha_1 \\ e^{p_2 t} = \alpha_0 + p_2 \alpha_1 \end{cases}, \text{ avec } p_1=2 \text{ et } p_2=8 \text{ valeurs propre de la matrice } (-A^T).$$

$$\text{Donc, } e^{-A^T t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0.667(e^{8t} - e^{2t}) \\ 0 & e^{8t} \end{pmatrix}, \text{ alors } \lambda^*(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(0)e^{2t} + 0.667\lambda_2(0)(e^{8t} - e^{2t}) \\ \lambda_2(0)e^{8t} \end{pmatrix}$$

L'expression de la commande optimale en BO, en remplaçant les différentes matrices :

$$u_{BO}^*(t) = -0.5\lambda^*(t) = -0.5\lambda_2(0)e^{8t} \text{ avec } \lambda_2(0) \neq 0$$

Calcul de $X(1)$ vecteur d'état final (en fonction de $\lambda(0)$:

Puisque $X(1)$ est libre (voir l'énoncé de l'exemple), alors $X(1)$ est calculé, en utilisant les conditions de transversalité, données par l'équation (III.34).

La fonction scalaire (coût) $S(X(1))$ est déduite de l'expression de $I(X(1), u(t))$ et elle s'écrit :

$S(X(t))=0.5x_1^2(t)+0.5x_2^2(t)$ pour $0 \leq t \leq 1$.

En remplaçant, $S(X(t))$ et $\lambda(t)$ par son expression dans (III.34), on obtient:

$$\begin{cases} x_1^*(1) = \lambda_1^*(1) \\ x_2^*(1) = \lambda_2^*(1) \end{cases}, \text{ donc } X^*(1) = \begin{pmatrix} 7.389\lambda_1(0) + 1982.4\lambda_2(0) \\ 5961.9\lambda_2(0) \end{pmatrix}$$

III.2.2.3) Calcul de la commande optimale en boucle fermée

La commande optimale en boucle fermée $U_{BF}^*(t)$ est un retour du vecteur d'état optimal $X^*(t)$ alors il faut exprimer le vecteur d'état adjoint optimal $\lambda^*(t)$ en fonction du vecteur d'état optimal $X^*(t)$.

En remplaçant $U_{BF}^*(t)$ dans (III.43) et (III.47), on obtient la trajectoire optimale $(X^*(t), \lambda^*(t))$ qui est composée de l'équation d'état optimal et l'équation d'état adjointe optimale, on a

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & -0.5B(t)P^{-1}(t)B^T(t) \\ -2Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.48})$$

On a un système à « 2n » équations différentielles du premier ordre, sa solution est de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{pmatrix} = \phi_{X,\lambda}(t, t_0) \begin{pmatrix} X^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{pmatrix} \quad (\text{III.49})$$

où, $\phi_{X,\lambda}(t, t_0)$ est la matrice de transition d'état et la matrice d'évolution du système est

$$W(t) = \begin{pmatrix} A(t) & -0.5B(t)P^{-1}(t)B^T(t) \\ -2Q(t) & -A^T(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.50})$$

A l'instant $t = t_f$, (III.49) s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t_f) \\ \dot{\lambda}^*(t_f) \end{pmatrix} = \phi_{X,\lambda}(t_f, t_0) \begin{pmatrix} X^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{pmatrix} \quad (\text{III.51})$$

On peut calculer la trajectoire optimale à $t = t_f$, à partir de n'importe quel instant $t \in [t_0, t_f)$, donc, on écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t_f) \\ \dot{\lambda}^*(t_f) \end{pmatrix} = \phi_{X,\lambda}(t_f, t) \begin{pmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.52})$$

On peut écrire aussi

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t_f) \\ \dot{\lambda}^*(t_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{X,\lambda}^{11}(t_f, t) & \phi_{X,\lambda}^{12}(t_f, t) \\ \phi_{X,\lambda}^{21}(t_f, t) & \phi_{X,\lambda}^{22}(t_f, t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{pmatrix} \quad (\text{III.53})$$

L'instant final « t_f » étant fixe et $X^*(t_f)$ est libre. On a, la fonction coût est fonction seulement de l'état final $X^*(t_f)$ et elle s'écrit

$$S(X^*(t_f)) = X^{*T}(t_f)GX^*(t_f) \quad (\text{III.54})$$

Les conditions de transversalités se réduit à l'équation (III.34) et en remplaçant $S(X^*(t_f))$ par son expression (III.54) dans (III.34), on obtient

$$2GX^*(t_f) - \lambda^*(t_f) = 0 \quad (III.55)$$

On déduit que

$$\lambda^*(t_f) = 2GX^*(t_f) \quad (III.56)$$

En remplaçant (III.56) dans (III.53), on a

$$\dot{X}^*(t_f) = \phi_{X,\lambda}^{11}(t_f, t)X^*(t) + \phi_{X,\lambda}^{12}(t_f, t)\lambda^*(t) \quad (III.57)$$

$$2G\dot{X}^*(t_f) = \phi_{X,\lambda}^{21}(t_f, t)X^*(t) + \phi_{X,\lambda}^{22}(t_f, t)\lambda^*(t) \quad (III.58)$$

et on remplace (III.57) dans (III.58), donne

$$[\phi_{X,\lambda}^{22}(t_f, t) - 2G\phi_{X,\lambda}^{12}(t_f, t)]\lambda^*(t) = [2G\phi_{X,\lambda}^{11}(t_f, t) - \phi_{X,\lambda}^{21}(t_f, t)]X^*(t) \quad (III.59)$$

Dans le cas (c'est toujours vérifié) où

$$\det[\phi_{X,\lambda}^{22}(t_f, t) - 2G\phi_{X,\lambda}^{12}(t_f, t)] \neq 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

soit alors

$$\psi(t_f, t) = [\phi_{X,\lambda}^{22}(t_f, t) - 2G\phi_{X,\lambda}^{12}(t_f, t)]^{-1} \quad (III.60)$$

On peut écrire donc,

$$\lambda^*(t) = \psi(t_f, t)[2G\phi_{X,\lambda}^{11}(t_f, t) - \phi_{X,\lambda}^{21}(t_f, t)]X^*(t) \quad (III.61)$$

Soit

$$2R(t) = \psi(t_f, t)[2G\phi_{X,\lambda}^{11}(t_f, t) - \phi_{X,\lambda}^{21}(t_f, t)] \quad (III.62)$$

On peut écrire

$$\lambda^*(t) = 2R(t)X^*(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (III.63)$$

En remplaçant (III.63) dans (III.47), on obtient la commande optimale en boucle fermée (BF) $U_{BF}^*(t)$

$$U_{BF}^*(t) = -P^{-1}(t)B^T(t)R(t)X^*(t) \quad (III.64)$$

soit,

$$K(t) = P^{-1}(t)B^T(t)R(t) \quad (III.65)$$

d'où,

$$U_{BF}^*(t) = -K(t)X^*(t) \quad (III.66)$$

La commande optimale en BF, donnée par (III.66) est un retour d'état avec une matrice de gain « $K(t)$ » dynamique. Le calcul de cette dernière nécessite celui de la matrice variable « $R(t)$ ».

III.2.2.4 Calcul de la matrice $R(t)$ solution de l'équation de Riccati

Le calcul de $R(t)$ à partir de (III.62), c'est-à-dire à partir de la matrice de transition est difficile alors, le calcul se fait à partir de l'équation non linéaire et non stationnaire de Riccati. La formulation de cette dernière est comme suit

- On dérive (III.63) par-rapport au temps, on obtient

$$\dot{\lambda}^*(t) = 2\dot{R}(t)X^*(t) + 2R(t)\dot{X}^*(t) \tag{III.67}$$

On remplace $\dot{X}(t)$, donnés par (III.48) dans (III.67) et $\lambda(t)$ donné par (III.63), on a

$$2[Q(t) - A^T(t)R(t)]X^*(t) = 2[\dot{R}(t) + R(t)A(t) - R(t)B(t)P^{-1}(t)B^T(t)R(t)]X^*(t)$$

On peut l'écrire sous la forme suivante

$$2[\dot{R}(t) + R(t)A(t) + A^T(t)R(t) - R(t)B(t)P^{-1}(t)B^T(t)R(t) + Q(t)]X^*(t) = 0 \tag{III.67}$$

L'équation (III.67) doit être vérifiée (satisfaite) $\forall t \in [t_0, t_f]$. Le vecteur d'état optimal $X^*(t)$ est supposé non trivial (c'est-à-dire non nul $\forall t \in [t_0, t_f]$). Alors on déduit que

$$\dot{R}(t) = -R(t)A(t) - A^T(t)R(t) + R(t)B(t)P^{-1}(t)B^T(t)R(t) - Q(t) \tag{III.68}$$

C'est l'équation de Riccati où sa solution est la matrice symétrique $R(t)$. Le calcul de cette dernière permet de déduire la commande optimale en BF $U_{BF}^*(t)$, donnée par (III.64) et donc la trajectoire optimale par la résolution de l'équation

$$\dot{X}(t) = [A(t) - B(t)P^{-1}(t)B^T(t)R(t)]X(t) \tag{III.69}$$

La résolution des équations (III.68) et (III.69) nécessite l'utilisation des méthodes d'intégration numérique (exemple Range-Kutta) assistée par ordinateur. Car toutes les matrices sont variables par-rapport au temps.

Le système de commande optimale en boucle fermée est représenté par la figure III.2 ci-dessous

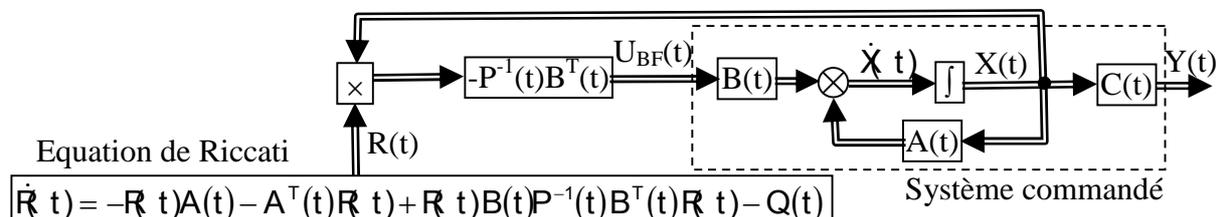


Figure III.2 : Système de commande optimale en boucle fermée d'un système linéaire non stationnaire.

Conditions aux limites de l'équation de Riccati

Les conditions aux limites de l'équation de Riccati s'obtiennent par identification des membres des équations (III.56) et (III.63) pour $t = t_f$ et on obtient

$$R(t_f) = G \quad (\text{III.70})$$

III.2.2.5) Conditions suffisantes de la commande optimale

- La première condition du § III.2.1.5 est vérifiée.
- La deuxième condition est

$$\left. \frac{\partial H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial U} \right|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = 2R(t)U^*(t) + B^T(t)\lambda^*(t)$$

et

$$\left. \frac{\partial^2 H(X(t), U(t), \lambda(t), t)}{\partial U^T \partial U} \right|_{\substack{U(t)=U^*(t) \\ X(t)=X^*(t) \\ \lambda(t)=\lambda^*(t)}} = 2R(t) \quad (\text{III.71})$$

Puisque la matrice $P(t)$ est définie positive alors le Hessien de $H(\cdot)$ ($\partial^2 H / \partial U^T \partial U$) est défini positif donc, la commande optimale en BF $U_{BF}^*(t)$ est le minimum de $H(\cdot)$ et donc du critère \mathfrak{J} .

III.2.3) Commande optimale d'un système linéaire stationnaire avec critère Quadratique

On considère dans ce paragraphe un système linéaire stationnaire qui représente le modèle utilisé pour la synthèse de commande optimale des systèmes physiques, au voisinage du point de fonctionnement. On étudie deux cas commande à horizon finis puis à horizon infini.

III.2.3.1) Cas d'un horizon de commande fini

Le modèle d'état d'un système linéaire stationnaire est

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \quad (\text{III.72})$$

$$Y(t) = CX(t) \quad (\text{III.73})$$

La dimension des vecteur des différents vecteurs est définie au § III.2.2

On cherche à déterminer un vecteur de commande optimale $U^*(t)$ qui minimise le critère quadratique suivant

$$\mathfrak{J} = X^T(t_f)GX(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} X^T(t)QX(t) + U^T(t)PU(t)dt \quad (\text{III.74})$$

avec

- h_1) G et Q sont des matrices constantes, symétriques et au moins semi-définies positives,
- h_2) P est une matrice constante, symétrique et définie positive,
- h_2) Les éléments des matrices $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$ et $P(t)$ sont des fonctions continues sur $[t_0, t_f]$.

On procède de la même manière que le cas d'un système linéaire et non stationnaire étudié au § III.2.2, on obtient

-Le Hamiltonien

$$H(X(t), U(t), \lambda(t), t) = X^T(t)QX(t) + U^T(t)PU(t) + \lambda^T(t)(AX(t) + BU(t)) \quad (\text{III.75})$$

- Les équations canoniques

$$\dot{X}(t) \Big|_{\chi(t)=X(t)} = AX(t) + BU(t) \Big|_{\substack{\chi(t)=X(t) \\ \lambda(t)=\lambda(t)}} \quad (III.76)$$

$$\dot{\lambda}(t) \Big|_{\chi(t)=\lambda(t)} = -2QX(t) - A^T \lambda(t) \Big|_{\substack{\chi(t)=X(t) \\ \lambda(t)=\lambda(t)}} \quad (III.77)$$

-La commande optimale en BO

$$U_{BO}^*(t) = -\frac{1}{2} P^{-1} B^T \lambda^*(t) \quad (III.78)$$

En remplaçant $U_{BO}^*(t)$ dans (III.76), on obtient la trajectoire optimale $(X^*(t), \lambda^*(t))$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -0.5BP^{-1}B^T \\ -2Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^*(t) \\ \lambda^*(t) \end{pmatrix} \quad (III.79)$$

La solution de (III.79) est de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{X}^*(t) \\ \dot{\lambda}^*(t) \end{pmatrix} = \phi_{X,\lambda}(t-t_0) \begin{pmatrix} X^*(t_0) \\ \lambda^*(t_0) \end{pmatrix} \quad (III.80)$$

où, $\phi_{X,\lambda}(t-t_0)$ est la matrice de transition d'état.

On peut calculer $\phi_{X,\lambda}(t-t_0)$, en utilisant la transformation de Laplace

$$\phi_{X,\lambda}(p) = (pI_{2n} - W)^{-1} \quad (III.81)$$

avec « p » opérateur de Laplace, I_{2n} matrice identité de dimension $2n$ et W matrice d'évolution, tel que

$$W = \begin{pmatrix} A & -0.5BP^{-1}B^T \\ -2Q & -A^T \end{pmatrix} \quad (III.82)$$

Donc

$$\phi_{X,\lambda}(t-t_0) = L^{-1} (pI_{2n} - W)^{-1} \quad (III.83)$$

L'expression d vecteur d'état adjoint en fonction du vecteur l'état est

$$\lambda^*(t) = 2R(t)X^*(t), \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (III.84)$$

où $R(t)$ est une matrice dynamique et symétrique qui est la solution de l'équation de Riccati à coefficients constants

$$\dot{R}(t) = -R(t)A - A^T R(t) + R(t)BP^{-1}B^T R(t) - Q \quad (III.85)$$

avec la condition finale donnée par la relation (III.70).

- La loi de commande optimale en BF est

$$U_{BF}^*(t) = -P^{-1}B^T R(t)X^*(t) \quad (III.86)$$

soit,

$$K(t) = P^{-1}B^T R(t) \quad (III.87)$$

d'où,

$$U_{BF}^*(t) = -K(t)X^*(t) \quad (III.88)$$

Le système de commande en BF à horizon fini d'un système linéaire stationnaire est représenté par la figure III.3.

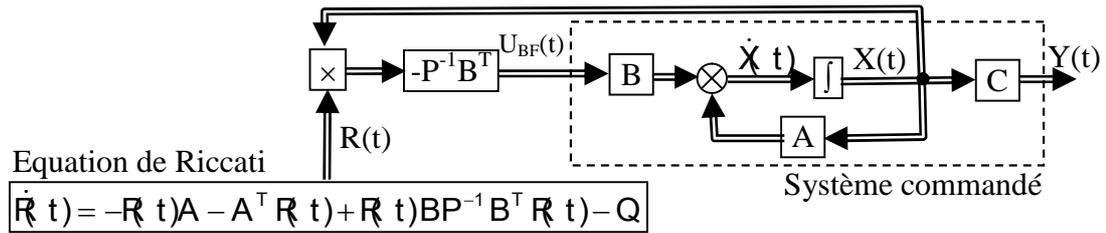


Figure III.3: Système de commande optimale en boucle fermée à horizon fini d'un système linéaire stationnaire.

La commande optimale en BF, donnée par (III.66) est un retour d'état dynamique avec une matrice de gain « $K(t)$ » variable. Le calcul de cette dernière nécessite celui de la matrice variable « $R(t)$ ». Les méthodes d'intégration numérique sont les mieux adaptées, en particulier pour les systèmes de dimension importante.

La trajectoire optimale en BF est calculée par l'équation suivante

$$\dot{X}(t) = [A - BP^{-1}B^T R(t)]X(t) \quad (III.89)$$

III.2.3.2) Cas d'un horizon de commande infini

Puisque l'horizon de commande est infini (c'est-à-dire t_f est infini) alors, le terme représenté par la fonction coût est nul et l'instant initial t_0 est considéré nul par rapport à t_f qui est infini. Donc, le critère d'optimisation s'écrit

$$\mathfrak{J} = \int_0^{+\infty} X^T(t)QX(t) + U^T(t)PU(t)dt \quad (III.90)$$

avec les mêmes hypothèses sur les matrices P et Q que celles du § III.2.3.2 et en plus, il faut que le système soit

- Commandable, c'est-à-dire

$$\text{Rang} [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (III.91)$$

- Stable, donc les valeurs propres de la matrice A du système sont à partie réelle strictement négative.

En remplaçant $\lambda^*(t)$ et $U_{BF}^*(t)$ par leur expression dans la relation de H(.), on obtient

$$\begin{aligned} H(X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t), t) &= X^{*T}(t)[R(t)A + A^T R(t) - R(t)BP^{-1}B^T R(t) + Q]X^*(t) \\ &= -X^{*T}(t)\dot{R}(t)X^*(t) \end{aligned} \quad (III.92)$$

au régime établi, c'est-à-dire à l'horizon infini l'énergie totale du système s'annule, donc

$$H(X^*(t), U^*(t), \lambda^*(t), t) = -X^{*\top}(t) \dot{R}(t) X^*(t) = 0 \quad (\text{III.93})$$

Puisque le vecteur d'état optimal $X^*(t)$ n'est pas trivial (identiquement nul), alors

$$\dot{R}(t) = 0 \quad (\text{III.94})$$

Donc, la matrice R est constante et l'équation de Riccati n'est plus un système d'équation différentielle, mais un système d'équations algébrique non linéaire qui s'écrit

$$R_0 A + A^\top R_0 - R_0 B P^{-1} B^\top R_0 + Q = 0 \quad (\text{III.95})$$

La commande optimale en BF est un retour d'état statique optimal, c'est-à-dire à gains constants

$$U_{BF}^*(t) = -K X^*(t) \quad (\text{III.96})$$

avec

$$K = P^{-1} B^\top R_0 \quad (\text{III.97})$$

Cette loi de commande est simple à mettre en œuvre car les gains de retour sont calculés une seule fois (des constantes), donc le temps de calcul est réduit.

Le système de commande en BF à horizon infini d'un système linéaire stationnaire est représenté par la figure III.4.

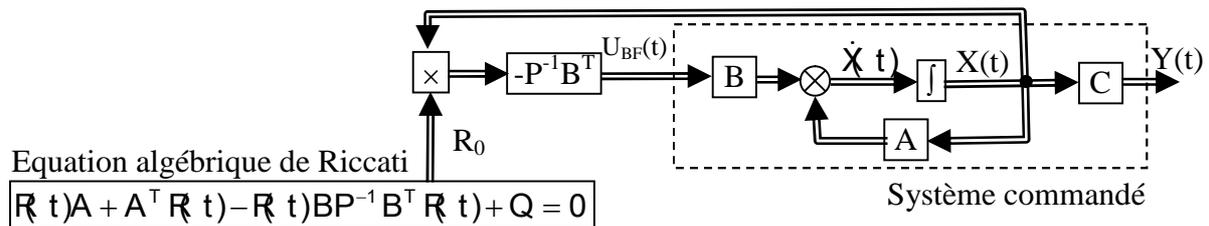


Figure III.4: Système de commande optimale en boucle fermée à horizon infini d'un système linéaire stationnaire.

Le calcul de $U_{BF}^*(t)$ nécessite le calcul du vecteur d'état optimal $X^*(t)$, par l'équation d'état en BF

$$\dot{X}(t) = [A - B P^{-1} B^\top R_0] X(t) \quad (\text{III.98})$$

La matrice système (d'état) en boucle fermée est :

$$A_{BF}^* = A - B K = A - B P^{-1} B^\top R_0 \quad (\text{III.99})$$

Exemple : Calcul d'une commande optimale en BF à horizon infini avec critère quadratique pour un système linéaire stationnaire

Soit le modèle d'état d'un système linéaire stationnaire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -6x_1(t) - 3x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -9x_2(t) + 6u(t) \\ y_1(t) = x_2(t) \\ y_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}, \quad \text{Le critère à optimiser est } I(u(t)) = \int_0^{+\infty} u^2(t) dt$$

Les objectifs est de calculer la matrice d'état en BF A_{BF} , l'expression de la commande en BF $u_{BF}(t)$.

La commande optimale en BF est donnée par les expressions (III.96)-(III.97) :

$U_{BF}(t) = -p^{-1}B^T R_0 X^*(t)$, R_0 solution de l'équation algébrique de Riccati (III.95) et $K = p^{-1}B^T R_0$ vecteur des gains optimal du retour d'état.

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, p=1, R_0 = \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_2 & R_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{L'expression (III.95) s'écrit : } \begin{pmatrix} 4R_1 + 12R_2 & R_1 + 5R_2 + 12R_2 R_3 \\ R_1 + 5R_2 + 12R_2 R_3 & 2R_2 + 6R_3 + 12R_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système d'équations à résoudre d'inconnus (R_1, R_2, R_3) s'écrit :

$$\begin{cases} 4R_1 + 12R_2 = 0 \\ R_1 + 5R_2 + 12R_2 R_3 = 0, \text{ Les quatre solutions sont :} \\ R_2 + 3R_3 + 6R_3^2 = 0 \end{cases}$$

$$R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ solution nulle (triviale) qui donne } u_{BF}(t) = 0, \text{ donc } \underline{\text{rejetée}}.$$

$$R'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}, \text{ on a deux mineurs principaux } R_1 = 0 \text{ et } \det(R'') = 0, \text{ donc solution instable}$$

$$R''' = \begin{pmatrix} -25/3 & -5/3 \\ -5/3 & -5/3 \end{pmatrix}, \text{ on a, le mineur principal } R_1 = -25/3 > 0. \text{ Donc la matrice } R''' \text{ est}$$

définie négative, alors cette solution est rejetée.

$$R^{(4)} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}, \text{ on a, le mineur principal } R_1 = -1/3 > 0. \text{ Donc la matrice } R^{(4)} \text{ est}$$

définie négative, alors cette solution est rejetée.

$$\text{La solution retenue est la solution instable } R'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{pmatrix}.$$

- Calcul du vecteur des gains optimaux, donné par l'équation (III.97), $K = p^{-1}B^T R_0 = [0 \quad 3]$.

- L'expression de la commande en BF est : $u_{BF}(t) = -3x_2^*(t)$.

- La matrice d'état en boucle fermée, donnée par l'équation (III.99) :

$$A_{BF}^* = A - BK = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$$

Les pôles en BF, déduit par l'équation caractéristique de A_{BF}^* , sont : $p_1 = -6$ et $p_2 = -27$, donc le système en BF est stable.

III.3) Conclusion

La commande optimale présentée dans ce chapitre est simple, car sa mise en œuvre est immédiate, en particulier, celle avec critère quadratique à horizon infini. Le cas à horizon fini, la résolution de l'équation de « Riccati » nécessite l'intégration à rebours (de l'instant final à l'instant initial). Ce dernier cas reste toujours un problème de recherche d'actualité.

Nous pouvons utiliser un critère qui dépend de la déviation de l'état par rapport à sa consigne.

Dans le cas où, on a une certitude que la commande dépasse le domaine admissible, il est nécessaire d'introduire des contraintes sur cette dernière, de même pour les états du système. Dans les deux derniers problèmes, le calcul des variations n'est plus valable et il faut utiliser d'autres théories à savoir la programmation dynamique.

Chapitre IV :

Commande par mode de glissement

Le commande par mode de glissement (CMG) est un mode de fonctionnement particulier des systèmes de commande à structure variable (SCSV). Ce type de systèmes a été étudié d'abord en ex-Union Soviétique par Utkin. V.I et Emeljavov. S.V. Par la suite, ces travaux ont été repris ailleurs, soit pour compléter l'étude théorique, soit pour étudier quelques applications possibles (machines électriques, convertisseurs électriques, robotique,...).

L'avantage majeur de la CMG est sa robustesse par rapport aux variations paramétriques. Son inconvénient, forte sollicitation de l'organe de commande et la nécessité d'utiliser la grandeur à régler et un certain nombre de ses dérivées, selon l'ordre du système.

IV.1) Différentes configurations de systèmes de commande à structure variable

Les systèmes de commande à structure variable présentent deux structures de base différentes : La première change la structure par commutation d'une contre-réaction d'état variable, tandis que la deuxième configuration change la structure par commutation au niveau de l'organe de commande.

IV.1.1) Configuration avec changement de structure par commutation d'une contre-réaction d'état variable

On représente un SCSV dont le changement de la structure se fait par commutation d'une contre-réaction d'état variable par la figure IV.1.

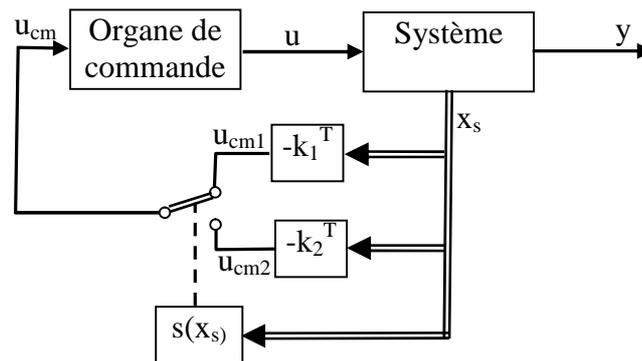


Figure IV.1 : SCSV avec changement de structure par commutation d'une contre-réaction d'état variable.

Le système à commander a un signal de commande $u(t)$, un signal de sortie $y(t)$ et un vecteur d'état $x_s(t)$. Ce dernier est mis en contre-réaction soit par le vecteur ligne « $-k_1^T$ » ou « $-k_2^T$ » selon la position d'un commutateur. Le signal de commande $u_{cm}(t)$ est appliqué à l'organe de commande (OC) qui génère le signal de commande $u(t)$.

Le choix de la contre-réaction d'état par « $-k_1^T$ » ou « $-k_2^T$ » se fait à l'aide de la loi de commutation « $s(x_s)$ » qui est en fonction du vecteur d'état $x_s(t)$. On a

$$u_{cm}(t) = \begin{cases} u_{cm1}(t) = -k_1^T x_s, & \text{pour } s(x_s) > 0 \\ u_{cm2}(t) = -k_2^T x_s, & \text{pour } s(x_s) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

Dans certaines conditions, la commutation se fait à une fréquence très élevée (théoriquement infinie). Le système de commande fonctionne alors en mode de glissement. La dynamique du système est alors déterminée par la condition

$$\dot{x}_s = 0 \quad (\text{IV.2})$$

L'organe de commande reçoit un signal de commande $u_{cm}(t)$ qui commute rapidement entre deux valeurs $u_{cm1}(t)$ et $u_{cm2}(t)$, ce qui peut provoquer des fortes sollicitations de l'OC. Cet inconvénient rend la mise en œuvre pratique très difficile de cette configuration.

IV.1.2) Configuration avec changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande

La deuxième configuration, où le changement de structure se fait par commutation au niveau de l'organe de commande, est donnée par la figure IV.2.

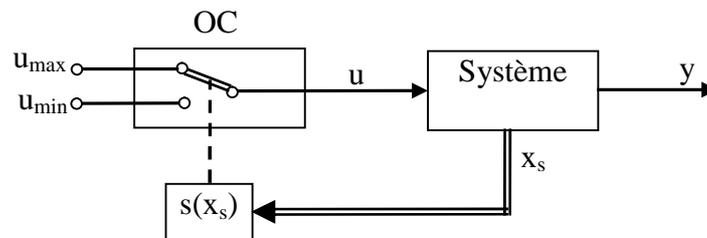


Figure IV.2 : SCSV avec changement de structure par commutation au niveau de l'organe de commande.

Dans cette configuration l'OC doit être conçu de sorte que la grandeur de commande $u(t)$ ne prenne que deux valeurs constantes « u_{min} » ou « u_{max} ». La commutation entre ces deux valeurs est imposée par la loi de commutation $s(x_s)$ selon

$$u_{cm}(t) = \begin{cases} u_{max}, & \text{pour } s(x_s) > 0 \\ u_{min}, & \text{pour } s(x_s) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Dans cette configuration aussi, il est possible que la commutation se fait à une fréquence très élevée (théoriquement infinie) pour que le système de commande fonctionne en mode de glissement (MG). En MG, la dynamique du système de commande est donnée par la relation (IV.2). Cette deuxième configuration est relativement simple à mettre en œuvre en pratique et elle est à deux positions. C'est cette configuration qui fait l'objet de notre étude

IV.2) Loi de commutation par contre-réaction d'état

La configuration d'un SCSV avec changement de la structure par commutation au niveau de l'organe de commande, présenté à la figure IV.2, est spécialisée au cas où la loi de commutation est exprimée par une contre-réaction (retour) d'état. On utilise un modèle d'état d'un système linéaire stationnaire. On détermine les conditions nécessaires pour que le système atteigne le mode de glissement, On calcul dans ce mode de fonctionnement la commande équivalente qui permet de formuler l'équation d'état en MG.

IV.2.1) Configuration avec loi de commutation par contre-réaction d'état

En adoptant le même principe de la commande par retour d'état, on choisit la loi de commutation suivante :

$$\dot{x}_s = -k_s^T x_s(t) + k_w w(t) \quad (\text{IV.4})$$

avec $x_s(t)$ est le vecteur d'état du système à commander de dimension « n_s » et $w(t)$ signal de consigne. k_s^T est vecteur ligne de dimension « n_s » qui contient les coefficients du retour d'état

et k_w est le coefficient de l'intervention directe du signal de consigne $w(t)$. La configuration représentant ce système de commande est donnée par la figure IV.3.

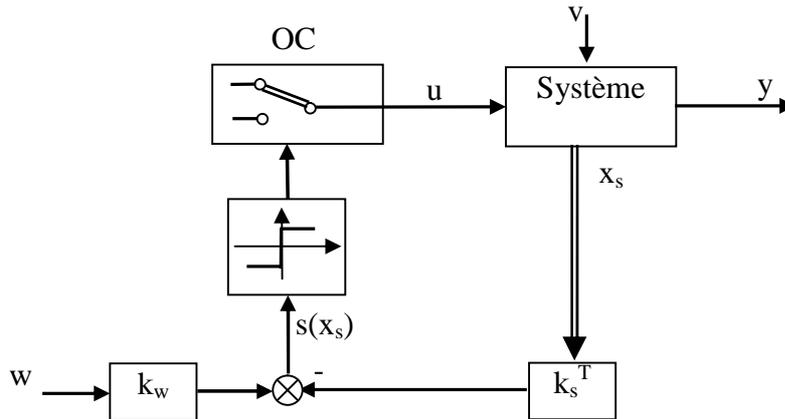


Figure IV.3 : Configuration avec loi de commutation par reour d'état.

Le modèle d'état du système est

$$\dot{x}_s(t) = A_s x_s(t) + b_s \psi(t) + b_{sv} v(t) \quad (\text{IV.5})$$

$$\psi(t) = c_s^T x_s(t) \quad (\text{IV.6})$$

où $v(t)$ est la perturbation agissant sur le système à commander.

La loi de commande est donnée par la relation (IV.3). L'existence de la commutation présente une non-linéarité, tel que

$$\psi(t) = \begin{cases} u_{\max}, & \text{pour } s(x_s) > 0 \\ u_{\min}, & \text{pour } s(x_s) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

La relation (IV.7) s'écrit sous forme compacte par

$$\psi(t) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \operatorname{sgn}(s(x_s)) \quad (\text{IV.8})$$

où la fonction $\operatorname{sgn}(s(x_s))$ est définie par

$$\operatorname{sgn}(s(x_s)) = \begin{cases} 1, & \text{pour } s(x_s) > 0 \\ -1, & \text{pour } s(x_s) < 0 \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

IV.2.2) Condition pour l'existence du mode de glissement

Le mode de glissement existe s'il y a commutation continue entre u_{\max} et u_{\min} . On montre ce phénomène à la figure IV.4 pour le cas d'un système à commander du deuxième ordre à deux variables d'état x_{s1} et x_{s2} .

On admet d'abord une hystérèse sur la loi de commutation $s(x_s)=0$ (droite en pointillé). Par conséquent, les commutations ont lieu sur les droites décalées parallèlement de $\pm \Delta s$.

Une trajectoire avec $u = u_{\max}$ touche au point « a » le seuil de basculement inférieur. Si avec $u = u_{\min}$, la trajectoire est orientée vers l'intérieur de la zone de l'hystérèse, elle touche au point « b » le seuil de basculement supérieur où a lieu une commutation sur $u = u_{\max}$. Si la trajectoire est de nouveau orientée vers l'intérieur elle touche au point « c » le seuil de

basculement inférieur et ainsi de suite. Il y a donc un mouvement continu à l'intérieur de la zone de l'hystérèse. Ce mouvement s'approche du régime stationnaire dans une certaine zone, où des commutations continues existent. La fréquence de la commutation est finie.

Pour une étude analytique, on suppose une hystérèse infiniment petite. La trajectoire glisse alors le long de la droite $s(x_s)=0$ avec une fréquence de commutation infiniment élevée, ce qui représente le phénomène du mode de glissement. Dans un tel cas, la loi de commutation fait un mouvement infiniment petit au tour de

$$\dot{\xi}(x_s) = -k_s^T x_s(t) + k_w w(t) = 0 \quad (\text{IV.10})$$

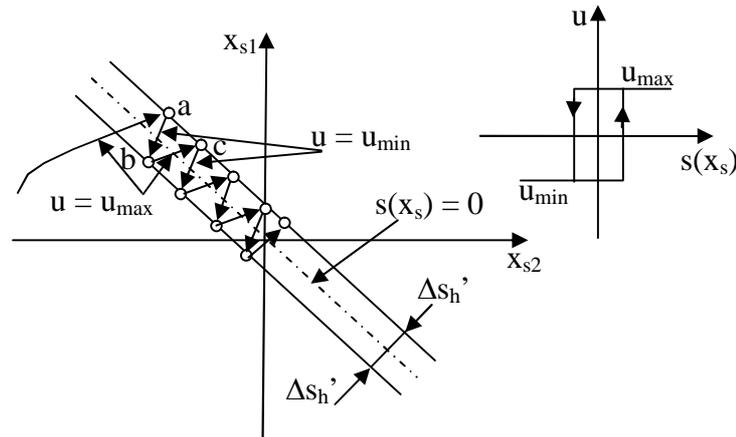


Figure IV.4 : Comutation sur la surface de glissement $s(x_s)$.

L'étude de l'existence du mode de glissement avec cette manière n'est pas très pratique. On introduit au paragraphe suivant la commande équivalente qui donne un caractère simple à l'étude du phénomène du mode de glissement.

IV.2.3) Commande équivalente

Lorsque le SCSV fonctionne en mode de glissement, la loi de commutation respecte toujours la condition (IV.10). Par conséquent, sa dérivée par rapport au temps doit aussi être nulle, c'est-à-dire

$$\dot{\xi}(x_s) = 0 \quad (\text{IV.11})$$

En tenant compte de la loi de commutation donnée par (IV.4) et de l'équation d'état (IV.5), la condition (IV.11) s'écrit

$$\dot{\xi}(x_s) = -k_s^T \dot{x}_s(t) + k_w \dot{w}(t) = -k_s^T (A_s x_s(t) + b_{sv} \psi(t) + b_v \varphi(t)) + k_w \dot{\psi}(t) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Afin que (IV.12) soit vérifiée quelque soit l'instant considéré, il faut que le signal de commande soit égale à la commande équivalente

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{k_s^T b_s} k_s^T (A_s x_s(t) + b_{sv} \psi(t)) + \frac{1}{k_s^T b_s} k_w \dot{\psi}(t) \quad (\text{IV.13})$$

avec la condition intrinsèque d'existence du mode de glissement

$$k_s^T b_s \neq 0 \quad (\text{IV.14})$$

La commande équivalente peut être interprétée comme étant la valeur moyenne que peut prendre le signal de commande lors de la commutation rapide entre u_{\max} et u_{\min} , comme il est représenté à la figure IV.5. Une condition d'existence du mode de glissement est

$$u_{\min} \leq u_{\text{eq}} \leq u_{\max} \quad (\text{IV.15})$$

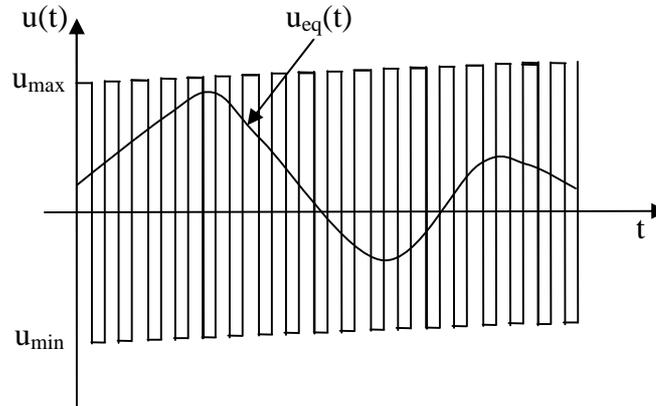


Figure IV.5 : Commande équivalente $u_{\text{eq}}(t)$ comme valeur moyenne lors de la commutation rapide entre u_{\min} et u_{\max} .

IV.2.4) Equation d'état en mode de glissement

Lorsqu'on remplace dans l'équation d'état (IV.5) $u(t)$ par $u_{\text{eq}}(t)$ donnée par (IV.13), on obtient après calcul l'équation d'état en mode de glissement

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b_{\text{sv}}^* \psi(t) + b_{\text{sw}}^* \check{w}(t) \quad (\text{IV.16})$$

avec

$$A_s^* = \left(1 - \frac{1}{k_s^T b_s} b_s k_s^T \right) A_s \quad (\text{IV.17})$$

$$b_{\text{sv}}^* = \left(1 - \frac{1}{k_s^T b_s} b_s k_s^T \right) b_{\text{sv}} \quad (\text{IV.18})$$

$$b_{\text{sw}}^* = \frac{k_w}{k_s^T b_s} b_s \quad (\text{IV.19})$$

Remarque

- La matrice système en mode de glissement A_s^* est singulière et possède une valeur propre en $p=0$, à cause des variables d'état présentent une dépendance linéaire à cause de la condition (IV.10).
- Le « 1 » dans les relations (IV.18)-(IV.20) et dans les expressions matricielles qui sont utilisées dans la suite du cours, est la matrice identité de dimension convenable.

IV.2.5) Solution de l'équation d'état en mode de glissement

Pour trouver la solution de l'équation d'état en mode de glissement, on suppose que les grandeurs de consigne $w(t)$ et de perturbation $v(t)$ soient constantes. Alors, on a $\dot{w}(t) = 0$. En

tenant compte de la valeur initiale $x_s(0)$ du vecteur d'état, et en utilisant la transformation de Laplace, on trouve

$$x_s(p) = (pI_n - A_s^*)^{-1} \left[x_s(0) + b_{sv}^* \frac{v}{p} \right] \quad (\text{IV.20})$$

On constate que la solution dépend indirectement de la consigne w , à travers $x_s(0)$ qui devrait vérifier la condition (IV.10).

Remarque

Le vecteur d'état $x_s^*(t)$ en régime établi, ne peut être calculé avec la condition limite « $p = 0$ » dans (IV.21), puisque la matrice A_s^* est singulière mais, on propose une solution dans la suite du cours.

IV.3) Représentation des phénomènes Transitoires dans le plan d'état

La relation (IV.10) forme un hyperplan appelé plan de commutation, d'ordre « $n_s - 1$ » dans l'espace d'état. Cet hyperplan sépare l'espace d'état en deux parties. Compte tenu des relations (IV.7) pour la commande, on constate que à gauche de l'hyperplan, on a $u = u_{\max}$ et à droite $u = u_{\min}$.

Le point de fonctionnement suit dans l'espace d'état une trajectoire qui résulte de la solution de l'équation d'état (IV.5), en remplaçant $u(t)$ par u_{\max} ou u_{\min} . Lorsque la trajectoire perce l'hyperplan, la grandeur de commande bascule de u_{\max} à u_{\min} ou vice-versa. En régime du mode de glissement, la trajectoire parcourt le plan de commutation lui-même. Si le système est d'ordre deux ($n_s = 2$), on a une droite de commutation représentée à la figure (IV.6).

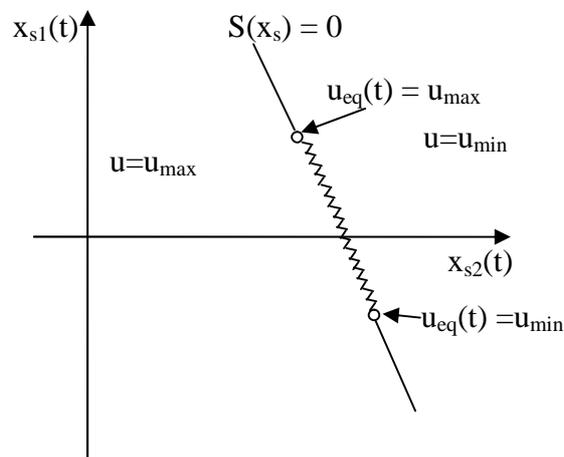


Figure IV.6 : Droite de commutation dans le plan d'état.

Exemple : Calcul de la commande équivalente par le mode de glissement

On considère un système linéaire monovariante, donné par son équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -0.25x_1(t) + 4x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -2x_2(t) + 8u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

On désire calculer la commande équivalente par mode de glissement sans régulateur intégrateur, qui force la sortie du système à suivre un échelon unité, tel que les pôles du système en BF sont : $p_1^*=0, p_2^*=0.5$.

-La matrice système est $A_s = \begin{pmatrix} -0.25 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, le vecteur d'entrée est $b_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, le vecteur de sortie est $c_s^T = (1 \ 1)$.

- Etude de la commandabilité du système :

Matrice de commandabilité : $C = (b_s \ A_s b_s) = \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ 8 & -16 \end{pmatrix}$; $\det(C) = -256 \neq 0$,

Alors, $\text{rang}(C) = 2$, dimension du système, donc le système est commandable.

- Calcul de la commande équivalente $u_{eq}(t)$:

L'expression de $u_{eq}(t)$ est donnée par (IV.13) sans perturbation et signal de consigne constant, donc $v(t) = 0$ et $dw(t)/dt = 0$, on écrit : $u_{eq}(t) = -\frac{1}{k_s^T b} k_s^T A_s x_s(t)$

- Calcul du vecteur des gains de retour k_s : $k_s^T = k_r^T T^{-1}$

T matrice de transformation canonique de réglage tel que $T = (T_1 \ T_2) = (b_s \ (A_s + I_2 a_1) b_s)$ ou, I_2 matrice identité de dimension 2, a_1 coefficient de l'équation caractéristique du modèle non transformé, k_r vecteur des gains de retour, calculé sous la forme canonique de réglage.

- Calcul de T^{-1} : $T_1 = b_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; $T_2 = (A_s + I_2 a_1) b_s = \begin{pmatrix} 32 \\ 2 \end{pmatrix}$, sachant que $a_1 = 2.25$, déduit de

$\det(A_s - pI_2)$. Donc $T = \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, alors, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/32 & 0 \\ -1/128 & 1/8 \end{pmatrix}$.

- Calcul de k_r : $k_r^T = (k_{r1} \ 1)$, avec $k_{r1} = \alpha_1$ coefficient de l'équation caractéristique désirée.

L'équation caractéristique désirée : $D^*(p) = (p - p_1^*)(p - p_2^*) = p^2 + 0.5p$, donc $k_{r1} = \alpha_1 = 0.5$

Donc, $k_r^T = (0.5 \ 1)$, alors $k_s^T = k_r^T T^{-1} = (1/128 \ 1/8)$

- Calcul de vecteur d'état $x^*(t)$ en mode de glissement en fonction des condition initiales:

L'équation d'état en mode de glissement est $\dot{x}^*(t) = A^* x^*(t)$ tel que $x^*(t) = e^{A^* t} x(0)$

- Calcul de A^* : $A^* = \left(I_2 - \frac{b k_s^T}{k_s^T b} \right) A_s = \begin{pmatrix} -1/4 & 4 \\ 1/64 & -1/4 \end{pmatrix}$ avec β_0, β_1 calculés de la même manière que l'exemple donné au chapitre précédent, lors du calcul de la commande optimale en BO.

- $e^{A^* t} = \beta_0 I_2 + \beta_1 A^* = \begin{pmatrix} 0.5(1 + e^{-0.5t}) & 8(1 - e^{-0.5t}) \\ (1 - e^{-0.5t})/32 & 0.5(1 + e^{-0.5t}) \end{pmatrix}$

Donc, $x^*(t) = \begin{pmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5x_1(0) + 8x_2(0) + (0.5x_1(0) - 8x_2(0))e^{-0.5t} \\ x_1(0)/32 + 0.5x_2(0) + (-x_1(0)/32 + 0.5x_2(0))e^{-0.5t} \end{pmatrix}$

Après calcul, on obtient : $k_s^T b = 1, k_s^T A = (-1/512 \ -7/32)$

Donc, $u_{eq}(t) = -(x_1(0)/128 + x_2(0)/8) + (3x_1(0)/512 - 3x_2(0)/32)e^{-0.5t}$

- L'expression de la sortie en mode de glissement est :

$y^*(t) = x_1^*(t) + x_2^*(t) = 8.5(x_1(0)/16 + x_2(0) + 7.5(x_1(0)/16 - x_2(0))e^{-0.5t}$

IV.4) Loi de commutation par retour d'état et régulateur intégrateur

La configuration du SCSV, donnée par la figure IV.3 présente un comportement proportionnel de sorte qu'on obtient une erreur statique en présence d'une grandeur de perturbation. Il est possible de pallier cet inconvénient, en ajoutant un régulateur intégrateur à la loi de commutation par retour d'état.

IV.4.1) Configuration avec loi de commutation par retour d'état et régulateur Intégrateur

La configuration d'un SCSV avec loi de commutation par retour d'état et régulateur intégrateur est représentée à la figure IV.7. Cette dernière est obtenue, en ajoutant un régulateur intégrateur d'entrée la différence entre la consigne $w(t)$ et la sortie à régler $y(t)$ du système. La variable d'état $x_R(t)$ du régulateur intégrateur est alors ajoutée dans l'expression de la loi de commutation, où elle est multipliée par le gain k_R . Cette dernière devient donc

$$\xi(x_s, x_R) = -k_s^T x_s(t) + k_R x_R(t) + k_w w(t) \tag{IV.21}$$

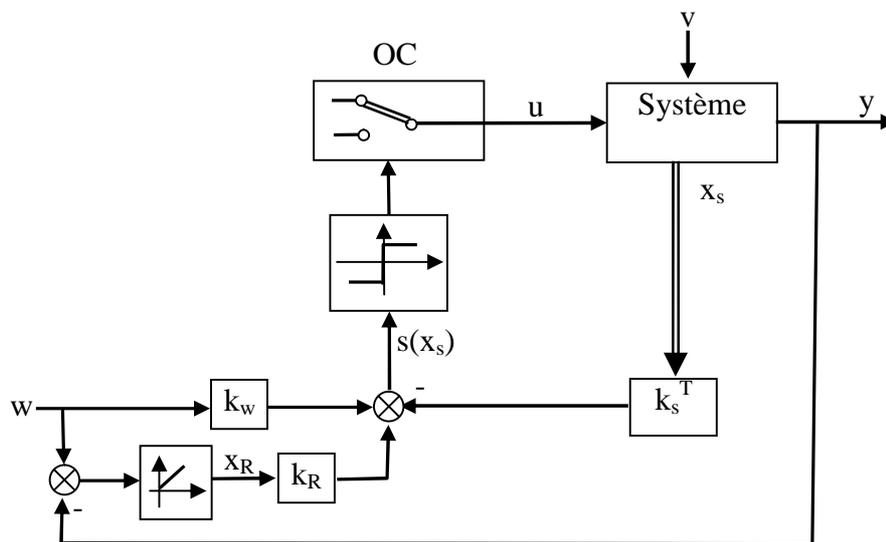


Figure IV.7 : Configuration avec loi de commutation par reour d'état et régulateur intégrateur.

IV.4.2) Equation d'état du système glogal

Le vecteur d'état $x(t)$ du système global (système à commander et régulateur intégrateur) de dimension « n_s+1 », est composé de l'état du système à commander $x_s(t)$ et celui du régulateur intégrateur $x_R(t)$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \tag{IV.22}$$

La loi de commutation s'écrit alors, sous forme compacte

$$\xi(x) = -k^T x(t) + k_w w(t) \tag{IV.23}$$

avec le vecteur ligne des gains du retour d'état

$$k^T = [k_s^T \quad -k_R] \quad (IV.24)$$

En tenant compte de l'équation de sortie (IV.6), l'équation d'état du régulateur intégrateur s'écrit :

$$\dot{x}_R(t) = \frac{1}{T_i}(\psi(t) - y(t)) = \frac{1}{T_i}(\psi(t) - c_s^T x_s(t)) = \frac{1}{T_i}(\psi(t) - c^T x(t)) \quad (IV.25)$$

où T_i est la constante de temps de l'intégration et le vecteur ligne de sortie est

$$c^T = [c_s^T \quad 0] \quad (IV.26)$$

L'équation d'état du système global est composée des équations (IV.5) et (IV.25) et elle s'écrit sous forme compacte

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b\psi(t) + b_v\dot{\psi}(t) + b_w\ddot{\psi}(t) \quad (IV.27)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ -\frac{1}{T_i}c_s^T & 0 \end{bmatrix}; b = \begin{bmatrix} b_s \\ 0 \end{bmatrix}; b_v = \begin{bmatrix} b_{sv} \\ 0 \end{bmatrix}; b_w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_i} \end{bmatrix} \quad (IV.28)$$

La loi de commande (IV.8) devient

$$\psi(t) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2} + \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2} \operatorname{sgn}(\xi(x)) \quad (IV.29)$$

avec la fonction $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est donnée par (IV.9).

IV.4.3) Commande équivalente

En mode de glissement, la trajectoire d'état suit le plan de commutation définie par la relation $s(x) = 0$ et la dérivée de cette relation s'anule aussi. Des équations (IV.23) et (IV.27), on obtient la relation

$$\begin{aligned} \xi(x) &= -k^T \dot{x}(t) + k_w \dot{w}(t) \\ &= -k^T (Ax(t) + b\psi(t) + b_v\dot{\psi}(t) + b_w\ddot{\psi}(t)) + k_w \dot{w}(t) = 0 \end{aligned} \quad (IV.30)$$

On déduit alors, l'expression de la commande équivalente

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{k^T b} k^T (Ax(t) + b_v\dot{\psi}(t) + k_w\ddot{\psi}(t)) + \frac{1}{k^T b} k_w \dot{w}(t) \quad (IV.31)$$

avec la condition d'existence du mode de glissement

$$k^T b \neq 0 \quad (IV.32)$$

ainsi que la condition (IV.16).

IV.4.4) Equation d'état en mode de glissement

On obtient l'équation d'état en mode de glissement, en remplaçant (IV.31) dans (IV.26), on obtient

$$\dot{x}(t) = A^* x(t) + b_v^* \psi(t) + b_w^* w(t) + b_w^* \dot{w}(t) \quad (\text{IV.33})$$

avec

$$A^* = \left(1 - \frac{1}{k^T b} b k^T\right) A \quad (\text{IV.34})$$

$$b_v^* = \left(1 - \frac{1}{k^T b} b k^T\right) b_v \quad (\text{IV.35})$$

$$b_w^* = \left(1 - \frac{1}{k^T b} b k^T\right) b_w \quad (\text{IV.36})$$

$$b_w^* = \frac{k_w}{k^T b} b \quad (\text{IV.37})$$

avec la matrice système en mode de glissement A^* est singulière.

IV.5) Imposition des pôles en mode de glissement

Le calcul des gains du retour d'état est effectué par la méthode d'imposition des pôles. Cette méthode nécessite la forme canonique de l'équation d'état en mode de glissement. Le gain d'intervention direct de la consigne est déterminé, en considérant le régime stationnaire ainsi que la constante d'intégration lorsque, on utilise un régulateur intégrateur.

IV.5.1) Invariance du mode de glissement par rapport à une transformation linéaire

Le mode de glissement est invariant par rapport à une transformation linéaire, en particulier la commande équivalente ainsi que les pôles. Ceci est montré dans les sections suivantes.

IV.5.1.1) Transformation linéaire de l'équation d'état

La transformation linéaire du vecteur d'état $x(t)$ est

$$x(t) = T \tilde{x}(t) \quad (\text{IV.38})$$

Le vecteur d'état transformé $\tilde{x}_t(t)$ a la même dimension que $x(t)$, c'est-à-dire « n ». La matrice de transformation T doit être carrée et régulière.

Lorsqu'on remplace dans l'équation d'état (IV.27) $x(t)$ par $T^{-1} \tilde{x}_t(t)$, on obtient après calcul

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_t \tilde{x}(t) + b_t \psi(t) + b_{vt} \dot{\psi}(t) + b_{wt} w(t) \quad (\text{IV.39})$$

avec

$$A_t = T A T^{-1}; \quad b_t = T b; \quad b_{vt} = T b_v; \quad b_{wt} = T b_w \quad (\text{IV.40})$$

La loi de commutation (IV.23) devient

$$\dot{\xi}(x_t) = -k_t^T x_t(t) + k_w w(t) \quad (\text{IV.41})$$

avec

$$k_t^T = k^T T^{-1} \quad (\text{IV.42})$$

IV.5.1.2) Commande équivalente du système transformé

Aux paragraphes précédents, on a en mode de glissements $s(x(t)=0$ aussi $\dot{s}(x(t)) = 0$, on a pour le système transformé, par analogie

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(x_t) &= -k_t^T \dot{x}_t(t) + k_w \dot{w}(t) \\ &= -k_t^T (A_t x_t(t) + b_{vt} \psi(t) + b_{wt} w(t)) + k_w \dot{w}(t) = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.43})$$

On déduit alors l'expression de la commande équivalente

$$u_{eq}(t) = -\frac{1}{k_t^T b_t} k_t^T (A_t x_t(t) + b_{vt} \psi(t) + b_{wt} w(t)) + \frac{1}{k_t^T b_t} k_w \dot{w}(t) \quad (\text{IV.44})$$

En mode de glissement $u_{eq}(t)$ doit respectée la condition (IV.16).

IV.5.1.3) Invariance de la commnde équivalente par rapport à la transformation linéaire

On montre dans ce paragraphe l'invariance de la commande équivalente $u_{eq}(t)$ par rapport à la transformation linéaire, en vérifiant l'invariance des termes de $u_{eq}(t)$ avant et après la transformation.

$$k_t^T b_t = k^T T^{-1} T b = k^T b \quad (\text{IV.45})$$

$$k_t^T A_t x_t(t) = k_t^T T^{-1} T A T^{-1} T x(t) = k^T A x(t) \quad (\text{IV.46})$$

$$k_t^T b_{vt} \psi(t) = k_t^T T^{-1} T b_v \psi(t) = k^T b_v \psi(t) \quad (\text{IV.47})$$

$$k_t^T b_{wt} w(t) = k_t^T T^{-1} T b_w w(t) = k^T b_w w(t) \quad (\text{IV.48})$$

En remplaçant les relations (IV.45)-(IV.48) dans (IV.44), on obtient (IV.31). Donc, la commande équivalente est invariante par rapport à la transformation linéaire alors, de même pour le domaine du mode de glissement.

IV.5.1.4) Equation d'état en mode de glissement du système transformé

En remplaçant $u_{eq}(t)$ donnée par (IV.44) dans (IV.39), on obtient l'équation l'état du système transformé en mode de glissement

$$\dot{x}_t^*(t) = A_t^* x_t^*(t) + b_{vt}^* \psi(t) + b_{wt}^* w(t) + b_{wt}^* \dot{w}(t) \quad (\text{IV.49})$$

avec

$$A_t^* = \left(1 - \frac{1}{k_t^T b_t} b_t k_t^T \right) A_t \quad (\text{IV.50})$$

$$b_{vt}^* = \left(1 - \frac{1}{k_t^T b_t} b_t k_t^T \right) b_{vt} \quad (\text{IV.51})$$

$$\mathbf{b}_{wt}^* = \left(1 - \frac{1}{\mathbf{k}_t^T \mathbf{b}_t} \mathbf{b}_t \mathbf{k}_t^T \right) \mathbf{b}_{wt} \quad (\text{IV.52})$$

$$\mathbf{b}_{wt}^* = \frac{\mathbf{k}_w}{\mathbf{k}_t^T \mathbf{b}_t} \mathbf{b}_t \quad (\text{IV.53})$$

IV.5.1.5) Invariance des pôles par rapport à la transformation linéaire

Afin de vérifier l'invariance des pôles, il suffit de vérifier l'invariance de l'équation caractéristique de la matrice d'état (IV.50), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t^* &= \left(\mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} - \frac{1}{\mathbf{k}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{b}} \mathbf{T} \mathbf{b} \mathbf{k}^T \mathbf{T}^{-1} \right) \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} \\ &= \mathbf{T} \left(1 - \frac{1}{\mathbf{k}^T \mathbf{b}} \mathbf{b} \mathbf{k}^T \right) \mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{A} \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T} \mathbf{A}^* \mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \quad (\text{IV.54})$$

où \mathbf{A}^* est la matrice du système avant la transformation, donnée par (IV.34).

Les pôles du système transformé, c'est les valeurs propre de la matrice \mathbf{A}_t^* , ils sont donnés par l'équation caractéristique

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{p} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_t^*) &= \det(\mathbf{p} \mathbf{T} \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T} \mathbf{A}^* \mathbf{T}^{-1}) \\ &= \det(\mathbf{T} (\mathbf{p} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^*) \mathbf{T}^{-1}) = \det \mathbf{T} \det(\mathbf{p} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^*) \det \mathbf{T}^{-1} \\ &= \det(\mathbf{p} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^*) \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

Sachant que $\det \mathbf{T} = 1 / \det \mathbf{T}^{-1}$.

Donc, les valeurs propre de la matrice \mathbf{A}_t^* du système transformé sont les mêmes que la matrice \mathbf{A}^* du système avant la transformation, c'est-à-dire les pôles sont invariants par rapport à la transformation linéaire.

IV.5.2) Détermination des coefficients de retour d'état en utilisant la forme canonique de Commande

On a montré à la section précédente, l'invariance des pôles par rapport à la transformation linéaire. La détermination des coefficients de retour donnés par le vecteur ligne \mathbf{k}^T , d'état par la méthode d'imposition de pôles, on peut choisir une forme quelconque de l'équation d'état. Or, la forme la plus simple pour la méthode d'imposition de pôles, est la forme canonique de commande.

IV.5.2.1) Forme canonique de commande

L'équation caractéristique du système en mode de glissement est

$$D(p) = \det(\mathbf{p} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}^*) = p^n + \alpha_{n-1} p^{n-1} + \alpha_{n-2} p^{n-2} + \dots + \alpha_1 p + \alpha_0 = 0 \quad (\text{IV.56})$$

avec la matrice \mathbf{A}^* est donnée par (IV.35).

Soient p_i pour $i = 1, \dots, n$, les pôles imposés (choisis) alors, le polynôme imposé est

$$D(p) = (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) \quad (\text{IV.57})$$

On obtient les coefficient α_i pour $i = 1, \dots, n$ à partir des n pôles imposés, par identification des coefficient des pôleynome (IV.56) et (IV.57) (ou à l'aide du théorème de Viète, ou en utilisant l'algorithme de Leverrier spécialisé).

On utilise la forme canonique de commande A_c et b_c de la matrice A et le vecteur b respectivement et ils sont donnés par

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; b_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.58})$$

les coefficient a_i pour $i = 1, \dots, n$ sont les coefficients de l'équation caractéristique du système original (avant transformation), sachant que A et b sont donnés par (IV.28).

IV.5.2.2) Détermination du vecteur ligne des gains de retour d'état de la forme canonique de commande

On détermine le vecteur des gains de retour d'état, en utilisant la forme canonique de commande, dont le vecteur ligne est exprimé par

$$k_c^T = [k_{c1} \quad k_{c2} \quad \dots \quad k_{cn}] \quad (\text{IV.59})$$

Dans l'expression (IV.35) de la matrice A^* , on a besoin des termes $k_c^T b_c$ et $b_c k_c^T$, compte tenu de (IV.58), on obtient

$$k_c^T b_c = k_{cn} \quad (\text{IV.60})$$

et

$$b_c k_c^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{c1} & k_{c2} & k_{c3} & \dots & k_{cn} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.61})$$

On obtient après calcul

$$1 - \frac{1}{k_c^T b_c} b_c k_c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\rho_{c1} & -\rho_{c2} & -\rho_{c3} & \dots & -\rho_{cn} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.62})$$

avec

$$\rho_{ci} = \frac{k_{ci}}{k_{cn}}, \text{ pour } i = 1, \dots, n \quad (\text{IV.63})$$

On obtient l'expression de la matrice A_c^* du système en mode de glissement, sous forme canonique

$$A_c^* = \left(1 - \frac{1}{k_c^T b_c} b_c k_c\right) A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho_{c1} & -\rho_{c2} & \cdots & -\rho_{cn-1} \end{bmatrix} \quad \text{IV.64}$$

On constate que la matrice A_c^* est singulière (première colonne identiquement nulle), de même pour A_c^* . On formule aussi la forme canonique de A_c^* , en utilisant les coefficients de l'équation caractéristique (IV.56) donc, on écrit

$$A_c^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{(IV.65)}$$

Par identification des éléments de la dernière ligne entre (IV.64) et (IV.65), on obtient

$$\alpha_0 = 0 \quad \text{(IV.66)}$$

$$\alpha_i = \rho_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad \text{(IV.67)}$$

On déduit de (IV.63)

$$k_{ci} = \rho_{ci} k_{cn} = \alpha_i k_{cn}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, n-1 \quad \text{(IV.68)}$$

Le coefficient k_{cn} est choisie librement et les coefficients α_i sont en fonction des pôles imposés.

Selon le théorème de Viète le coefficient α_0 de l'équation caractéristique est en fonction des pôles imposé

$$\alpha_0 = (-1)^n p_1 p_2 \dots p_n \quad \text{(IV.69)}$$

L'équation (IV.66) et compte tenu de (IV.69), implique qu'on doit imposé un pôle à l'origine (exemple $p_n = 0$).

IV.5.2.3) Vecteur ligne des gains de retour d'état de la forme canonique de commande

On déduit le vecteur ligne des gains de retour d'état du système original à commander, à partir du vecteur calculé au paragraphe précédent, système sous forme canonique. On a la relation

$$x_f^T(t) = T_c^T x_c^T(t) \quad \text{(IV.70)}$$

avec T_c La matrice de transformation canonique. On peut écrire

$$k_c^T x_f^T(t) = k_c^T T_c^T x_c^T(t) = k^T x_c^T(t) \quad \text{(IV.71)}$$

On déduit de (IV.71) par identification, le vecteur ligne k^T des gains de retour d'état du système original

$$k^T = k_c^T T_c \quad (IV.72)$$

On constate qu'il n'est pas nécessaire de transformer le système original sous la forme canonique de réglage. Il suffit de disposer de la matrice de transformation canonique T_c et des éléments du vecteur k_c^T qui dépendent de l'équation caractéristique imposée.

IV.5.3) Détermination des coefficients de retour d'état sans l'utilisation de la forme canonique de commande

Dans cette section, on détermine la matrice de transformation canonique de commande T_c , nécessaire pour le calcul du vecteur ligne des gains du système original.

IV.5.3.1) Détermination de la matrice de la transformation canonique de commande

La matrice T_c transforme la matrice A et le vecteur b du système original avec régulateur intégrateur donnés par (IV.28).

Selon la relation générale (IV.42) d'une transformation, on écrit

$$A_c T_c = T_c A; \quad b_c = T_c b \quad (IV.73)$$

On décompose la matrice de transformation T_c en ses lignes selon

$$T_c = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_n^T \end{bmatrix} \quad (IV.74)$$

En utilisant la forme canonique de commande donnée par (IV.58) et la première relation de (IV.73), on écrit

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_{n-1}^T \\ t_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_{n-1}^T \\ t_n^T \end{bmatrix} A \quad (IV.75)$$

après calcul on obtient le système d'équation

$$\begin{cases} t_2^T = t_1^T A \\ t_3^T = t_2^T A = t_1^T A^2 \\ \vdots \\ t_n^T = t_{n-1}^T A = t_1^T A^{n-1} \end{cases} \quad (IV.76)$$

$$-a_0 t_1^T - a_1 t_2^T - \cdots - a_{n-1} t_n^T = t_n^T A \quad (IV.77)$$

L'équation (IV.77) est linéairement dépendante des équations du système (IV.76), donc elle est en plus.

La deuxième relation de (IV.73) donne

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ \vdots \\ t_{n-1}^T \\ t_n^T \end{bmatrix} b \quad (\text{IV.78})$$

après calcul et tenant compte de (IV.76), on obtient

$$\begin{cases} 0 = t_1^T b \\ 0 = t_2^T b = t_1^T A b \\ \vdots \\ 0 = t_{n-1}^T b = t_1^T A^{n-2} b \\ 1 = t_n^T b = t_1^T A^{n-1} b \end{cases} \quad (\text{IV.79})$$

On peut réunir le système (IV.79) sous forme matricielle comme suit

$$t_1^T [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-2}b \quad A^{n-1}b] = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad (\text{IV.80})$$

Dans la relation (IV.80), on repère la matrice de commandabilité

$$C = [b \quad Ab \quad \dots \quad A^{n-2}b \quad A^{n-1}b] \quad (\text{IV.81})$$

Donc, la première ligne de la matrice de transformation canonique T_c est donnée par

$$t_1^T = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] C^{-1} \quad (\text{IV.82})$$

Le reste des ligne de T_c sont calculées par (IV.76), avec la condition que le système soit commandable, c'est-à-dire

$$\det C \neq 0 \quad (\text{IV.83})$$

IV.5.3.2) Relation finale pour la détermination du vecteur ligne des coefficients de retour d'état

Afin d'éviter l'inversion de la matrice de commandabilité C dans (IV.82), on utilise (IV.80) pour calculer le vecteur ligne t_1^T . On obtient après développement de (IV.80) un système d'équations linéaires d'inconnus les composantes de ce vecteur. La matrice de transformation T_c de dimension $n \times n$, devient sachant que t_1^T est calculé et tenant compte de (IV.79)

$$T_c = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_1^T A \\ \vdots \\ t_1^T A^{n-2} \\ t_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.84})$$

Le vecteur ligne k_c^T s'écrit, en tenant compte de (IV.59) et (IV.63)

$$\begin{aligned}
k_c^T &= k_{cn} [\rho_{c1} \quad \rho_{c2} \quad \cdots \quad \rho_{c(n-1)} \quad 1] \\
&= k_{cn} [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1} \quad 1] \\
&= k_{cn} [\alpha^T \quad 1]
\end{aligned} \tag{IV.85}$$

avec

$$\alpha^T = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_{n-1}] \tag{IV.86}$$

Le vecteur α^T contient les coefficients de l'équation caractéristique imposée (désirée).
On obtient l'expression du vecteur ligne k^T du système original

$$k^T = k_{cn} [\alpha^T \quad 1] T_c \tag{IV.87}$$

IV.5.3.3 Considération concernant le choix des pôles

Au paragraphe IV.5.2.2, on a constaté qu'un des n pôles du système doit être choisi nul (exemple $p_n=0$), car la matrice A^* est singulière. Les $n-1$ pôles restants doivent être choisis à partie réelle négative pour garantir la stabilité. Un choix judicieux est de choisir des pôles complexes conjugués avec partie réelle égale à la partie imaginaire. On obtient un amortissement relatif optimal. De plus, il faut garantir un amortissement absolu minimal, c'est-à-dire, la partie réelle est à gauche d'une droite de valeur minimale négative. Dans le cas où on a plusieurs pôles, on les choisit sur la même vertical, c'est-à-dire ils ont la même partie réelle négative (voir figure IV.8 ci-dessous).

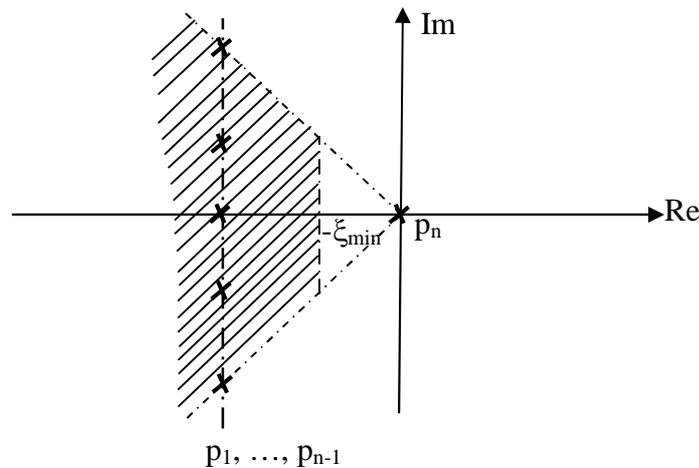


Figure IV.8 : Imposition des pôles.

IV.6) Conclusion

La commande par mode de glissement est très robuste, car une fois le système atteint ce mode est resté, sa dynamique est définie par la surface de glissement, donc sa dynamique est indépendante des paramètres variables. Mais à condition d'ajouter un terme avec la commande équivalente qui dépend du signe de la surface de commutation.

Les limites de la commande par mode de glissement sont montrées, en considérant les termes de variations paramétriques dans le modèle utilisé du système. En réalité, ce qui est important c'est la bornitude de ces variations paramétriques qui apparaît dans l'expression de la commande.

Le phénomène de réticence (chattering en anglais) est atténué ou éliminé pour de faibles variations paramétriques en remplaçant la fonction discontinue ($\text{sgn}(\cdot)$) avec un terme continu.

Conclusion générale

Le support de cours présenté, est outils pour les étudiants de génie électrique nécessitant la compréhension de concepts d'asservissement et le calcul d'une classe de commande avancée à savoir, la commande adaptative, la commande optimale et la commande par mode de glissement.

La modélisation est une étape nécessaire pour la commande des systèmes. La validation de ce dernier est impérative avant le calcul de la loi de commande. Le choix du modèle utilisé dans la synthèse (modèle de calcul) nous simplifie les calculs et nous assure dans notre démarche. Le signal de commande n'alimente jamais l'actionneur car les niveaux d'énergie et même leur nature dans certains cas sont différents. Donc, le pré-actionneur est nécessaire dans les tâches de commande des systèmes. L'utilisation d'un vocabulaire correct est précis en automatique et en particulier en commande des systèmes est de rigueur.

La commande adaptative apporte une solution à la commande des systèmes à paramètres variables ou inconnus. En général, dans le premier cas, on utilise la commande directe et dans le deuxième cas la commande indirecte. Cette commande peut être utilisée pour la diagnostique des défauts, en ajoutant un algorithme qui exprime les paramètres physiques du système, en fonction de ceux du modèle utilisé et on complète aussi avec un autre algorithme qui compare la valeur des paramètres entre les instants de calcul. Si pendant une longue période les paramètres varient d'une manière incohérente, on peut diagnostiquer le défaut. On peut aussi utiliser des algorithmes d'adaptation paramétrique du type moindres carrées récursifs simples ou étendue pour comparer les performances avec celui du gradient, ou si ce dernier présente des performances insuffisantes.

La commande optimale présentée dans ce document est simple car sa mise en œuvre est immédiate, en particulier, celle avec critère quadratique à horizon infini. Le cas à horizon fini, la résolution de l'équation de « Riccati » nécessite l'intégration à rebours (de l'instant final à l'instant initial). Ce dernier cas reste toujours un problème de recherche ouvert. Nous pouvons utiliser un critère qui dépend de la déviation de l'état par rapport à sa consigne. Dans le cas où on a une certitude que la commande dépasse le domaine admissible, il est nécessaire d'introduire des contraintes sur cette dernière. De même pour les états du système. Dans les deux derniers problèmes, le calcul des variations n'est plus valable et il faut utiliser d'autres théories à savoir la programmation dynamique.

La commande par mode de glissement est très robuste car une fois le système atteint ce mode est resté, sa dynamique est définie par la surface de glissement, donc sa dynamique est indépendante des paramètres variables. Mais à condition d'ajouter un terme avec la commande équivalente qui dépend du signe de la surface de commutation.

Les limites de la commande par mode de glissement sont montrées, en considérant les termes de variations paramétriques dans le modèle utilisé du système. En réalité, ce qui est important c'est la bornitude de ces variations paramétriques qui apparaît dans l'expression de la commande.

Le phénomène de réticence (chattering en anglais) est atténué ou éliminé pour de faibles variations paramétriques en remplaçant la fonction discontinue ($\text{sgn}(\cdot)$) avec un terme continu.

Références bibliographiques

-
- [1] B. C. Kio, "Automatic control systems". Englewood : Prentice hall inc, 1990
- [2] M. Rivoire et J-L. Ferrier, « Cours d'automatique. Tome 2, Asservissement, régulation commande analogique ». Paris : Eyrolles, 1994.
- [3] Y. Granjon, « Automatique : systèmes linéaires continus, systèmes non linéaires, systèmes échantillonnés, systèmes à événements discrets ». Paris : Dunod, 2010
- [4] P. Codron et S. Le Ballois, « Automatique : systèmes linéaires et continus ». Paris : Francis Lefebvre, 1998
- [5] P. Prouvost, « Automatique : contrôle et régulation ». Paris : Dunod, 2010.
- [6] R. Hanus, « Automatique avancée Volume 1 : Techniques d'identification et d'estimation ». Paris : Lavoisier, 2007.
- [7] J-Y. Fabert, « Automatisme et automatique : cours et exercices corrigés ». Paris : Ellipses, 2005.
- [8] R. Konn, « Commande analogique et numérique des systèmes : Méthodes fréquentielle et polynomiale, espace d'état ». Paris : Ellipses, 2010.
- [9] I. D. Landau, « Commande des systèmes : Conception, identification et mise en œuvre ». Paris : Hermès Science Publications, 2002.
- [10] J. D Joseph et al., « Systèmes asservis : Cours et problèmes ». Mc Graw-Hill, 1994.
- [11] M. Zelmat, « Automatisation des processus industriels. Tome 2 : commande modale et adaptative ». Alger : OPU, 2001
- [12] R. Lozano et D. Taoutaou, « Commande adaptative et applications ». Paris : Hermès Science Publications, 2001.
- [13] D. Alazar, « Robustesse et commande optimale ». Masson 1990.
- [14] R. Boudarel et al., « Commande optimale des processus ». Masson 1989.
- [15] J-P. Babary et W. Pelczewski, « Commande optimale des systèmes continus déterministes ». Masson 1985.
- [16] A-P. Sage et C-C. White., "Optimum system control". Printice Hall 1977.
- [17] P. Borne et F. Rotella, « Commande optimale ». Technique de l'ingénieur, tome S2 : informatique industriel, juillet 1996.
- [18] S. N. Desineni, « Optimal control system ». CRC Press 2003.
- [19] V.I. Utkin, «Sliding mode and their application in variable structure system". Mir, Moscou 1978.
- [20] V.I. Utkin, « Variable structure system with sliding mode and their application in". IEEE Transaction, vol. AC-22, N° 2, pp. 212-222, 1977.
- [21] H. Buhler, « Réglage par mode de glissement ». Presse polytechnique romandes, Lausanne, 1983.
- [22] H. Buhler, « Réglage échantillonnés, vol. 2, Traitement dans l'espace d'état ». Presse polytechnique romandes, Lausanne, 1983.
- [23] H. Buhler, « Réglage échantillonnés, vol., Traitement par la transformation en z ». Presse polytechnique romandes, Lausanne, 1982.