Chapitre 2

Cinématique

Introduction:

La cinématique est l'étude du mouvement des corps. Nous ne considérerons que des corps de faibles dimensions de sorte qu'ils seront toujours assimilés à des points appelés mobiles. Les grandeurs physiques de la cinématique sont le temps, la position, la vitesse et l'accélération.
Étudier le mouvement d'un mobile veut dire :

a) trouver l'équation de la trajectoire du mobile ;
b) trouver la relation mathématique (une équation) entre vitesse et temps ;
c) trouver la relation entre position et temps ;
d) trouver la relation entre vitesse et position.

Référentiel et repère :

Référentiel :

La description d'un mouvement se fait par rapport à un objet, choisi comme référence, appelé référentiel. La description du mouvement n'est pas la même dans tous les référentiels.

Définition : Le référentiel est un objet de référence par rapport auquel on étudie un mouvement. Il peut être matérialisé par un seul corps ou par un ensemble de corps qui restent à distance constante les uns des autres.

Exemples de référentiels :

- le laboratoire, la salle de classe, un wagon, un carrousel, . . .
- le référentiel terrestre : son centre est le centre de la Terre, ses axes sont liés à des points fixes sur la Terre. On l'utilise pour décrire tous les mouvements sur la Terre. Les référentiels laboratoire et salle de classe sont équivalents au référentiel terrestre.
- le référentiel géocentrique : son centre est le centre de la Terre, ses axes sont dirigés vers des étoiles lointaines considérées comme fixes. On l'utilise par ex. pour décrire le mouvement des satellites;
- le référentiel héliocentrique : son centre est le soleil, ses axes sont dirigés vers des étoiles lointaines considérées comme fixes. On l'utilise p.ex. pour décrire le mouvement des planètes;

Repère :

Pour décrire le mouvement d'un mobile, un observateur dans un référentiel doit se munir:

- d'un repère pour déterminer la position du mobile ;
- d'une horloge.

Un repère est déterminé par une origine O et par une base, le plus souvent orthonormée.
Exemple : repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé à 3 dimensions.

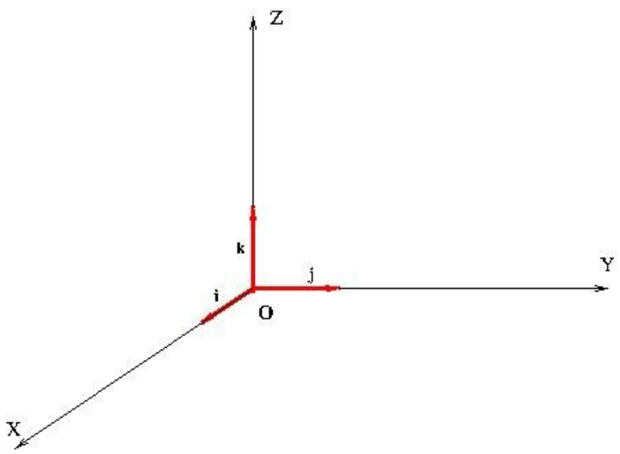

Fig 2.1

Dans le domaine des sciences comme dans la vie courante, une horloge permet de déterminer :

- la durée ou l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux événements ;
- la date ou l'instant auquel un événement a lieu.

L'unité S.I. (Système International d'Unités) du temps est la seconde (s).

Trajectoire:

On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps. Elle est représentée par une courbe dans l'espace (figure 2.2). Comme toute courbe, la trajectoire est déterminée, dans un repère donné, par son équation mathématique. La trajectoire dépend du choix du référentiel et du repère.

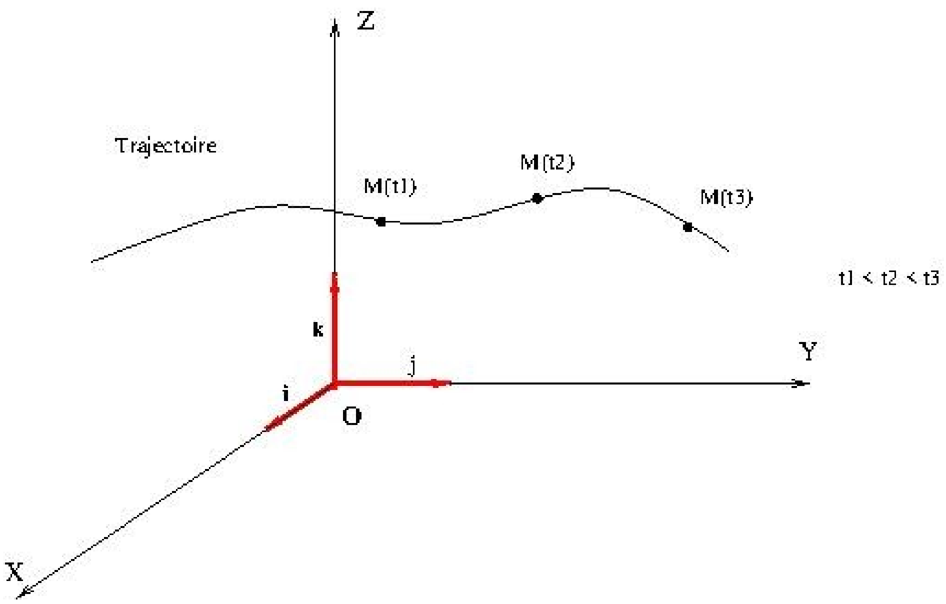

Fig 2.2

Position :

Coordonnées cartésiennes :

Soit M le mobile et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère orthonormé choisi. La position du mobile est repérée à chaque instant par les coordonnées (x, y, z) du vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

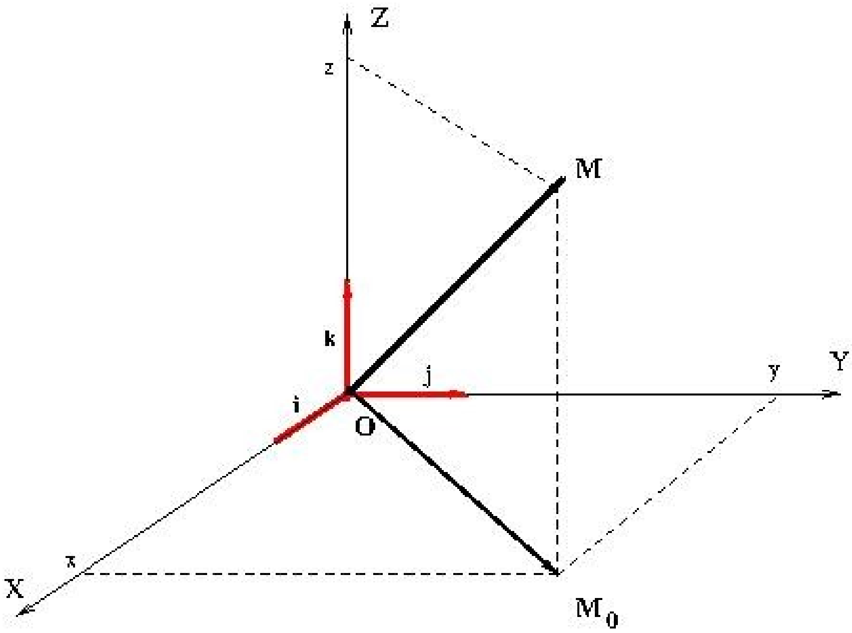

Fig 2.3

Dans la base du repère:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (2.1)$$

x, y et z sont appelées les coordonnées cartésiennes du point M.

S'il y a mouvement, les coordonnées x, y et z varient au cours du temps. Les fonctions $x = f(t)$, $y = g(t)$ et $z = h(t)$ sont appelées équations horaires ou équations paramétriques du mouvement.

Abscisse curviligne :

Si la trajectoire d'un mobile M est connue, on peut l'orienter et choisir un point origine A. La valeur algébrique de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est l'abscisse curviligne s du point M.

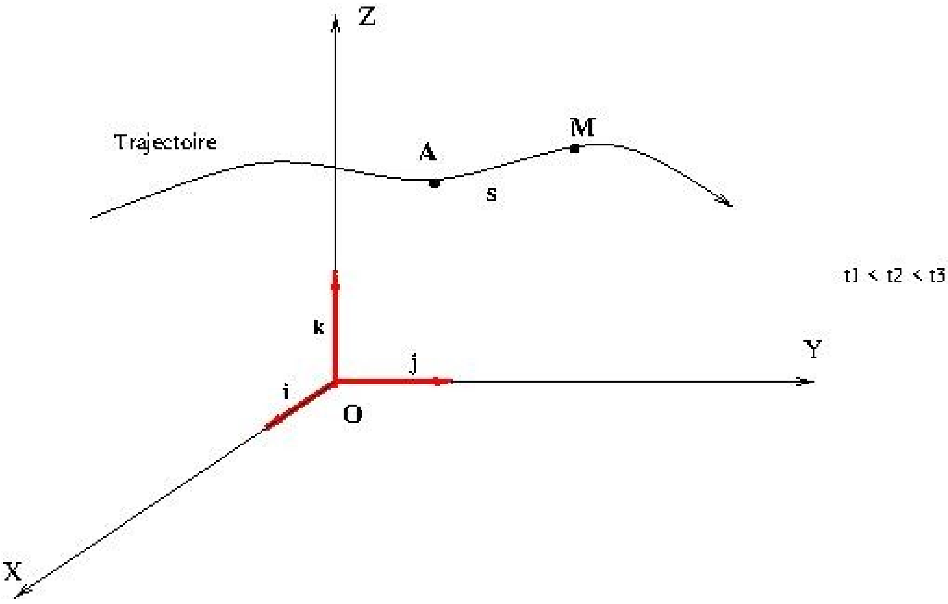

Fig 2.4

Signe de l'abscisse curviligne:

- s > 0 si en allant de A à M on se déplace dans le sens de l'orientation.
- s < 0 si en allant de A à M on se déplace dans le sens inverse de l'orientation.

On oriente, dans la mesure du possible, la trajectoire dans le sens du mouvement. L'abscisse curviligne est liée au temps par la relation $s=f(t)$, appelée équation horaire du mouvement.

Vecteur vitesse d'un point :

La vitesse d'un mobile caractérise la variation de sa position au cours du temps. On distingue vitesse moyenne et vitesse instantanée.

Vitesse moyenne :

Si un point mobile se trouve en M_1 à l'instant t_1 et en M_2 à l'instant t_2, la vitesse moyenne au cours du déplacement de M_1 vers M_2 s'écrit comme ci-dessous :

$$V_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} \qquad (2.2)$$

L'unité S.I. (système international) de la vitesse est le m/s.

Vitesse instantanée algébrique :

La vitesse instantanée donne des renseignements plus précis que la vitesse moyenne : elle définit la vitesse du mobile à chaque instant. Si au cours d'un intervalle de temps t, la vitesse ne varie pas d'un instant à l'autre, c'est à dire qu'elle est constante, il est évident que pour cet intervalle de temps, la vitesse instantanée à chaque instant est égale à la vitesse moyenne.
Si par contre la vitesse varie d'un instant à l'autre, la vitesse instantanée s'obtient en réduisant la distance sur laquelle la vitesse est mesurée de sorte qu'on puisse admettre que la vitesse ne varie

plus sur cette distance tellement petite. La durée mesurée devient plus petite aussi et la vitesse instantanée en un point M est :

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{dt}} \tag{2.3}$$

Vecteur vitesse :

On définit le vecteur vitesse moyenne entre M_1 et M_2 par :

$$\vec{V}_m = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

En introduisant l'origine O du repère et en utilisant la relation de Chasles:

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 O} + \overrightarrow{\mathrm{OM}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OM}_2} - \overrightarrow{\mathrm{OM}_1} = \Delta \overrightarrow{\mathrm{OM}} \tag{2.5}$$

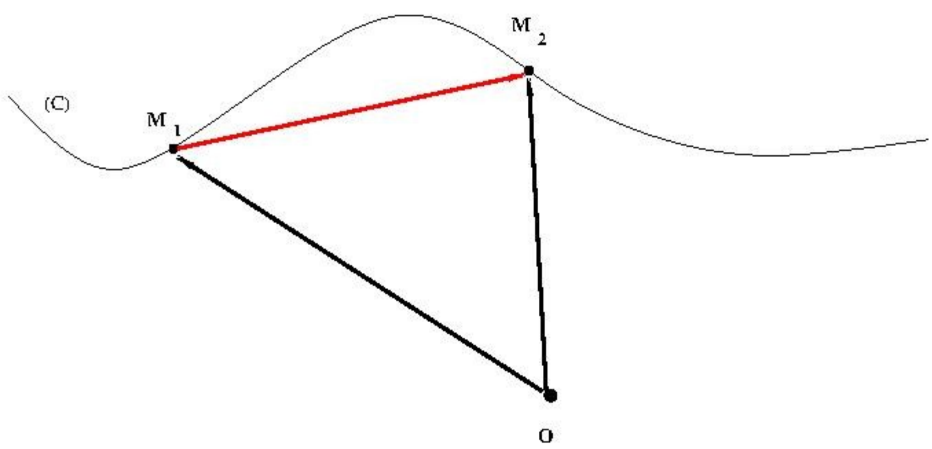

Fig 2.5

Quand $\Delta t \to 0$, les points M1 et M2 se rapprochent pour donner un point M et la direction de $\vec{V}_m$devient la direction de la tangente à la trajectoire en M. Le vecteur vitesse moyenne devient le vecteur vitesse instantanée en M, tel que:

$$\vec{V}_M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta t} = \frac{d\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}} \tag{2.6}$$

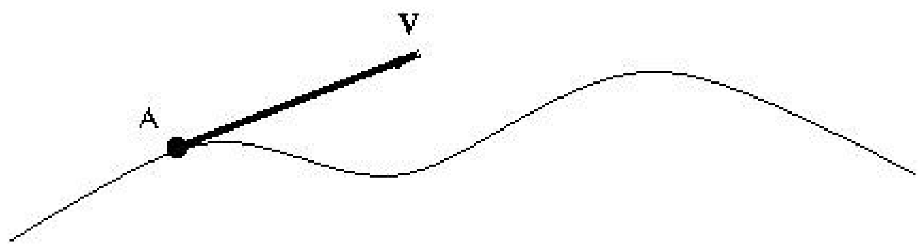

Fig 2.6

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le vecteur $\vec{V}$ s'exprime comme suit :

$$\overrightarrow{V_M} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \qquad (2.7)$$

avec :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \\ v_y = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} \\ v_z = \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}} \end{cases} \qquad (2.8)$$

Le module du vecteur vitesse est donné par l'expression ci-dessous :

$$V = \left\| \overrightarrow{V_M} \right\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \qquad (2.9)$$

Accélération:

L'accélération d'un mobile caractérise la variation de sa vitesse au cours du temps. On distingue l'accélération moyenne $\overrightarrow{a_m}$ au cours d'un intervalle de temps Δt , et l'accélération instantanée $\vec{a}$ à un instant donné.

Procédant comme pour la vitesse, on définit l'accélération moyenne au cours d'un intervalle de temps comme suit:

$$\overrightarrow{a_m} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1} \qquad (2.10)$$

et l'accélération instantanée à l'instant t donné, par l'expression ci-dessous :

$$\vec{a} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (2.11)$$

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\vec{a}$ s'exprime comme suit :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad (2.12)$$

tels que :

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d^2 x}{\mathrm{dt}^2} \\ a_y = \dfrac{d^2 y}{\mathrm{dt}^2} \\ a_z = \dfrac{d^2 z}{\mathrm{dt}^2} \end{cases} \tag{2.13}$$

L'unité S.I de l'accélération est le $m\,s^{-2}$.

Mouvements rectilignes :

Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une droite. Dans ce cas, nous pouvons choisir un repère à une dimension $(O,\vec{i})$ de même direction que la trajectoire. La position du mobile devient : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\vec{i}$.

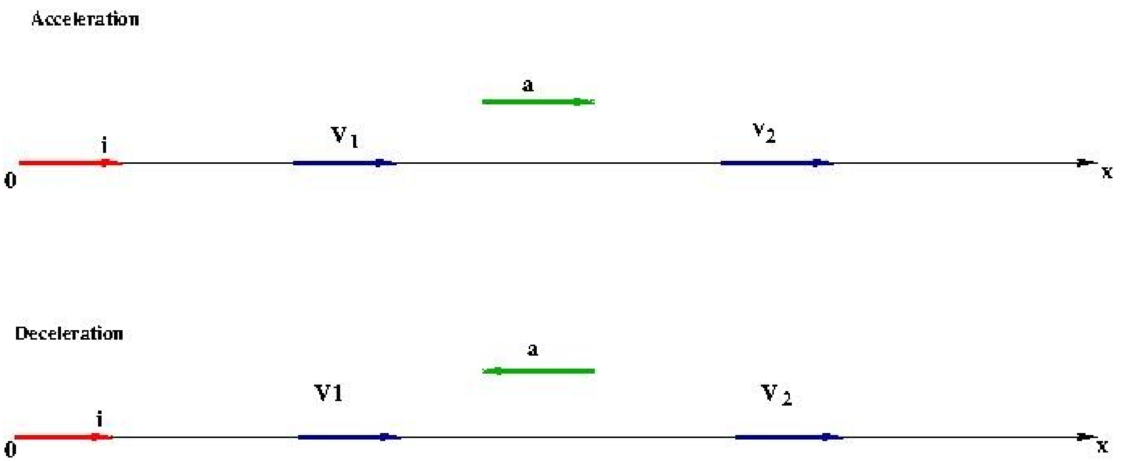

Fig 2.7

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire : $\vec{V} = V_x\,\vec{i}$. La variation du vecteur vitesse et, par conséquent, l'accélération sont sur l'axe du repère : $\vec{a} = a_x\,\vec{i}$.

Mouvement rectiligne uniforme :

Un mouvement est rectiligne uniforme (MRU) si la trajectoire est une droite et si la vitesse est une constante. L'accélération moyenne est donnée par la relation ci-dessous :

$$a_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_{2x} - V_{1x}}{t_2 - t_1} = 0 \tag{2.14}$$

puisque $V_{1x} = V_{2x} =$ constante.

Dans la limite où $\Delta t \rightarrow 0$ le résultat est vrai aussi, il en résulte que $a_x = 0$ à tout instant. La vitesse est constante : $V_{1x} = V_{2x} = V_{0x} = \text{constante}$.

L'équation horaire du mouvement est établie comme suit :

$$V_x = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dx} = V_x \,\mathrm{dt} \tag{2.15}$$

Si x_0 est la position du point matériel à l'instant t_0, alors on aura après intégration :

$$x - x_0 = \int_{t0}^{t} V_x \,\mathrm{dt}' = V_x (t - t_0) \tag{2.16}$$

Diagramme du mouvement rectiligne uniforme :

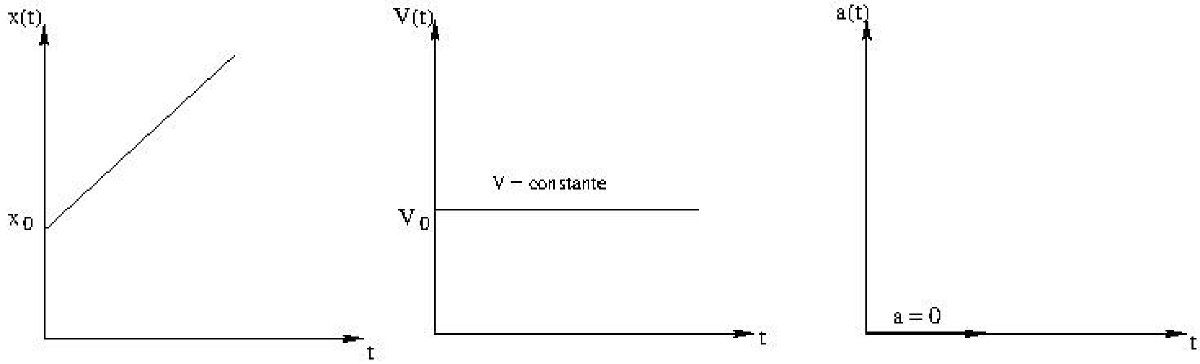

Fig 2.8

Mouvement rectiligne uniformément varié :

Un mouvement est rectiligne uniformément varié (MRUV) si la trajectoire est une droite et si le vecteur accélération est constant, porté par la trajectoire. L'accélération est constante :

$$a_x = a_{\mathrm{mx}} = a_{0x} = \text{ constante} \tag{2.17}$$

A partir de l'expression de l'accélération :

$$a_x = \frac{\mathrm{dV}_x}{\mathrm{dt}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dV}_x = a_x \,\mathrm{dt}\,, \tag{2.18}$$

la vitesse est obtenue après intégration, telle que

$$V_x - V_{0x} = a (t - t_0) \tag{2.19}$$

En intégrant une deuxième fois par rapport au temps, on obtient l'équation horaire du mouvement tel que :

$$\mathrm{dx} = V_x \,\mathrm{dt} = \left[a_x (t' - t_0) + V_{0x} \right] \mathrm{dt}' \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \frac{1}{2} a_x (t - t_0)^2 + V_{0x} (t - t_0) \tag{2.20}$$

Remarque :

* Si $\vec{a}_x . \vec{V} > 0$, le mouvement est uniformément accéléré.
* Si $\vec{a}_x . \vec{V} < 0$, le mouvement est uniformément décéléré.
.

De l'équation (2.19), on a :

$$t-t_0=\frac{V_x-V_{0x}}{a_x} \tag{2.21}$$

En l'injectant dans l'équation (2.20), on obtient la relation suivante :

$$x-x_0=\frac{1}{2}a_x\left(\frac{V_x-V_{0x}}{a_x}\right)^2+V_{0x}\frac{V_x-V_{0x}}{a_x}$$

$$x-x_0=\frac{1}{2a_x}\left(V_x^2-V_{0x}^2\right) \quad \Rightarrow \quad V_x^2-V_{0x}^2=2a_x\left(x-x_0\right) \tag{2.22}$$

Diagramme du mouvement rectiligne uniformément varié :

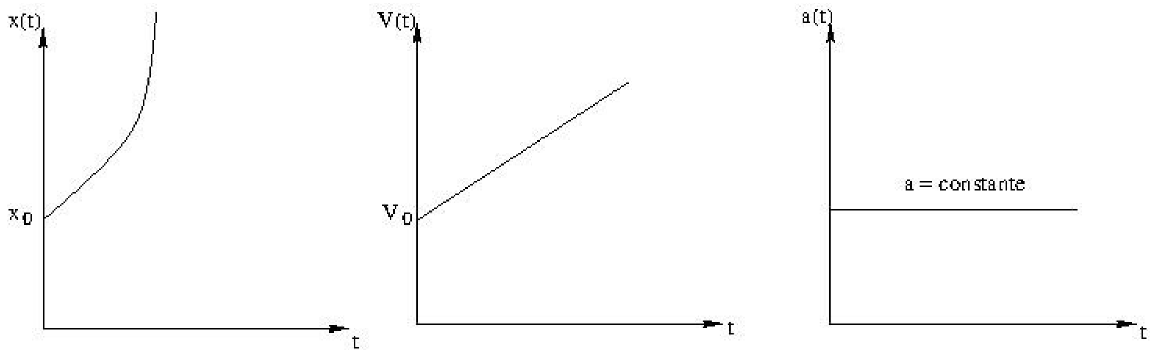

Fig 2.9

Le mouvement curviligne :

Vecteur position :

Dans l'espace à 3-dimensions on considère un point matériel M en mouvement le long d'une courbe (C). Le vecteur position est défini comme suit :

$$\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \tag{2.23}$$

où

$x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont les coordonnées cartésiennes de M à l'instant t.

Vecteur déplacement :

Le vecteur déplacement du point M entre les deux instants t_1 et t_2 est défini par :

$$\overrightarrow{dOM}=\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1=\overrightarrow{M_1M_2} \tag{2.24}$$

Le mouvement se fait le long de l'arc $\widehat{M_1 M_2}$. Pour mesurer les longueurs parcourues, on introduit l'abscisse curviligne.

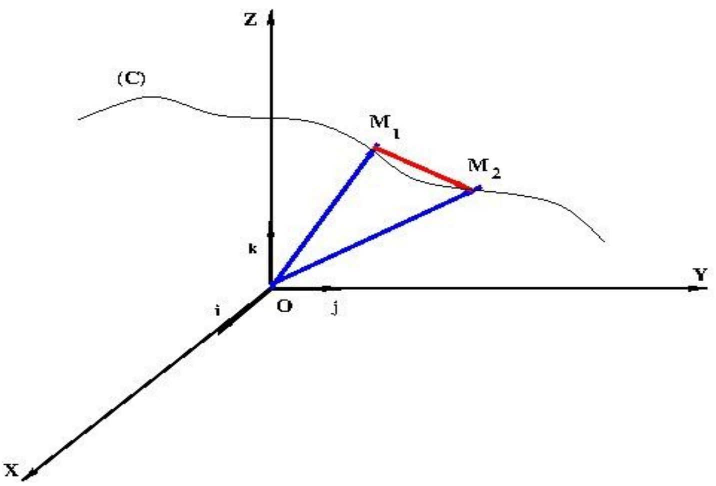

Fig 2.10

Abscisse curviligne :

Soit la trajectoire (C) et orientons – la en indiquant un sens positif arbitraire. Choisissons un point fixe M_0 sur (C) qui servira de référence pour mesurer les abscisses curvilignes. A l'instant t, la mesure algébrique $s(t)$ de la longueur de l'arc $\widehat{M_0 M}$ est appelée ''abscisse curviligne''.

$$s(t)=\widehat{M_0 M} \tag{2.25}$$

Entre 2 instants t_1 et t_2 , la distance parcourue par le point M, s'il n'a pas changé le sens de son mouvement, est donné par :

$$d=|s(t_2)-s(t_1)|$$

Vecteur vitesse :

La vitesse moyenne, entre deux instants t_1 et t_2, du mobile M est définie par :

$$\vec{V}_m=\frac{\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}_1}{t_2-t_1}=\frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2-t_1} \tag{2.26}$$

La vitesse instantanée est donnée par :

$$V(t)=\frac{\overrightarrow{OM}(t+dt)-\overrightarrow{OM}(t)}{dt}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2-t_1} \quad (2.27)$$

Le vecteur vitesse a les coordonnées ci-dessous :

$$V_x=\frac{dx}{dt},V_y=\frac{dy}{dt}V_z=\frac{dz}{dt} \quad (2.28)$$

On a aussi les relations suivantes :

$$x=x_0+\int_0^t V_x dt',y=y_0+\int_0^t V_y dt',z=z_0+\int_0^t V_z dt' \quad (2.29)$$

où x_0, y_0 et z_0 sont les coordonnées du mobile M à l'instant initial t_0 .
En utilisant l'abscisse curviligne, on a :

$$\vec{V}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial s}.\frac{ds}{dt} \quad (2.30)$$

ds est la variation infinitésimale de l'abscisse curviligne.

$$\vec{V}(t)=\frac{ds}{dt}\vec{u_T},\ \text{où}\ \ \vec{u_T}=\frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial s} \quad (2.31)$$

$\vec{u_T}$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe au point M. Sa direction varie dans le temps, en général, sauf dans le cas du mouvement rectiligne. On peut alors écrire :

$$s(t)=s_0+\int_0^t V(t')dt' \quad (2.32)$$

s_0 est l'abscisse curviligne à l'instant t_0 .

Vecteurs accélérations tangentielle et normale :

Le vecteur accélération est défini par :

$$\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d}{dt}(V\vec{u_T}) \quad (2.33)$$

$$\vec{a}=\frac{dV}{dt}\vec{u_T}+V\frac{d\vec{u_T}}{dt} \quad (2.34)$$

a) Le premier terme : $\frac{dV}{dt}\vec{u_T}$ est un vecteur tangent à la trajectoire, c'est '*l'accélération tangentielle'*. Elle indique la variation de la grandeur de la vitesse au cours du temps.

b) Le second terme : $V\frac{d\vec{u}_T}{dt}$ détermine la variation de la direction de mouvement du mobile. On l'appelle '*accélération normale*' .

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt}=\frac{V}{\rho}\vec{u}_N, \tag{2.35}$$

où $\vec{u}_N$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_T$, on l'appelle vecteur '*vecteur normal*'.

ds est un arc de cercle de centre C et de rayon ρ,

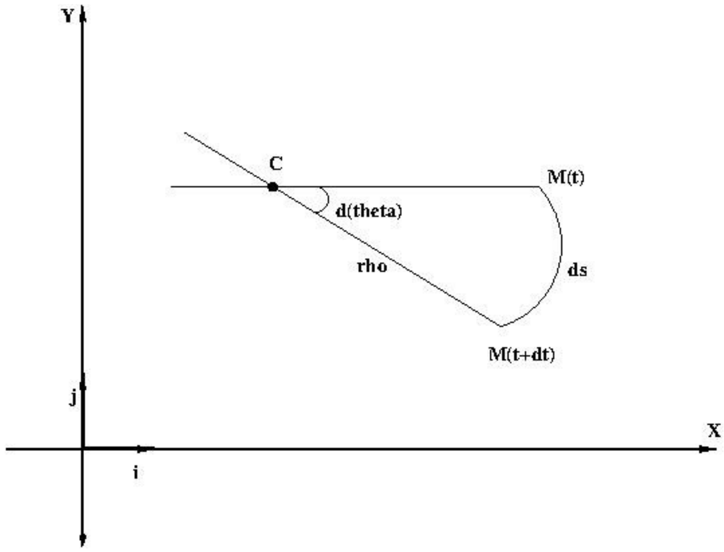

Fig 2.11

$$ds=\rho\, d\theta \Rightarrow d\theta=\frac{ds}{\rho} \tag{2.36}$$

On a :

$$\frac{d\vec{u}_T}{\vec{dt}}=\frac{\partial\vec{u}_T}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_N \tag{2.37}$$

On peut alors écrire :

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\rho}V \tag{2.38}$$

enfin :

$$\frac{d\vec{u}_T}{dt}=\frac{V}{\rho}\vec{u}_N \tag{2.39}$$

L'accélération normale est alors égale à :

$$\vec{a}_N = V\frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{V^2}{\rho}\vec{u}_N \tag{2.40}$$

Enfin, l'accélération est telle que :

$$\vec{a} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{\rho}\vec{u}_N = a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N \tag{2.41}$$

Son module est égal à :

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 = \left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^4}{\rho^2} \tag{2.43}$$

Cas particulier du mouvement circulaire uniforme

Supposons un mobile qui décrit une trajectoire circulaire dans le plan Oxy ; la circonférence a un rayon R et est centrée sur l'origine des axes O. Dans ce cas il est plus commode de travailler avec des coordonnées polaires ρ et ϕ, plutôt qu'avec des coordonnées cartésiennes.

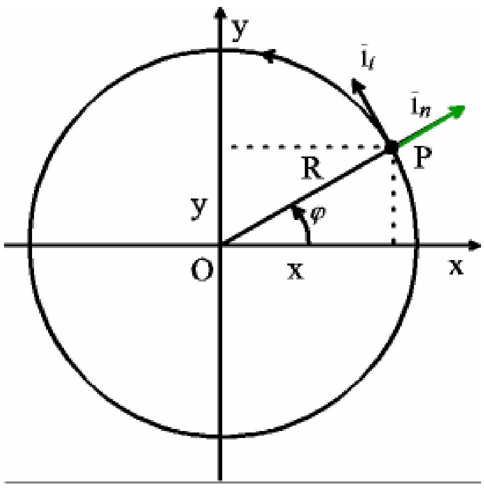

Fig 2.12

La coordonnée radiale ρ est la distance du point P à l'origine O et ϕ est l'angle azimutal. Il se mesure depuis l'axe Ox, dans le sens trigonométrique (voir figure I.8). Dans le SI, les angles sont mesurés en radian (rad). Cette unité est définie comme le rapport de l'arc de circonférence s, intercepté par l'angle au centre ϕ, divisé par le rayon de la circonférence :

$$\varphi[\text{rad}] \equiv \frac{s}{R} \tag{2.23}$$

Les relations entre les cordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes sont établies au chapitre 1 telles que :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases} \tag{2.24}$$

Dans le cas d'une trajectoire circulaire de centre O, ρ = R est constant et la seule coordonnée qui varie dans le temps est l'angle φ; c'est elle qui détermine la position du point P à tout instant.

L'expression de la vitesse dans un mouvement circulaire est donnée ci-dessous :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\Delta t} \qquad (2.25)$$

Le module de la vitesse est tel que :

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \left|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad (2.26)$$

A la limite où $\Delta t \to 0$, la longueur de la corde Δr tend vers la longueur de l'arc de circonférence Δs, intercepté par l'angle $\Delta \phi$.

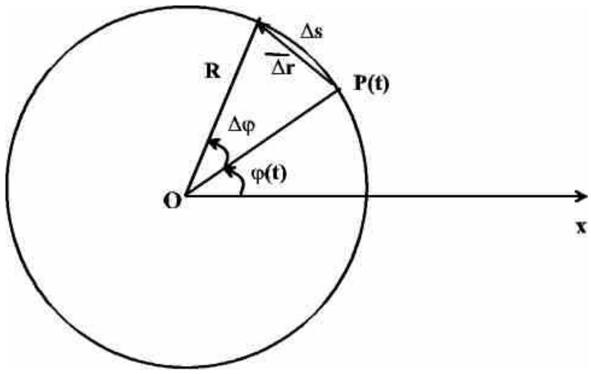

Fig 2.13

Donc on a :

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{\mathrm{dt}} \qquad (2.27)$$

Nous pouvons donc écrire, pour tout mouvement circulaire :

$$V = R \frac{d\varphi}{\mathrm{dt}} = R\omega \qquad (2.28)$$

où

$$\omega = \frac{d\varphi}{\mathrm{dt}} \qquad (2.29)$$

est la vitesse angulaire. On dit que le mouvement circulaire est uniforme lorsque la vitesse angulaire ω et donc la vitesse v est constante.

Le temps mis par le mobile pour effectuer un tour complet est constant et est défini comme la période T du mouvement circulaire uniforme. On a donc :

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{R\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (2.30)$$

On appelle fréquence du mouvement, le nombre de révolutions effectuées par unité de temps. La fréquence est donc l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \tag{2.31}$$

Composition de mouvement :

On se propose de trouver les variables cinématiques telles que la position, la vitesse et l'accélération d'un objet matériel ponctuel, dans un repère $\Re(O, x, y, z)$ lorsque le mouvement est bien connu dans un autre repère $\Re(O', x', y', z')$.

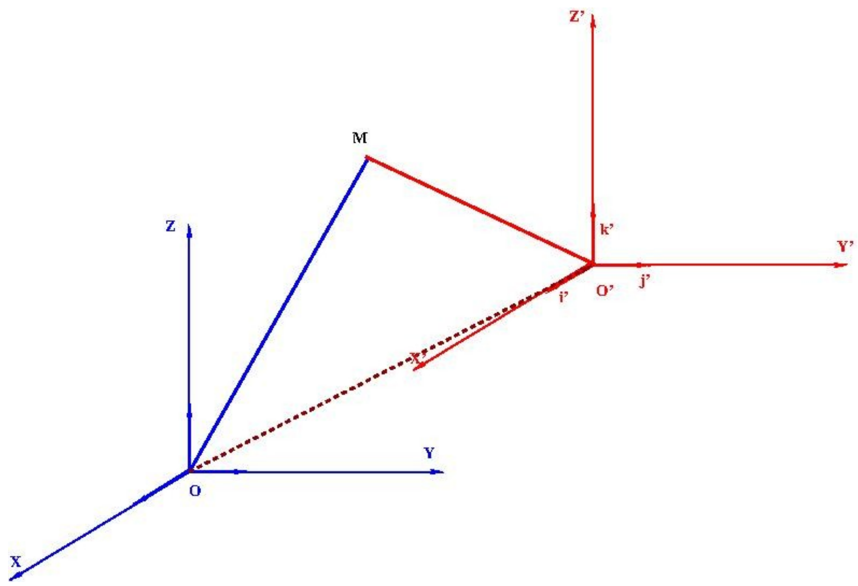

Fig 2.14

Le repère immobile est appelé '*repère absolu*' et le repère qui est en mouvement est appelé '*repère relatif*'.

Relation entre les positions :

Les positions du point M dans les deux repères $\Re$ et $\Re'$ sont telles que :

$$\begin{gathered} \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \\ \overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \end{gathered} \tag{2.32}$$

Les deux positions sont reliées par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \tag{2.33}$$

Relation entre les vitesses :

Dans le repère $\Re(O, x, y, z)$, la vitesse de l'objet ponctuel M est telle que :

$$\vec{V}=\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}=\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{d\,\overrightarrow{O'M}}{dt} \tag{2.34}$$

$$\vec{V}=\left(\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{x'\,d\,\vec{i}'}{dt}+\frac{y'\,d\,\vec{j}'}{dt}+\frac{z'\,d\,\vec{k}'}{dt}\right)+\left(\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}'\right) \tag{2.35}$$

- La seconde expression est la vitesse de M dans le repère $\mathfrak{R}'$, elle est appelée '*vitesse relative*'.

- La première expression comprend le terme $\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$qui est la *translation* de l'origine O' par rapport au repère $\mathfrak{R}$. Il comprend aussi les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$par rapport au temps. Ce sont les vitesses de rotations des axes $\overrightarrow{O'X'},\overrightarrow{O'y'}$et $\overrightarrow{O'X'}$du repère $\mathfrak{R}'$ par rapport à $\mathfrak{R}$. Cette vitesse est appelée *'vitesse d'entraînement'.*

$$\vec{V}_r=\frac{dx'}{dt}\vec{i}'+\frac{dy'}{dt}\vec{j}'+\frac{dz'}{dt}\vec{k}' \tag{2.36}$$

$$\vec{V}_e=\left(\frac{d\,\overrightarrow{OO'}}{dt}+\frac{x'\,d\,\vec{i}'}{dt}+\frac{y'\,d\,\vec{j}'}{dt}+\frac{z'\,d\,\vec{k}'}{dt}\right) \tag{2.37}$$

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e \tag{2.38}$$

Relation entre les accélérations :

En dérivant, une deuxième fois par rapport au temps, le vecteur position, on obtient :

$$\vec{a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\vec{a}=&\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\frac{x'\,d^2\vec{i}'}{dt^2}+\frac{y'\,d^2\vec{j}'}{dt^2}+\frac{z'\,d^2\vec{k}'}{dt^2}\right)\\ &+\ 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\,\vec{i}'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\,\vec{j}'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\,\vec{k}'}{dt}\right)\\ &+\left(\frac{d^2x'\,\vec{i}'}{dt^2}+\frac{d^2y'\,\vec{j}'}{dt^2}+\frac{d^2z'\,\vec{k}'}{dt^2}\right)\end{aligned} \tag{2.40}$$

On a :

1) $\left(\frac{d^2x'\,\vec{i}'}{dt^2}+\frac{d^2y'\,\vec{j}'}{dt^2}+\frac{d^2z'\,\vec{k}'}{dt^2}\right)$est l'accélération relative.

2) $\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}+\frac{x'd^2\vec{i}'}{dt^2}+\frac{y'd^2\vec{j}'}{dt^2}+\frac{z'd^2\vec{k}'}{dt^2}\right)$est l'accélération d'entrainement.

3) $2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\vec{i}'}{dt}+\frac{dy'}{dt}\frac{d\vec{j}'}{dt}+\frac{dz'}{dt}\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$est l'accélération de Coriolis.

On peut finalement écrire l'expression de l'accélération absolue $\vec{a}_a$ comme suit :

$$\vec{a}_a=\vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c \tag{2.41}$$