République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Abderrahmane Mira de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Cours de Deuxième année Mathématiques Appliquées

Probabilités

Réalisé par :

Mr TOUCHE Nassim

Année Universitaire 2023 – 2024

Cours de probabilités

Réalisé par :

Mr. TOUCHE Nassim

Avant-Propos

Ce support de cours a été conçu pour vous accompagner dans votre apprentissage des probabilités et des variables aléatoires. Il s'adresse en particulier aux étudiants de L2 Mathématiques Appliquées, mais peut également être utile à toute personne souhaitant acquérir une compréhension solide de ces concepts fondamentaux.

L'objectif principal de ce support est de vous fournir les outils nécessaires pour :

- Comprendre le concept de variable aléatoire et ses différents types.
- Maîtriser les lois de probabilités discrètes et continues usuelles.
- Appliquer ces lois à des problèmes concrets.
- Utiliser des approximations pour simplifier les calculs et l'analyse.

Ce support de cours est organisé de manière progressive, en commençant par les concepts fondamentaux et en progressant vers des notions plus avancées. Chaque chapitre est accompagné d'exemples concrets et d'exercices d'application pour vous permettre de mettre en pratique vos connaissances.

Contents

I Part One

Part One

Contents

Variables aléatoires

0.1 Introduction

L'étude des phénomènes aléatoires est omniprésente dans de nombreux domaines, des sciences physiques aux sciences sociales, en passant par l'ingénierie et la finance. Souvent, l'intérêt ne réside pas dans le simple constat du résultat d'une expérience aléatoire, mais plutôt dans l'analyse de certaines caractéristiques ou valeurs qui en découlent. C'est là que les variables aléatoires entrent en jeu, offrant un cadre puissant pour quantifier et comprendre l'incertitude inhérente à ces phénomènes.

Prenons l'exemple du lancer d'un dé. Si l'on se limite à l'observation de la face obtenue ("1", "2", etc.), l'analyse reste descriptive et ne permet pas d'exploiter pleinement l'information contenue dans l'expérience. En revanche, si l'on définit une variable aléatoire qui associe un gain numérique à chaque face, on ouvre la voie à une analyse quantitative plus riche. On peut alors calculer la probabilité d'obtenir un gain supérieur à un certain seuil, ou encore déterminer le gain moyen que l'on peut espérer obtenir sur un grand nombre de lancers.

Les variables aléatoires constituent ainsi une abstraction essentielle qui permet de passer des résultats bruts d'une expérience aléatoire à une représentation numérique exploitable. Elles permettent de s'intéresser non seulement à "ce qui se passe", mais aussi à "combien" ou "dans quelle mesure" cela se produit. Cette quantification ouvre la porte à l'utilisation d'outils mathématiques puissants, comme le calcul des probabilités et la statistique, pour analyser, modéliser et prédire les phénomènes aléatoires.

Ce chapitre vous guidera à travers les concepts fondamentaux des variables aléatoires. Nous explorerons les différents types de variables aléatoires, leurs propriétés et les outils mathématiques qui permettent de les décrire et de les manipuler. Des exemples concrets illustreront l'importance des variables aléatoires dans divers domaines, vous permettant de saisir leur rôle crucial dans la compréhension et la gestion de l'incertitude dans notre monde.

Examples :

1. Lors d'un lancer de deux dés, on peut s'intéresser uniquement qu'à la somme des résultats des deux dés.

2. On peut s'intéresser au nombre de filles dans une famille qui comporte trois enfants.
3. Considérons une expérience qui consiste à observer, pour chacune des n pièces produites par une machine, si la pièce est défectueuse ou non. Nous attribuerons la valeur 1 à une pièce défectueuse et la valeur 0 à une pièce en bon état. L'univers associé à cette expérience est : $\Omega = \{0,1\}^n$. Ce qui intéresse le fabriquant est la proportion de pièces défectueuses produites par la machine. Soit une application X définie de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à tout événement ω de Ω associe le nombre $X(\omega)$. Une telle application X définie sur Ω et à valeur dans $\mathbb{R}$ s'appelle une variable aléatoire.

Une variable aléatoire (v.a.) est une fonction qui associe un nombre à chaque issue possible d'une expérience aléatoire. On distingue **les variables aléatoires discrètes**, qui ne peuvent prendre qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs, et **les variables aléatoires continues**, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné

0.2 Variables aléatoires sur un ensemble fini

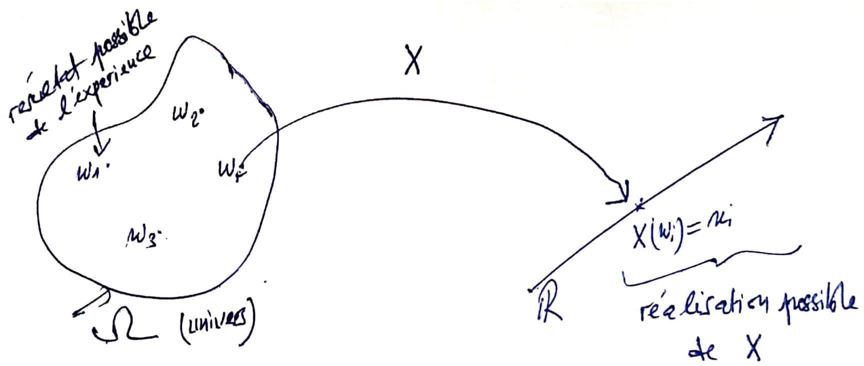
Definition 0.2.1 — v.a sur un ensemble fini. Etant donné un espace de probabilité (Ω, ξ, P), E un ensemble fini. On appelle variable aléatoire sur un ensemble fini, l'application X définie de Ω dans E par :

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow E \\ \omega &\longrightarrow X(\omega). \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall x \in E : X^{-1}(\{\omega_i\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}.$$

Illustration graphique



Definition 0.2.2 — v.a discrète. On appelle variable aléatoire discrète, une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs ponctuelles (isolées).

■ **Example 0.1** Résultat d'un jet de dé. Le résultat X est une variable aléatoire

$$X : \omega \in \Omega \longrightarrow X(\omega).$$

X à valeurs dans $X(\omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$. ■

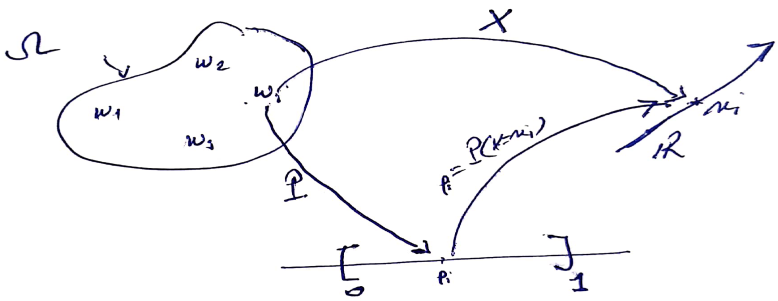
0.2.1 Densité de probabilités

Definition 0.2.3 — distribution d'une v.a. Soit (Ω, ξ, P) un espace de probabilité, X une variable aléatoire définie sur Ω dans $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = X(\Omega) = Val(X)$. On appelle loi (distribution) de la variable aléatoire X, la fonction numérique (probabilité)p définie de $X(\Omega)$ dans [0,1] par :

$$\begin{aligned} E = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = X(\Omega) &\longrightarrow [0,1] \\ x_i &\longrightarrow p_i = p(x_i) = P(X = x_i). \end{aligned}$$

p_i est la valeur numérique de la loi de X au point x_i.

Illustration graphique :



R Pour caractériser une variable aléatoire, on doit
1. Trouver les valeurs possibles, ie: $Val(X)$.
2. Trouver sa loi (distribution) : $p(x_i) = P(X = x_i)$.

Valeurs	x_1 x_2 ... x_n
loi	p_1 p_2 ... p_n

■ **Example 0.2** Reprenons l'exemple du jet d'un dé.
Avec $\Omega = \{\omega_i\ : \overline{1,6}\}$, $\xi = P(\Omega)$ et $P(\omega_i) = \frac{1}{6}\ \forall i$.
On associe une variable aléatoire X qui représente le résultat d'un jet, autrement dit :
X " le résultat du jet "
$X = i \Leftrightarrow \omega_i$ est réalisé.
Ce qui implique : $Val(X) = X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $p_i = P(X = i) = P(\omega_i) = \frac{1}{6},\ \forall i$. On dit alors que la loi de la variable aléatoire X est une loi uniforme. ■

■ **Example 0.3** Considérons une expérience qui admet uniquement deux éventualités (possibilités), avec $\Omega = \{A, \overline{A}\}$. On associé à cette expérience la variable aléatoire X avec $Val(X) = \{0, 1\}$ tel que :
$X = 1 \Leftrightarrow$ l'évènement A est réalisé.
$X = 0 \Leftrightarrow$ l'évènement $\overline{A}$ n'est pas réalisé.
$P(X = 1) = P(X = A) = p.$
$P(X = 0) = P(X = \overline{A}) = 1 - p.$
On dit alors que la loi de la variable aléatoire X est une loi de BERNOULLI. ■

0.2.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition est l'un des moyens de caractériser la loi d'une variable aléatoire. Elle est parfois appelée fonction cumulative car on cumule les probabilités de toutes les valeurs inférieurs à x.

Definition 0.2.4 — Fonction de répartition. Soit X une variable aléatoire sur l'espace de probabilité (Ω, ξ, P); tel que $Val(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $dist(X) = (p_i)_i$ avec $p_i = P(X = x_i)$. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X la fonction F définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par :

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & P(X<x). \end{array}$$

$$\begin{aligned} F(x) = P(X<x) &= P(X=x_1)+P(X=x_2)+...+P(X=x_i) \\ &= \sum_{x_i<x} P(X=x_i). \end{aligned}$$

■ **Example 0.4** Reprenons l'exemple du jet du dé.

$Val(X) = \{1,2,...,6\}, \quad dist(X) = (p_i)_i, \quad p_i = P(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{6} & si \;\; i = \overline{1,6} \\ 0 & sinon \end{cases}$

La fonction de répartition est donnée par : $F(x) = P(X<x) = \sum_{x_i<x} P(X=x_i)$.

- Si $x \leq 1$ $F(x) = 0$.
- *Si* $x = 2$ $F(x) = P(X<x) = P(X=1) = \frac{1}{6} = \frac{2-1}{6}$.
- *Si* $x = 3$ $F(x) = P(X<x) = P(X=2)+P(X=1) = \frac{2}{6} = \frac{3-1}{6}$.
- *Si* $x = 4$ $F(x) = P(X=3)+P(X=2)+P(X=1) = \frac{3}{6} = \frac{4-1}{6}$.
- *Si* $x = 5$ $F(x) = \frac{4}{6} = \frac{5-1}{6}$.
- *Si* $x = 6$ $F(x) = \frac{5}{6} = \frac{6-1}{6}$.
- *Si* $x \geq 6$ $F(x) = P(X=6)+P(X=5)+P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1) = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \leq 1 \\ \frac{x-1}{6} & si \;\; 2 \leq x \leq 6 \\ 1 & si \;\; x \geq 6 \end{cases}$$

■

Propriétés de la fonction de répartition

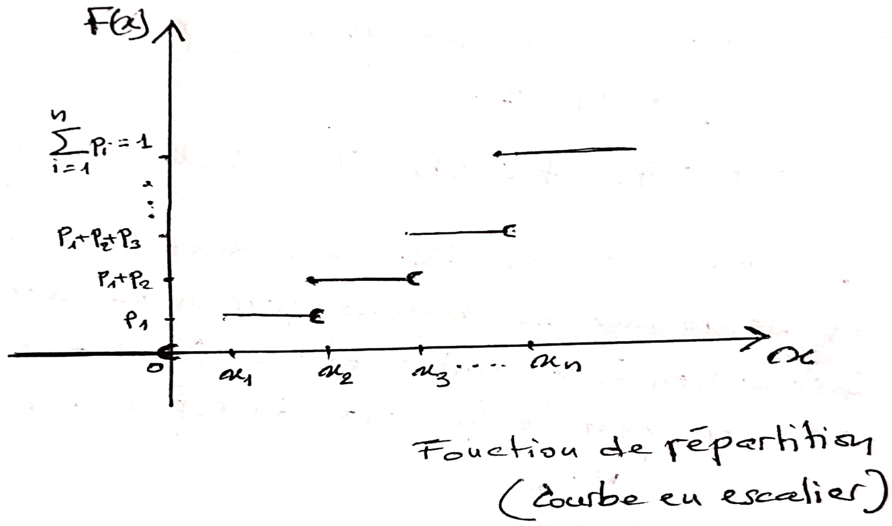
1. $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; 0 \leq F(x) \leq 1$ ($F(x)$ est positive, croissante et continue à gauche).
2. F est une fonction en escalier avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$
3. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

R Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, on utilise un diagramme en bâtons pour visualiser la distribution (densité) de probabilité et une fonction en escalier pour la fonction de répartition.

0.3 Caractéristiques des variables aléatoires

0.3.1 Espérance

Definition 0.3.1 — Espérance (valeur moyenne). On appelle espérance mathématique $E(X)$



de la variable aléatoire X, le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Propriétés de l'espérance

1. $E(a) = a$, où a est une constante.
2. $E(aX) = aE(X)$.
3. $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$.
4. $E(a+X) = a+E(X)$.
5. $E(XY) = E(X).E(Y)$ si X et Y sont indépendantes.

R L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X peut s'interpréter comme une valeur autour de laquelle se groupent les valeurs de la variable aléatoire X.

0.3.2 Moments d'une variable aléatoire

Definition 0.3.2 Soit r un entier naturel, on appelle moment d'ordre r de la variable aléatoire X, le nombre donné par :

$$m_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r p_i.$$

En particulier

$$m_1 = E(X).$$

0.3.3 Variance

Definition 0.3.3 On appelle variance (l'écart quadratique moyen) de la variable aléatoire X, le nombre donné par :

$$Var(X) = E[(X-E(X))^2].$$

Autre notation :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[(X-E(X))^2] \\ &= E[X^2-2XE(X)+E(X)^2] \\ &= E(X^2)-2E(XE(X))+E(E(X)^2) \\ &= E(X^2)-2E(X)^2+E(X)^2 \\ &= E(X^2)-(E(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \Big[\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\Big]^2. \end{aligned}$$

propriétés de la variance

1. $Var(X) \geq 0$.
2. $Var(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est une variable aléatoire certaine.
3. $Var(X+a) = Var(X)$ (car a est une constante).
4. $Var(aX) = a^2Var(X)$.
5. $Var(aX+b) = a^2Var(X)$.

R La variance d'une variable aléatoire peut s'interpréter comme une mesure du degré de dispersion des valeurs de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne.

0.3.4 Moments centrés d'une variable aléatoire

Definition 0.3.4 Soit r un entier naturel, on appelle le moment centré d'ordre r de la variable aléatoire $(X-EX)$ la valeur donnée par :

$$\mu_r = E\big(X-E(X)\big)^r = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^r p_i.$$

En particulier, si $r=2$

$$\mu_2 = E\big(X-E(X)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(x_i - E(X)\big)^2 p_i = Var(X).$$

Definition 0.3.5 — Ecart type. On appelle Ecart type et on note σ la racine carrée de la variance,

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

0.4 Inégalités en probabilités

0.4.1 Inégalités de BIENAYME-TCHEBYTCHEV

Soit $\varepsilon > 0$ et soit X une variable aléaoire de variance finie, alors on a :

$$P\Big(|X-EX| > \varepsilon\Big) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}, \quad avec \quad \sigma^2 = Var(X).$$

Cette inégalité peut être interpréter comme une majoration de la probabilité pour que les valeurs de la variable aléatoire X se trouvent en dehors de l'intervalle $[EX-\varepsilon,\ EX+\varepsilon]$.

Autrement dit :

La variable aléatoire X, prend ses valeurs dans l'intervalle $[EX-\varepsilon,\ EX+\varepsilon]$ avec une probabilité au moins égale à $1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

0.4.2 Inégalité de Markov

Soit une variable aléatoire X définie sur un espace fondamental Ω muni d'une probabilité P. Supposons qu'elle admette une espérance finie. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P\Big(|X| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{E\big(|X|\big)}{\varepsilon}.$$

0.4.3 Inégalité de Jensen

Si f est une fonction réelle convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient $X(\Omega)$, ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire X, telle que $E(X)$ *et* $E\big[f(x)\big]$ existent, alors :

$$f\Big[E(X)\Big] \leq E\Big[f(X)\Big].$$

Cette inégalité peut être interpréter de la manière suivante : L'ordonnée (au sens de la fonction f) de la moyenne (au sens d'espérance) est plus petite que la moyenne des ordonnées.

0.5 Variables aléatoires continues

Definition 0.5.1 Soit (Ω, ξ, P) un espace de probabilité, X une variable aléatoire définie sur Ω dans $\mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire continue si l'ensemble de ses valeurs $X(\Omega)$ est un intervalles ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Definition 0.5.2 — Densité de probabilité. On dit que la variable aléatoire X est "absolument continue", si elle est continue et si de plus il existe une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et possédant les propriétés suivantes :
1. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ et elle est continue.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.
3. la probabilité de tout intervalle $]a,b]$ définie par $P(\omega \in \Omega / a < X(\omega) \leq b)$ que l'on note $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$.

Une fonction qui vérifie ces trois propriétés est appellée densité ou loi de probabilité de la variable aléatoire X.

■ **Example 0.5 — variables continues.** ,
- Durée de vie d'une ampoule éléctrique.
- La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne.
- Etude de la taille dans une population donnée.

■

0.5.1 Fonction de répartition

Definition 0.5.3 Soit (Ω, ξ, P) un espace de probabilité, X une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f. La fonction de répartition notée F est définie par :

$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longrightarrow & F(x) = P(X < x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt. \end{array}$$

(R) La fonction F est dérivable et admet f comme dérivé. On a donc :

$$P(a < X < b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

.

0.5.2 Moments d'une variable aléatoire absolument continue

Soit (Ω, ξ, P) un espace de probabilité, X une variable aléatoire absolument continue de densité de probabilité f. Etant donné un entier naturel r. On appelle moment d'ordre r de X et on note $m_r(X)$ la quantité :

$$m_r(X) = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx.$$

Espérance mathématique

Si $r = 1$, $m_1(X) = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$, espérance mathématique de la variable aléatoire X.

0.5.3 Moments centrés d'une variable aléatoire absolument continue

On appelle moment centré d'ordre r de la variable aléatoire X et on note $\mu_r(X)$ la quantité:

$$\begin{aligned} \mu_r(X) &= E(X - Ex)^r \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^r f(x)dx. \end{aligned}$$

Cas particulier

- Si $r = 1 \Rightarrow \mu_1(X) = E(X - EX) = 0$.
- Si $r = 2 \Rightarrow \mu_2(X) = E(X - EX)^2 = Var(X)$.

La variance de X sera donnée par :

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - EX)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2.$$

Lois de probabilités usuelles

0.6 Introduction

Les lois de probabilité usuelles sont des règles fondamentales qui décrivent les comportements probabilistes communs observés dans une grande variété de situations. Elles fournissent un cadre mathématique permettant de quantifier et de prédire la probabilité d'événements dans des expériences aléatoires.

On peut citer quelques-unes des lois de probabilités les plus couramment utilisés :

- Loi de probabilité uniforme.
- Loi de Bernoulli.
- Loi Binomiale.
- Loi Normale (ou loi gaussiene).
- Loi de Poisson.

Ces lois, parmi d'autres, sont des outils essentiels pour la modélisation, l'analyse et la prédiction dans de nombreux domaines tels que les sciences, l'ingénierie, la finance, la médecine, et bien d'autres encore. Elles fournissent un cadre précieux pour comprendre et traiter l'incertitude inhérente à de nombreuses situations réelles.

II Lois de probabilités discrètes usuelles

0.7 Loi de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire (réalisée une seule fois) dont le résultat peut être soit un succès, soit un échec.

■ **Example 0.6** On lance une pièce de monnaie une seule fois et on note le résultat. On appelle succès le fait d'obtenir **Pile** et échec le fait d'obtenir **Face**. ■

Definition 0.7.1 — Loi de Bernoulli. On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0,1]$) et on note $X \to \mathscr{B}(p)$, si elle ne prend que deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités : $P(X=0) = 1$ et $P(X=1) = 1-p = q$.
D'une manière équivalente :

$$P(X=x) = p^x(1-p)^{1-x}, \;\; x = \{0,1\}.$$

0.7.1 Moments d'une variable aléatoire de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Bernoulli.

Espérance Mathématique

$$E(X) = p.$$

En effet,

$$E(X) = \sum_{k=0}^{1} P(X=k) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) = p.$$

Variance Mathématique

$$Var(X) = p(1-p) = pq.$$

En effet,

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

ou bien,

$$Var(X) = \sum_{k=0}^{1} (x_k - E(X))^2 P(X = x_k) = (0-E(X))^2 P(X=0) + (1-E(X))^2 P(X=1) = pq.$$

Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{pq}.$$

0.7.2 Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \to \mathscr{B}(p)$ est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

■ **Example 0.7** Dans une population, les statistiques ont montré que 49% des nouveaux-nés sont des filles. la variable aléatoire X représente le nombre de fille dans une famille à un enfant. Alors X prend deux valeurs 0 et 1 avec les probabilités suivantes :

$$P(X=0) = 0,49, \quad P(X=1) = 0,51$$

Donc

1. $E(X) = p = 0,49.$
2. $Var(X) = pq = 0,49 \times 0,51 = 0,2499.$
3. $\sigma(X) = \sqrt{0,2499}.$

■

0.8 Loi Binomiale

Supposons qu'on exécute maintenant n épreuves indépendantes, chacune ayant p pour probabilité de succès et $q = 1-p$ pour probabilité d'échec. La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite variable aléatoire Binomiale de paramètre (n, p) et note $X \to \mathscr{B}(n, p)$

Definition 0.8.1 — Loi Binomiale. On appelle variable aléatoire de paramètre n et p ($n \in \mathbb{N}^*, p \in [0,1]$) une variable aléatoire discrète X qui peut prendre les valeurs $\{0, 1, \ldots, n\}$ et dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \;\; P_X(\{k\}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

R La loi Binomiale correspond au cas d'un tirage avec remise.

0.8.1 Moments d'une variable aléatoire Binomiale

Soit X une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Binomiale.

Espérance Mathématique

$$E(X) = np.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= np(p+q)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

Variance

$$Var(X) = npq.$$

En effet,

$$Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1+1)n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-1)n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np\sum_{k=0}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\
&= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np(p+q)^{n-1} = n(n-1)p^2 + np
\end{aligned}$$

alors

$$Var(X) = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = -np^2 + np = np(1-p) = npq.$$

Ecart type

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

■ **Example 0.8** On lance n fois de suite une pièce de monnaie, la variable aléatoire X est le nombre de Pile apparus au cours de n jets. Alors X prend deux valeurs 0 et 1, tel que :

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \; et \; P(X=1) = \frac{1}{2}.$$

Donc $X \to \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$.

1. $E(X) = np = \frac{n}{2}$
2. $Var(X) = npq = n.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{n}{4}$.

■

0.9 Loi Multinomiale

Considérons une expérience qui admet k possibilités $(k > 2)$. Soit une suite de n expériences qui admettent chacune k possibilités, pour chaque expérience, on associé l'ensemble fondamental $\Omega_i = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$, notons $p_i = P(A_i)$. On suppose que A_1 se réalise n_1 fois, A_2 se réalise n_2 fois,..., A_k se réalise n_k fois.

$$P(\underbrace{A_1A_1...A_1}_{n_1 fois}\underbrace{A_2A_2...A_2}_{n_2 fois}...\underbrace{A_kA_k...A_k}_{n_k fois}) = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times ... \times p_k^{n_k}$$

alors il y a exactement

$$C_n^{n_1} \times C_{n-n_1}^{n_2} \times .... \times C_{n-\sum_{i=1}^{k-1}}^{n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k}$$

répartitions possibles.
Soit alors la variable aléatoire X_i "nombre de réalisations de l'évènement A_i". Alors

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, ..., X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k} p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times ... \times p_k^{n_k}.$$

0.10 Loi de Poisson

On appelle variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, une variable aléatoire discrète X qui prend les valeurs $\{0, 1, ...\}$ et dont la loi de probabilité est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \;\; P(X=k) = e^{-}\lambda \frac{\lambda^k}{k!}.$$

R la loi de Poisson est parfois appelée ***loi des évènements rares***. Elle sert par exemple à modéliser :

- le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique dans un intervalle de temps donné ;
- le nombre de véhicules franchissant un poste de péage dans un intervalle de temps donné ;
- le nombre de clients se présentant dans un magasin dans un intervalle de temps donné ;
- le nombre de fautes de frappe dans les pages d'un cours de maths, etc.

Proposition

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre λ.

- L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = \lambda.$$

- La variance de X est

$$Var(X) = \lambda.$$

Démonstration
Soient $\lambda \in \mathbb{R}^{*,+}$ et X une variable aléatoire discrète suit la loi de Poisson

- L'espérance mathématique de X

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

- La variance de X

$$\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 P(X=k)\right] - \lambda^2 = \left[e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] - \lambda^2$$
$$= e^{-\lambda}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(k-1)\frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right] - \lambda^2 = e^{-\lambda}\left[\lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right] - \lambda^2 = \lambda$$

■ **Example 0.9** Un Compteur exposé à une radiation stable montre sur un écran une moyenne de 4 particules (spots) radioactives. Si on suppose que le nombre de particules sur l'écran suit une loi de poisson. Calculer la probabilité d'avoir :

- Exactement 3 spots sur l'écran.
- Au moins 4 spots sur l'écran.
- Un nombre pair de spots.

Si on suppose que la variable aléatoire X suit une loi de poisson de paramètre $\lambda = 4$ alors on aura :

1. $P(X=3) = \frac{e^{-4}4^3}{3!}$
2. $P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = 1 - [P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)]$
3. $P(X=2n) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2n}}{(2n)!}$

■

0.11 Loi géométrique

Supposons qu'une expérience admettre deux résultats possibles, succès ou échecs. Soit X le nombre de fois qu'il faut exécuter de manière indépendante des épreuves de Bernoulli jusqu'à l'obtention du premier succès. La loi d'une telle variable aléatoire est dite géométrique et est notée $G(p)$, X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et

$$P(X=k) = P(X_1 = 0; \ldots; X_{k-1} = 0; X_k = 1) = p(1-p)^{k-1}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

■ **Example 0.10** On lance indéfiniment un dé. On note X le rang du lancer qui donne le nombre 1 pour la première fois. Alors, X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$. ■

Proposition

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Alors X admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et } V(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

■ **Example 0.11** Une urne contient N boules blanches et M boules noires. Les boules sont choisies de manière aléatoire jusqu'à ce qu'on obtienne une boule noire. Si on suppose que les tirages sont avec remise, quelle est la probabilité que n tirages soit nécessaires pour avoir une boule noire.
Solution : ça revient à calculer

$$P(X=n) = \left(\frac{N}{M+N}\right)^{n-1}\left(\frac{M}{M+N}\right) = \frac{N^{n-1}}{(M+N)^n}.M.$$

■

0.12 Loi hypergéométrique

Soit une urne qui contient N boules dont M sont rouges et $M-N$ sont blanches, on tire n $(n \leq N)$ boules sans les remettre (tirage sans remise). Soit X le nombre de boules rouges tirées. Alors la variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètre n, N, M tel que :
$Val(X) = \{0,1,2,...,min\{n,M\}\}$ et

$$P(X=k) = \frac{N.C.F}{N.C.P} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Proposition

Soit X une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique

- L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = n\frac{M}{N}.$$

- La variance mathématique de X est

$$Var(X) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

R La loi hypergéométrique est notée : $H(N,M,n)$.

■ **Example 0.12** Une boite contient 8 composants parmi les quels 2 sont défectueux. Trois composants sont pris au hasard et sans remise de la boite. Soit X le nombre de composants défectueux dans l'échantillon. Alors X suit une loi hypergéométrique avec $Val(X) = \{0,1,2\}$ et de paramètre $N=8$, $M=2$, $n=3$ tel que :
$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_6^3}{C_8^3} = \frac{20}{56}$
$P(X=1) = \frac{C_2^1 C_6^2}{C_8^3} = \frac{30}{56}$
$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_6^1}{C_8^3} = \frac{6}{56}$

■

Lois de probabilités absolument continues usuelles

0.13 Loi uniforme

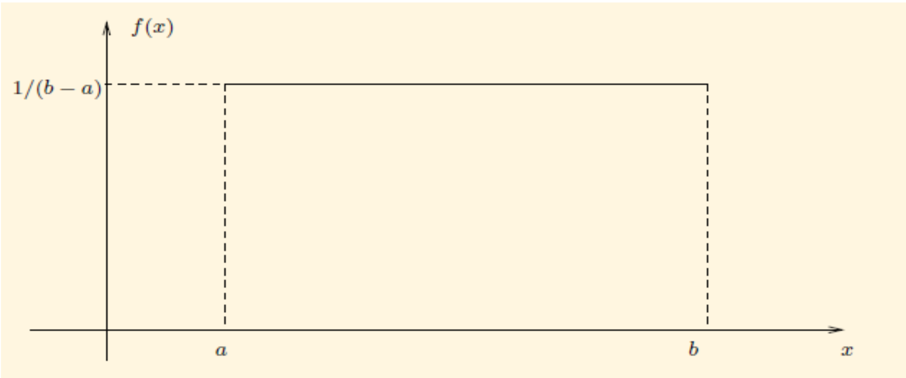
Definition 0.13.1 Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a,b]$ (notée $X \sim \mathscr{U}_{[a,b]}$)si sa densité de probabilité s'écrit sous la forme suivante :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx = 1$$

La représentation graphique de la densité de probabilité de la loi uniforme



0.13.1 Fonction de Répartition

Supposons que $X \sim \mathscr{U}_{[a,b]}$, la fonction de répartition de X est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Alors

- Si $x < a$ alors $F(X) = 0$,
- Si $a \leq x \leq b$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}$$

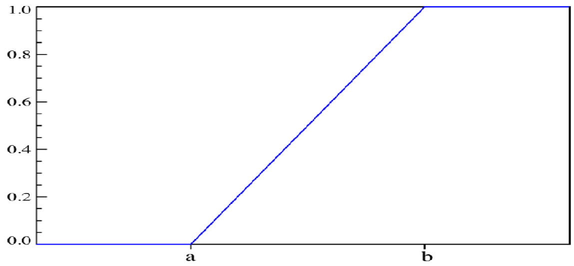
- Si $x < b$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{b} f(t)dt + \int_{b}^{x} f(t)dt = 0 + 1 + 0 = 1$$

Finalement la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

La représentation graphique de la fonction de répartition de la loi uniforme



L'espérance mathématique et la variance

- L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{b+a}{2}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{a} x f(x) dx}_{=0} + \int_{a}^{b} x f(x) dx + \int_{b}^{+\infty} x f(x) dx \\
&= \int_{a}^{b} x f(x) dx = \int_{a}^{b} x \left(\frac{1}{b-a}\right) dx \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2(b-a)}(b-a)(b+a) = \frac{b+a}{2}.
\end{aligned}$$

- La variance de X est donnée par :

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) &= E\left(X^2\right) - (E(X))^2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{3(b-a)}(b-a)\left(b^2+ab+a^2\right) - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\
&= \frac{\left(b^2+ab+a^2\right)}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

■ **Example 0.13** Dans un magasin, le temps d'attente X à la caisse, exprimé en minutes, suit la loi uniforme sur l'intervalle [1,11]

1. Déterminer la fonction de densité de probabilité f de la loi de X,
2. Quelle est la probabilité que le temps d'attente soit compris entre 3 et 5 minutes?
3. Quelle est la probabilité qu'un client attende plus de 8 minutes à la caisse?
4. Préciser le temps d'attente moyen à la caisse

Réponses :

1. La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[1,11]$. Donc la fonction de densité est la fonction constante f définie sur [1,11] par

$$f(x) = \frac{1}{11-1} = 0,1$$

2. La probabilité que le temps d'attente à la caisse soit compris entre 3 et 5 minutes est

$$P(3 \leq X \leq 5) = \int_3^5 0,1dx = (5-3)\times 0,1 = 0,2$$

3. La probabilité que le temps d'attente à la caisse soit supérieur à 8 minutes est

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X < 8) = 1 - \int_1^8 0,1dx = 1-(8-1)\times 0,1 = 0,3$$

4. Le temps d'attente moyen est l'espérance mathématique de la loi uniforme sur $[1,11]$

$$E(X) = \tfrac{1+11}{2} = 6$$

■

0.14 Loi exponentielle

On rencontre souvent la loi exponentielle lorsqu'il s'agit de représenter ***le temps d'attente*** avant l'arrivée d'un évènement spécifié. C'est la distribution la plus simple dans le domaine de la fiabilité.

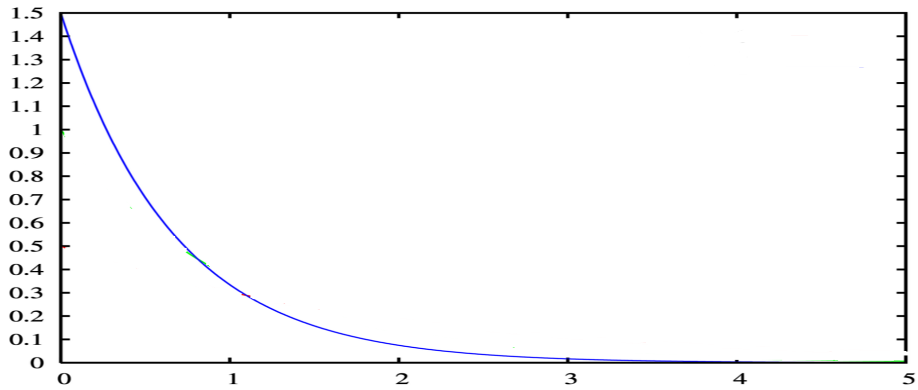
Definition 0.14.1 On dit que la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ où $\lambda > 0$, et on note $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = 1$$

La représentation graphique de la densité de probabilité de la loi exponentielle



0.14.1 Fonction de Répartition

Supposons que $XX \sim \mathscr{E}(\lambda)$, la fonction de répartition de X est définie par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Alors

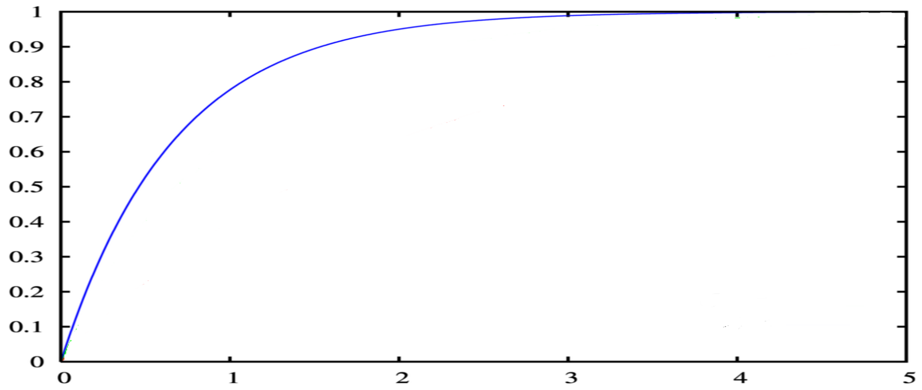
- Si $x < 0$ alors $F(X) = 0$
- Si $x \geq 0$ alors

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = 0 + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La représentation graphique de la fonction de répartition de la loi exponentielle



L'espérance mathématique et la variance

- L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

En effet,
$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ à l'aide d'une intégration par parties.

- La variance de X

$$E(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

En effet,
on sait que $Var(X) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2$. Comme $E\left(X^2\right) = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$ à l'aide de deux intégrations par parties, on obtient $E\left(X^2\right) = \frac{2}{\lambda}$.

Propriété
Une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle ***n'a pas de mémoire***.
Interprétation
Etant donnée que X est une variable aléatoire décrivant la "durée de vie" d'une pièce. Alors la propriété de "Non mémoire" exprime le fait que la pièce ne "vieillet pas" i.e. si la pièce a vécue au moins "t" unités de temps, alors elle vivra encore "s" unités de temps avec la même probabilité qu'une pièce neuve, c'est une propriété de non vieillissement ou d'absence de mémoire.

■ **Example 0.14** La durée de vie d'un ordinateur portable exprimée en années est une variable aléatoire X suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,125$.

1. La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable dépasse 5 ans est

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - \int_0^5 0,125 e^{-0,125} dt = e^{-0,125\times 5} \approx 0,535$$

2. La probabilité que la durée de vie de cet ordinateur portable soit inférieure à 3 ans est

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 0,125 e^{-0,125} dt = e^{-0,125\times 3} \approx 0,313$$

■

0.15 Loi de Cauchy

Definition 0.15.1 Une variable aléatoire X suit une **loi de Cauchy**, de paramètres $\alpha \in \mathbb{R}_+^\star$ (paramètre d'échelle) et $x_0 \in \mathbb{R}$ (paramètre de position) si elle admet pour densité de probabilité la fonction:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha + (x - x_0)^2}$$

elle nadmet aucun moment ni espérance, ni variance. Ceci est notée $X \sim \mathscr{C}(x_0, \alpha)$

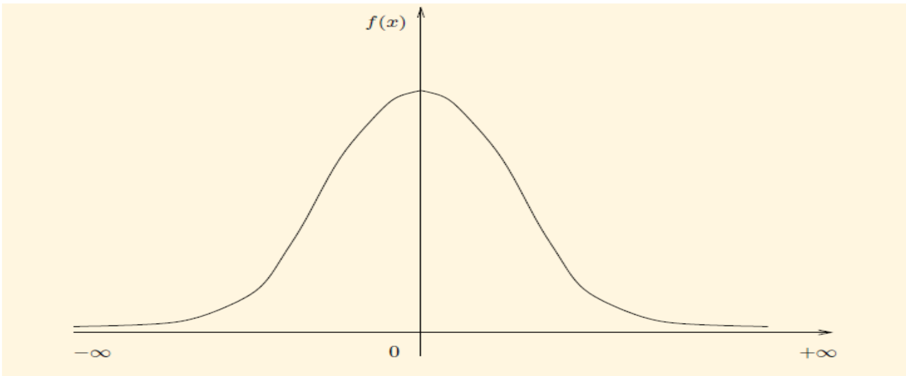
0.16 Loi Normale (Gauss)

Definition 0.16.1 — Loi normale centrée réduite. Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi normale centrée ($\mathbb{E}[X] = 0$) réduite ($\mathrm{Var}(X) = 1$) et on note $X \sim N(0,1)$ si X admet une densité f définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right)$$

.
On note $X \sim \mathscr{N}(0,1)$.

La représentation graphique de la densité de probabilité de la loi normale centrée réduite



0.16.1 Fonction de répartition

On note F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Elle est définie, pour tout réel y, par :

$$F_Y(y) = P(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

R On ne peut pas calculer implicitement la fonction de répartition $F_Y(y)$, mais elle est tabulée.

Table statistique

Les probabilités d'événements de la variable aléatoire continue suivant la loi normale centrée réduite sont répertoriées dans la table suivante: Si $x = a,bc$ alors $F(x) = P(X \leq x)$ est la valeur correspondante à l'intersection de ligne a,b et la colonne $0,0c$. Par exemple pour trouver $F(2,45) = P(X \leq 2,45)$, on lit la valeur qui correspond à l'intersection de la ligne 2,4 et la colonne 0,05 ce qui donne

$$P(X \leq 2,45) = 0,9929 = 0,993$$

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7793	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8906	0,8925	0,8943	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Definition 0.16.2 — Loi normale. Soit X une variable aléatoire continue. X suit une loi normale de paramètres (μ, σ), notée $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, si X admet comme densité:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

et on aura $E(X) = \mu$ et $Var(X) = \sigma^2$.

R Si $X \sim \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$, alors $Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

■ **Example 0.15** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 2$, déterminer la probabilité pour que $X \leq 3$ On a

$$X \leq 3 \Leftrightarrow X-1 \leq 2 \Leftrightarrow Y := \frac{X-1}{2} \leq 1$$

Or, d'après la remarque précedente, Y suit une loi centrée réduite. Donc d'après la table statistique de la loi normale centrée réduite on a

$$P(Y \leq 1) = 0,84134.$$

Finalement,

$$P(X \leq 3) = 0,84134.$$

■

Proposition
Si $X \sim \mathcal{N}\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ et $Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ sont indépendantes alors $X+Y \sim \mathcal{N}\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

0.17 Log-normale

Une variable aléatoire X est dite suit une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si la variable $Y = \ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 notée $X \sim \log - \mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ et sa fonction de densité de X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

Propriété

- $E(X) = e^{\left(\mu+\sigma^2\right)}$
- $Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2} \times e^{\sigma^2-1}$.

0.18 Loi Gamma

Definition 0.18.1 — fonction Gamma. Nous appelons fonction Gamma la fonction définie par:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

Definition 0.18.2 — loi Gamma. Une variable aléatoire X suit une loi de Gamma, de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Ceci est notée $X \sim \mathcal{G}(\alpha,\beta)$.

R Si $\alpha = 1$, alors la loi $\mathcal{G}(1,\beta) = \mathcal{E}(\beta)$ est appelée loi Exponentielle de paramètre β.

Propriété

- $E(X) = \frac{\alpha}{\beta}$
- $Var(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

0.19 Loi de Weibull

C'est une loi très représentative d'une grande variété de phénomènes aléatoires, elle est particulièrement utilisée en Fiabilité.

Definition 0.19.1 Une variable aléatoire X suit une loi de Weibull, de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Cela est notée $X \sim \mathscr{W}(\alpha, \beta)$

Propriété

- $E(X) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\beta^{\frac{1}{\alpha}}}$
- $Var(X) = \frac{1}{\beta^{\frac{2}{\alpha}}}\left(\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}+1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right)$.

0.20 Loi Bêta

C'est une loi très générale, elle est très utilisée en statistique Bayésienne, elle sert à exprimer la fiabilité d'un système.

Definition 0.20.1 Une variable aléatoire X suit une loi Bêta, de paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \end{cases}$$

Ceci est notée $X \sim \mathscr{B}(\alpha, \beta)$

Propriété

- $E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$
- $Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

0.21 Loi du Khi deux (Pearson)

C'est l'une des lois les plus importantes en statistique. Elle permet la construction des intervalles de confiances, la construction des tests statistiques, en particulier le test d'ajustement, sa particularité est sa relation avec la loi normale.

Definition 0.21.1 Soit $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k variables aléatoires normales centrées réduites, on appelle $\mathscr{X}^2$ la variable aléatoire définie par:

$$\mathscr{X}^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

On dit que $\mathscr{X}^2$ suit une loi du Khi-deux à k degrés de liberté. On note $\mathscr{X}_k^2$ ou $\mathscr{X}^2(k)$ et de densité

$$f_{\mathscr{X}^2}(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad \forall x \geq 0$$

Propriété

- $E\left(\mathscr{X}^2\right) = k$
- $Var\left(\mathscr{X}^2\right) = 2k.$

0.22 Loi de Student

Definition 0.22.1 Soit U une variable aléatoire telle que $U \sim \mathscr{N}(0,1)$ et V une variable aléatoire telle que $V \sim \mathscr{X}^2(n), U$ et V étant indépendantes, on dit alors que $\mathscr{T} = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{k}}}$ suit une loi de Student à k degrés de liberté et on la note $\mathscr{T}(k)$. Sa fonction de densité est

$$f_{\mathscr{T}}(x) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriété

- $E(\mathscr{T}) = 0 \quad$ si $k > 1$
- $Var(\mathscr{T}) = \frac{k}{k-2} \quad$ si $k > 2$

IV Approximations de certaines lois

0.23 Introduction

Concrètement, un des intérêts de la notion d'approximation de loi (convergence en loi) d'une suite de variables aléatoires (X_n) vers X est d'approcher la loi de $(X_n)_n$, qui est souvent inconnue ou difficile à utiliser, par la loi de X.

0.24 Approximation de la loi binomiale par la loi de poisson

On sait bien que la loi Binomiale dépend de deux paramètres n et p_n. Bien qu'il existe quelques tables statistiques, elle n'est pas simple à utiliser. La loi de Poisson ne dépend que d'un seul paramètre ce qui la rend plus pratique. Il faut donc avoir toujours le reflexe, lorsque les conditions le permettent, on peut avoir intérêt à remplacer une loi Binomiale par une loi de Poisson.
Lorsque n est grand et p_n petit, de telle façon que le produit $np_n = \lambda$ reste petit par rapport n, la loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ peut être approchée par la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$. Ce qui est montré par le théorème suivant :

Theorem 0.24.1 Soit $(\mathrm{X}_n)_n$ une suite de variables aléatoires de lois binomiales $\mathscr{B}(n, p_n)$ telles que

$$np_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Alors la suite $(\mathrm{X}_n)_n$ converge en loi vers une variable de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$.

$$\mathscr{B}(n, p_n) \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\text{Loi}}} \mathscr{P}(\lambda)$$

Démonstration
Soient k un entier naturel fixé et n un entier supérieur à k

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k) &= \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot p^k q^{n-k} \\
\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k) &= 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{(pn)^k q^{n-k}}{k!}
\end{aligned}$$

Or lorsque n tend vers $+\infty$,

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \to 1 \quad \text{et} \quad (1-p)^{n-k} \to e^{-\lambda}$$

D'où

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}_n = k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

En pratique : la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p_n)$ peut être approchée par la loi de poisson $\mathscr{P}(\lambda = np_n)$ lorsque : $p \leq 0.1$; $n \geq 30$ et $np < 10$.

(R) Lorsqu'on approxime (approche) une loi par une autre, on choisit le ou les paramètres de la loi approchante de manière que l'espérance (et la variance lorsqu'on a suffisamment de paramètres) de la loi approchante soit égale à l'espérance (et la variance) de la loi approchée.

■ **Example 0.16** On considère une loi Binomiale de paramètres $n = 45$ et $p_n = 0.1$.
On remarque très bien que les conditions d'approximation de cette loi par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.1 \times 45 = 4,5$. ■

0.25 Approximation de la loi binomiale par la loi de normale

La loi binomiale n'est pas toujours simple à utiliser. Si on prend à titre d'exmple, le calcul des combinaisons dans la loi binomiale de paramètre $n = 150$ et $p = 0,05$ est très long. En effet, si on cherche à calculer $P(X < 58)$, on va devoir calculer $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \ldots + P(X = 57)$, ce qui représente 58 calculs en tout. Calculer $P(X < 58)$ est bien plus simple par lecture de la table de la loi normale centrée réduite. Il est donc légitime de chercher à faire des approximations de lois.

En pratique, lorsque n est assez grand, on peut approximer la loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ par la loi normale $\mathscr{N}(np, npq)$ avec $q = (1 - p)$. On donne parfois comme condition np et $nq > 5$. Plus généralement les conditions d'approximation sont : $n \geq 30$, $p > 0,1$ et $np \geq 10$.

Correction de continuité : La correction de continuité s'applique lorsqu'on approche une loi de probabilité discrète par une loi de probabilité continue : la convergence de la loi Binomiale vers la loi normale se traduit par le fait que les extrimités supérieures des bâtons du diagramme de la loi Binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ sont voisine de la courbe de densité de la loi normale $\mathscr{N}(np, npq)$. On obtient donc une valeur approchée de $P(X = k)$ par la surface sous la courbe de densité comprise entre les deux droites d'abscisse $k - \frac{1}{2}$ et $k + \frac{1}{2}$.
Autrement dit,
Nous remplacerons $P(X = k)$ par $P(k - \frac{1}{2} \leq X \leq k + \frac{1}{2})$.

■ **Example 0.17** Approximation de la loi binomiale $\mathscr{B}\left(50, \frac{1}{2}\right)$ par la loi normale $\mathscr{N}\left(25; \frac{5}{\sqrt{2}}\right)$. Le calcul de $\mathbf{P}(24 \geqslant X \geqslant 26)$ par la loi binomiale exacte donne à peu près 0,3282 . A comparer avec l'approximation par la loi normale

- sans correction de continuité 0,223,
- avec correction de continuité 0,328.

■

0.26 Approximation de la loi Hypergéométrique par la loi binomiale

Theorem 0.26.1 Soit $(\mathrm{X_N})_\mathrm{N}$ une suite de variables aléatoires Hypergéométriques $\mathscr{H}(\mathrm{N}, n, p)$. Alors la suite de variables aléatoires $(\mathrm{X_N})_\mathrm{N}$ converge en loi vers une variable binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ lorsque N tend vers $+\infty$. on note

$$\mathscr{H}(\mathrm{N}, n, p) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{\mathrm{Loi}} \mathscr{B}(n, p)$$

Démonstration
La probabilité ponctuelle de X_N est

$$P(X_N = k) = \frac{C_{N_p}^k C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$$

Lorsque N tend vers l'infini avec n constant,

$$C_N^n = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} = N^n\left(1 - \frac{1}{N}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{N}\right)\frac{1}{n!} \equiv \frac{N^n}{n!}$$

car $\left(1 - \frac{m}{N}\right) \equiv 1$ lorsque N tend vers l'infini. De même, lorsque N tend vers l'infini avec p et k fixes, alors

$$C_{Np}^k \equiv \frac{(Np)^k}{k!} \quad \text{et} \quad C_{N(1-p)}^{n-k} \equiv \frac{(N(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$$

Finalement,

$$P(X_N = k) \equiv \frac{p^k(1-p)^{n-k} n!}{k!(n-k)!} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

ce qui correspond à la probabilité ponctuelle d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.
C'est pour cela que lorsque la population (de taille N) est très grande, on peut assimiler la loi d'une variable aléatoire comptant le nombre de réussite sur un tirage sans remise (loi Hypergéométrique) à une loi Binomiale (tirage avec remise).

Par exemple, un échantillon de 2000 individus conviendra aussi bien pour faire un sondage dans une population de 200000 habitants, que dans un population de 2 millions d'habitants.
En pratique : la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, n, p)$ peut être approchée par la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$ lorsque $N \geq 10n$.

0.27 Approximation de la loi de poisson par la loi normale

Theorem 0.27.1 Soit $(\mathrm{X}_\lambda)_\lambda$ une suite de variables aléatoires de POISSON $\mathscr{P}(\lambda)$, quand $\lambda \to +\infty$,

$$\frac{\mathrm{X}_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \underset{\lambda \to +\infty}{\xrightarrow{\text{Loi}}} \mathscr{N}(0; 1)$$

En pratique: λ doit être assez grand, afin d'approximer la loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, par la loi normale $\mathscr{N}(\lambda; \lambda)$. L'approximation est en général acceptée dès que $\lambda > 10$, elle est très satisfaisante pour $\lambda > 18$. Il faut encore faire une correction de continuité car on passe d'une loi discrète à une loi continue. L'approximation par une loi de PoIsson permet ainsi d'éviter le calcul pénible des coefficients binomiaux.

Quelques rappels

Definition 0.27.1 — Expérience aléatoire. On appelle expérience aléatoire ou épreuve, toute expérience dont le résultat est régi par le hasard, lorsqu'on répette l'expérience dans les mêmes conditions.

■ **Example 0.18** Le jet d'une pièce de monnaie et l'observation de la face supérieure est une expérience aléatoire qui conduit à deux résultats possibles, Pile (P) et Face (F) / ■

■ **Example 0.19** La mesure de la durée de vie d'une lampe est une expérience dont le résultat est un temp t. ■

Definition 0.27.2 — Ensemble fondamental. L'ensemble fondamental de tous les résultats possible d'une épreuve est dit espace des événements, espace des épreuves,.... On le notera généralement par Ω.

■ **Example 0.20** Lorsqu'on jette un dé à six faces, l'ensemble fondamental est : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
■

Definition 0.27.3 — Evénement élémentaires et composées.
- Un événement élémentaire est un sous ensemble de Ω, à un seul élément.
- Un événement composé est un ensemble d'événement élémentaires.

■ **Example 0.21** Lorsqu'on jette un dé à six faces : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- "Avoir le chiffre 6 " est un événement élémentaire, $A = \{6\}$.
- "Avoir un chiffre pair" est un événement composé de trois événements élémentaires, $B = \{2,4,6\}$.

■

Definition 0.27.4 — Espace probabilisé. On appelle espace probabilisé le triplé (Ω, ξ, P) où Ω est l'ensemble fondamental, ξ est une collection de sous-ensemble de Ω (la collection des événements), et $P : \xi \mapsto [0,1]$ est une probabilité.

Exercices d'application

0.28 Exercices Corrigés

Exercice 1

1. Le nombre de voitures vendues chaque jour par une succursale donnée définit une variable aléatoire X, entre 0 et 4. On a établi que X suit la loi suivante :

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	0.1	0.4	0.2	0.2	

   a) Compléter le tableau.
   b) Calculer $E(X)$ le nombre moyen de voitures vendues par jour, et calculer $var(X)$.
2. On pose $Y = 2X$
   a) Quelles sont les valeurs prises par Y ? Donner la loi de Y.
   b) Calculer $E(Y)$ et $var(Y)$

Solution de l'exercice 1

1. (a) La somme des probabilités doit être égale à 1. Ce qui implique que $P(N=4) = 0.1$.
   (b)
$$\begin{aligned} E(N) &= 0.1\times 0 + 0.4\times 1 + 0.2\times 2 + 0.2\times 3 + 0.1\times 4 \\ &= 1.8. \\ E(N^2) &= 0.1\times 0^2 + 0.4\times 1^2 + 0.2\times 2^2 + 0.2\times 3^2 + 0.1\times 4^2 \\ &= 4.6 \end{aligned}$$
   Ce qui implique
$$\begin{aligned} Var(N) &= E(N^2) - (E(N))^2 \\ &= 4.6 - (1.8)^2 = 1.36. \end{aligned}$$
2. (a)

y	0	1	4	6	8
$\mathbb{P}(Y=y)$	0.1	0.4	0.2	0.2	0.1

(b) $\mathbb{E}(2Y) = 2\mathbb{E}(Y) = 3.6$ et $\operatorname{var}(2Y) = 4\operatorname{var}(Y) = 5.44$

3.

Exercice 2

Dans une population, les statistiques ont montré que 51% des nouveaux-nés sont des garçons. On considère la variable aléatoire X qui représente le nombre de garçon dans une famille à un enfant.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution de l'exercice 2

1. La loi de X
   Le nombre des garçons est 51% qui est égale 0,51 et la variable aléatoire X représente le nombre de garçons Alors le succés est on a un garçons ie $P = 0,51$ et l'echec est
   $$q = 1 - p = 1 - 0,51 = 0,49$$
   Autrement dit
   $$P(X = 1) = p = 0,51$$
   et
   $$P(X = 0)1 - p = 0,49$$
2. Le calcul de $E(X)$ et $V(X)$
   $$E(X) = p = 0,51$$
   et $V(X) = \sum_{i=0}^{1} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i) = (0 - E(X))^2 P(X = 0) + (1 - E(X))^2 P(X = 1) = qp = 0,51 \times 0,49 = 0,2499$

Exercice 3

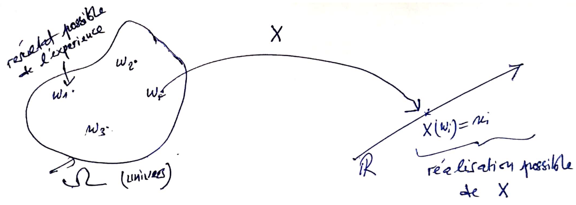
Soit X une variable aléatoire quantitative discrète prenant les valeurs 1, ..., , 4, avec les probabilités suivantes:

$$p_k = P(X = k) = C\frac{k}{4} \text{ pour } k = 1, \ldots, 4$$

1. Calculer la constante C pour que les p_k définissent bien une loi pour X.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de la variable X.
3. Déterminer $E(X)$ et var (X).

Solution de l'exercice 3

1. La somme des p_k étant égale à 1
   $$\begin{aligned} 1 &= C\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4}\right) \\ &= \frac{5}{2}C \end{aligned}$$
   $$\Rightarrow \quad C = \frac{2}{5}$$
2. Le Graphe



3.

$$E(X) = 0.1 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.3 \times 3 + 0.4 \times 4 = 3$$
$$E\left(X^2\right) = 0.1 \times 1^2 + 0.2 \times 2^2 + 0.3 \times 3^2 + 0.4 \times 4^2 = 10$$
$$\text{var}(X) = 10 - 3^2 = 1.$$

Exercice 4

Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est :

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6et+
$P(X = x_i)$	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05

1. Donner la fonction de répartition de X.
2. Quelle est la probabilité que la machine ait plus de 3 pannes?.
3. Calculer $E(X)$ en donnant à 6 et + la valeur moyenne 7,5.

Solution de l'exercice 4

1. La fonction de répartition de X: On a par Définition
   $F_X(x_i) = P(X \leqslant x_i) = \sum_{i \in E, x_i \leqslant x} P(X = x_i)$

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6et+
$P(X = x_i)$	$0,3$	$0,2$	$0,15$	$0,15$	$0,1$	$0,05$	$0,05$
$F(x_i)$	$0,3$	$0,5$	$0,65$	$0,8$	$0,9$	$0,95$	1

2. La probabilité que la machine ait plus de 3 pannes est donnée comme suit :

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - 0,8 = 0,2$$

3. Le calcul de $E(X)$ en donnant à 6 et + la valeur moyenne 7,5:

$X = x_i$	0	1	2	3	4	5	6et+
$P(X = x_i)$	0,3	0,2	0,15	0,15	0,1	0,05	0,05
$x_i P(X = x_i)$	0	0,2	0,3	0,45	0,4	0,25	$0,375 = 7,5$*$0,05$

   Alors $E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i P(X = x_i) = 1{,}975 \approx 2$

Exercice 5

On considère une variable aléatoire X de densité $f(x) = cx(1-x)$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et 0 ailleurs

1. Evaluer la constante c pour que f soit une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. Calculer $P(\frac{1}{4} < X < \frac{3}{4})$
4. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Solution de l'exercice 5

1. On doit avoir $\int_0^1 ct(1-t)dt = 1$ soit $\left[ct^2/2 - ct^3/3\right]_{t=0}^{t=1} = 1$ ou encore $c(1/2-1/3) = 1$ c'est à dire $c = 6$. On a donc $f(x) = 6x(1-x)$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et 0 ailleurs.
2. On a alors $F(x) = \int_{t=0}^{x=1} 6t(1-t)dt = 3x^2 - 2x^3 \sin \leqslant x \leqslant 1$ et 0 si $x \leqslant 0$ et $F(x) = 1$ si $x \geqslant 1$;
3. On en déduit que $P(1/4 < X < 3/4) = F(3/4) - F(1/4) = \frac{11}{16} \sim 0.69$.
4. On a donc $E(X) = \int_{t=0}^{x=1} 6t^2(1-t)dt = \left[2t^3 - 3/2t^4\right]_{t=0}^{t=1} = 2 - 3/2 = 1/2 = .5$ $E\left(X^2\right) = \int_{t=0}^{x=1} 6t^3(1-t)dt = \left[3/2t^4 - 6/5t^5\right]_{t=0}^{t=1} = 3/2 - 6/5 = 3/10 = .3$ et $\mathrm{Var}(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = .3 - .5^2 = .05 = \frac{1}{20}$

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire continue, on suppose que la fonction densité pour X est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < -1 \\ c(x+1)^2 & \text{if } -1 \leq x \leq 0 \\ c(x-1)^2 & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la constante c.
2. Calculer la fonction de répartition F de X.

Solution de l'exercice 6

1. $$\begin{aligned} 2c\int_{-1}^{0}(t+1)dt &= \frac{2c}{3}(t+1)|_{-1}^{0} \\ &= \frac{2c}{3} = 1 \end{aligned}$$
   alors $c = \frac{3}{2}$.
2. $F(y) = \int_{-\infty}^{y} F(t)dt$

$$F(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y < -1 \\ \int_{-1}^{y} F(t)dt & \text{if } -1 \leq y \leq 0 \\ \int_{-1}^{0} F(t)dt + \int_0^y F(t)dt & \text{if } 0 < y \leq 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 7

Déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et la variance $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ associées à chacune des fonctions de densité ci-après. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x < 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ $\Bigg|$ $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Solution de l'exercice 7

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ \text{et } \mathbb{V}\mathrm{ar}(x) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbb{E}(X))^2 \end{cases}$$

1. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x0dx + \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 \frac{1}{2}xdx + \int_2^{+\infty} x0dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{4}x^2\Big|_1^2 = \frac{13}{12}$ De même,
2. $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} x0dx + \int_{-1}^{0} x(1+x)dx + \int_0^1 x(1-x)dx + \int_1^{+\infty} x0dx = 0$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \underbrace{(\mathbb{E}(X))^2}_{=0} = \int_{-\infty}^{-1} x^2 0dx + \int_{-1}^{0} x^2(1+x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)dx + \int_1^{+\infty} x^2 0dx = \frac{1}{6}$.

Exercice 8

Il y a un tremblement de terre majeur en moyenne aux 150 ans au Québec. Quelle est la probabilité qu' il y ait un tremblement de terre majeur dans les prochaines 30 années?

Solution de l'exercice 8

On est en présence d'une v.a. X qui donne le temps d'attente en année avant un premier événement. Comme il y a en moyenne un tremblement de terre par 150 ans il y a $1/150$ tremblements de terre en moyenne par année. On a $X \sim \mathrm{Exp}(1/150)$ et ainsi

$$\Pr(X < 30) = \left(1 - e^{-\frac{30}{150}}\right) = 0.18127$$

Exercice 9

Le temps de vie d'une composante électronique. Une montre digitale a une durée de vie moyenne de 100000 heures. Quelle est la probabilité qu'elle ne fonctionne plus après 5 ans?

Solution de l'exercice 9

Posons X la v.a. qui donne la durée de vie en années d'une montre digitale, on a une exponentielle de paramètre

$$\lambda = 100000/24/365.25 = 11.408$$

On a $\Pr(X \leq 5) = \left(1 - e^{-5/11.408}\right) = 0.35486$

Exercice 10

Un épicier reçoit un lot de pommes dont 25% sont avariés. Il charge un employé de préparer des emballages de 5 pommes chacun. Celui-ci, négligent, ne se donne pas la peine de jeter les fruits avariés. Chaque client qui trouve, dans l'emballage qu'il achète, 2 fruits ou plus qui sont avariés, revient au magasin se plaindre.

1. Soit X le " nombre de pommes avariées dans un emballage ". Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité pour qu'un client donné se plaigne auprès de son épicier?
3. Si l'épicier a 100 clients qui achètent des pommes ce jour-là, combien y aura-t-il de plaintes?

Solution de l'exercice 10

Soit X la variable aléatoire "nombre de pommes avariées dans un emballage"

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres (5,0,25);
2. Un client se plaint s'il trouve au moins 2 pommes avariées, donc

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - C_0^5 0,75^5 - C_1^5 0,25 \cdot 0,75^4 = \frac{47}{128} \simeq 0,37$$

3. Soit Y la variable aléatoire a nombre de clients non satisfaits ". Elle suit une loi binomiale de paramètres $(100, 47/128)$. On en cherche l'espérance:

$$E(Y) = 100 \cdot \frac{47}{128} \simeq 36,7$$

Sur les 100 clients, environ 37 viendront se plaindre en moyenne.

Exercice 11

1. Dans un lot de 100 composants électroniques chaque composant a la probabilité $p = 0.02$ d'être défectueux, indépendamment des autres: on note X le nombre de composants défectueux.
   i) Donner la loi de X.
   ii) Calculer la probabilité qu'il y ait 4 composants défectueux dans le lot.
2. Dans un lot de 100 composants électroniques il y a 2 composants défectueux: on prélève sans remise n composants et on note Y le nombre de composants défectueux parmi les n prélevés.

i) Donner la loi de Y lorsque $n=2$ puis pour n quelconque entre 2 et 98 .
ii) Calculer $\mathrm{P}(Y=2)$.

Solution de l'exercice 11

- **i)** Loi $\mathscr{B}(100, 0.02)$:

$$\operatorname{pr}(X=k)=\binom{100}{k}(0.02)^k(0.98)^{100-k}$$

pour $k=0,\ldots,100$

ii) On a pr $(X=4)=\binom{100}{4}(0.02)^4(0.98)^{96}\cdot$ On approche par $\mathscr{P}(2)$ donc

$$\operatorname{pr}(X=4)\simeq e^{-2}\cdot\frac{2^4}{4!}$$

- **i)** Loi $\mathscr{H}(100,2,2)$:

$$\operatorname{pr}(Y=k)=\frac{\binom{2}{k}\binom{98}{2-k}}{\binom{100}{2}}$$

pour $k=0,1,2$ Loi $\mathscr{H}(100,2,n)$:

$$\operatorname{pr}(Y=k)=\frac{\binom{2}{k}\binom{98}{n-k}}{\binom{100}{n}}$$

pour $k=0,1,2$

ii) On trouve

$$\operatorname{pr}(Y=2)=\frac{\binom{98}{n-2}}{\binom{100}{n}}=\frac{n}{100}\frac{n-1}{99}$$

Exercice 12
Soit X une variable aléatoire dont la densité a pour expression, pour $x>0$:

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\theta}}\exp-\frac{(\ln x)^2}{2\theta} \text{ avec } \theta>0$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y=\ln X$.
Solution de l'exercice 13

La v.a. Y a pour fonction de répartition :

$$G(y)=P(\ln X<y)=P\left(X<e^y\right)=F\left(e^y\right)$$

où F est la f.r. de X. La densité obtenue par dérivation est :

$$g(y)=e^y f\left(e^y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}\exp-\frac{y^2}{2\theta}$$

qui est la densité de la loi normale centrée de variance θ.

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathrm{N}(3,2)$, donc de moyenne 3, et d'écart type 2. Calculer :

1. $P(X<4)$
2. $P(X<-1)$
3. $P(X>1)$
4. $P(X<x_1)=0,75$
5. $P(X>x_2=0,85$

Solution de l'Exercice 14

Nous avons $X\sim \mathrm{N}(3,2)\Rightarrow Y=\frac{X-3}{2}\sim \mathrm{N}(0,1)$

1. $P(X<4)=P\left(\frac{X-3}{2}<\frac{4-3}{2}\right)=P(Y<0,5)=F(0,5)=0,6915$
2. $P(X<-1)=P\left(\frac{X-3}{2}<\frac{-1-3}{2}\right)=P(Y<-2)=1-F(2)=1-0,9772=0,0228$
3. $P(X>1)=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{1-3}{2}\right)=P(Y>-1)=1-P(Y\leq -1)=1-[1-F(1)]=F(1)=0,8413$
4. $P(X<x_1)=0,75,\Rightarrow P\left(\frac{x-3}{2}<\frac{x_1-3}{2}\right)=P\left(Y<\frac{x_1-3}{2}\right)=F\left(\frac{x_1-3}{2}\right)=0,75\Rightarrow\frac{x_1-3}{2}=0,6745$ $\Rightarrow x_1=4,35$
5. $P(X>x_2)=0,85\Rightarrow P\left(\frac{x-3}{2}>\frac{x_2-3}{2}\right)=P\left(Y>\frac{x_2-3}{2}\right)=1-P\left(Y\leq -\left[\frac{x_2-3}{2}\right]\right)=0,85=\left(Y\leq -\left[\frac{x_2-3}{2}\right]\right)=0,15\Rightarrow x_2=0,9272$

Exercice 15

Deux personnes jouent à "pile" ou "face" n fois chacune.

1. Quelle est la probabilité que chacune des deux personnes obtienne k fois le côté " pile" ?
2. Quelle est la probabilité que les deux personnes obtiennent le même nombre de fois "pile"?

Solution de l'Exercice 15

Le nombre de "pile" obtenu par l'une ou l'autre des deux personnes en jetant la pièce n fois est une variable binomiale d'ordre n et de paramètre $\frac{1}{2}$

1. Pour tout $k, 0\leq k\leq n$, la probabilité p_{ik} que la i eme personne obtienne k fois "pile" est :
$$\begin{aligned} p_{ik}&=C(n,k)\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\\ &=C(n,k)\left(\frac{1}{2}\right)^n\end{aligned}$$
d'où, pour tout $k, 0\leq k\leq n$, la probabilité p_k que les deux personnes obtiennent chacune k fois "pile" est :
$$p_k=p_{1k}p_{2k}=\left[C(n,k)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2$$
2. Ainsi, la probabilité p que les deux personnes obtiennent le même nombre de fois "pile" est :
$$\begin{aligned} p&=\sum_{k=0}^{n}p_k\\ &=\sum_{k=0}^{n}\left[C(n,k)\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2\\ &=C(2n,n)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\end{aligned}$$

Exercice 16

Une machine à embouteiller peut tomber en panne. La probabilité d'une panne à chaque emploi est de $0,01$. La machine doit être utilisée 100 fois. Soit $X =$ nombre de pannes obtenues après 100 utilisations

1. Quelle est la loi de X? Calculer $P(X=0), P(X=1)$ et $P(X \geqslant 4)$
2. On estime le cout d'une réparation à $500D$ A. Soit Y la variable représentant la dépense pour les réparations après 100 utilisations. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Solution de l'exercice 17

1. Cette loi de probabilité qui représentant loi Binomiale de paramètre (n, p) avec $n = 100$ et $p = 0,01$ Donc
$$P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
Calculons $P(X=0), P(X=1)$ et $P(X \geqslant 4)$
$$P(X=0) = C_{100}^0 (0,01)^0 (1-0,01)^{100-0} = 0,366$$
$$P(X=1) = 0,369$$
$$\begin{aligned} P(X \geqslant 4) &= 1 - P(X < 4) = 1 - (P(X=3) + P(X=2) + P(X=1) + P(X=0)) \\ &= 1 - (0,061 + 0,184 + 0,369 + 0,366) = 0,02 \end{aligned}$$
2. Exprime Y en fonction de X et calcule $E(Y)$ et $V(Y)$ On a $Y = 500X$ donc $E(y) = 500E(X)$ avec $E(X) = np$ et $V(Y) = 500^2 V(X)$ avec $V(X) = np(1-p)$

Exercice 18

Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire sans remise deux boules de cette urne et on note X la variable qui correspond à la somme des numéros des boules tirées.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Quelle est la probabilité que X ne dépasse pas 5 .
3. Calculer la valeur moyenne de X.
4. Soit Y la variable aléatoire $Y = (X-5)^2$. Donner la loi de probabilité de Y et calculer $E(Y)$

Solution de l'exercice 18

1. On Donne la loi de probabilité de X

X	3	4	5	6	7
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$x_i P(xi)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{7}{6}$

2. Le calcule de $P \leqslant 5$

$$P(X \leqslant 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \frac{2}{3}$$

3. Le calcule de la valeur moyenne de X

$$E(X) = \sum X_i P(x_i) = 4,16$$

4. Loi de Y et $E(Y)$

$$y = (X-5)^2$$

X	3	4	5	6	7
y	4	1	0	1	4

Alors la loi de Y

y	0	1	4	Somme
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1
$y_i P(Y=y_i)$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{10}{5}$

Donc
$$E(y) = \frac{10}{5} = 2.$$

Exercice 19

Le temps d'attente X à un arrêt de bus suit une loi uniforme entre 0 et 30 minutes.

1. Donner la densité de X
2. Déterminer la fonction de répartition de X, son espérance et sa variance.
3. Quelle est la probabilité que vous deviez attendre plus de 15 minutes?

Solution de l'exercice 19

1. La densité f de X est
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{si } x \in [0,30] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
2. Fonction de répartition :
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \frac{x}{30} & \text{si } x \in [0,30] \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 30 \end{cases}$$
L'espérance est 15 minutes, et
$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{1}{30}\int_0^{30} t^2 dt = 300$$
de sorte que $\operatorname{var}(X) = 300 - (15)^2 = 75$

3. $\mathbb{P}(X \geqslant 15) = \frac{1}{2}$.

Exercice 20

Soit U une variable aléatoire distribuée selon la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. 1. En utilisant la table des valeurs de la fonction de répartition de cette loi, donner les valeurs des probabilités suivantes:
$$\mathbb{P}(U \leq 0.11), \quad \mathbb{P}(U \leq 2.15)$$
$$\mathbb{P}(U > 0.11), \mathbb{P}(U > 2.15), \quad \mathbb{P}(U = 2.15), \mathbb{P}(U \geq 2.15)$$
$$\mathbb{P}(U \leq -0.51), \mathbb{P}(U \leq -1.23)$$
$$\mathbb{P}(0.5 < U \leq 1.5), \mathbb{P}(-1 < U \leq 1), \quad \mathbb{P}(-2.6 \leq U < 2.6)$$

2. (Lecture inverse de la table) Quelles sont les valeurs de q_1 et q_2 telles que:
$$\mathbb{P}(U \leq q_1) = 0.791, \quad \mathbb{P}(U > q_2) = 0.025, \quad \mathbb{P}(U \leq q_3) = 0.2358$$

Solution de l'exercice 20

1 .
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U \leq 0.11) &\simeq 0,5438 \\
\mathbb{P}(U \leq 2.15) &\simeq 0,9852 \\
\mathbb{P}(U > 0.11) &= 1 - \mathbb{P}(U \leq 0.11) \simeq 0,4562 \\
\mathbb{P}(U > 2.15) &\simeq 0,0148 \\
\mathbb{P}(U = 2.15) &= 0 \\
\mathbb{P}(U \geq 2.15) &= \mathbb{P}(U > 2.15) \simeq 0,0148 \\
\mathbb{P}(U \leq -0.51) &= \mathbb{P}(U \geq 0.51) \simeq 0,305 \\
\mathbb{P}(U \leq -1.23) &= \mathbb{P}(U \geq 1.23) \simeq 0,0193 \\
\mathbb{P}(0.5 < U \leq 1.5) &= \mathbb{P}(U \leq 1.5) - \mathbb{P}(U \leq 0.5) \simeq 0,2417 \\
\mathbb{P}(-1 < U \leq 1) &= 1 - 2 \times \mathbb{P}(U > 1) \simeq 0.6826 \\
\mathbb{P}(-2.6 \leq U < 2.6) &= 1 - 2 \times \mathbb{P}(U > 2.6) \simeq 0.9906
\end{aligned}$$

2. $q_1 = 0.81$, ensuite on écrit que $\mathbb{P}(U \leq q_2) = 1 - \mathbb{P}(U > q_2) = 0.975$, d'où $q_2 = 1.96$. Enfin, puisque $0.2358 < 0.5, q_3$ est forcément négatif, et

$$\mathbb{P}(U \leq q_3) = \mathbb{P}(U \geq -q_3)$$
$$\text{d'où } \mathbb{P}(U \leq -q_3) = 1 - \mathbb{P}(U \geq -q_3) = 0,7642 \text{ et } q_3 = -0.72$$

Bibliography

[1] Adjabi, S. (2002-2003). Cours de probabiltés, troisième année ingénieur. Faculté des sciences exactes, Université de Béjaia.

[2] Bouleau, N. (1986). Probabilités de l'ingénieur, variables aléatoires et simulation. Hermann, Paris.

[3] Brémaud, P. (2009). Initiation aux probabilités et aux chaînes de Markov. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[4] Caumel, Y. (2011). Probabilités et processus stochastiques. Springer, Paris.

[5] Foata, D., & Fuchs, A. (1998). Calcul des probabilités : cours, exercices et problèmes corrigés. Dunod, Paris.

[6] Jacod, J., & Protter, P. (2003). L'essentiel en théorie des probabilités. Cassini.

[7] Saporta, G. (1990). Probabilités : analyse des données et statistique. Technip.